泛函分析引论及应用

[美] E·克里兹格 著

张石生 张业才 张茂孝 范光柱 译

重 庆 出 版 社

一九八六年·重庆

内 容 提 要

本书是学习泛函分析的一部优秀的入门书。它简明而准确地介绍了这一课程的基本思想、基本概念以及原理和方法，在欧美被许多大学广泛地用作教材。全书共十一章、三个附录，精选了大量例题和900多道习题，给出了单数习题的答案要点，并介绍了阅读本书必需的预备知识。只具有微积分和线性代数基础知识的读者，即可读懂本书的主要内容。可供理工院校和师范理科师生、科技人员作教材或参考书。

INTRODUCTORY FUNCTIONAL ANALYSIS WITH APP

泛函分析引论及应用

Erwin Kreyszig

[美] E·克里兹格 著

泛函分析引论及应用

张石生 张业才 张茂才 范光柱 译

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）

新华书店重庆发行所发行

重庆印制一厂印刷

*

开本：850×1168 1/32印张：21.375插页：2 字数：530千

1986年6月第一版 1986年6月第一次印刷

科技新书目：127—239 印数：1—5,550 册

书号：13114·24 定价：4.10 元

序　言

本书目的　泛函分析在应用科学和纯粹数学中都起着日益重要的作用，因此，迫切要求在学生学习期中尽早地将这门学科介绍给他们.作者打算通过此书使读者熟悉泛函分析的基本概念，原理，方法及其应用。

由于教科书应该面向学生，所以，我在论述这个学科的基本概念和有关的实际应用时，尽力做到使数学系的，物理系的高年级学生，和两系低年级的研究生易于学习掌握，也希望此书对攻读工程技术的研究生有所裨益.

预备知识　这是一本初等的书，只要求学生具有一定的大学与专科院校的数学知识，特别是有了线性代数和普通微积分学知识，就足够学习本书之用了.

本书不要求测度论的知识也不讨论这个问题.不用拓扑学的知识，书中虽有少量涉及紧性的内容，但是是自给自足的.复分析的知识也不必要.在后面的章节中虽有一处(7.5节)用到一点复分析，但讲授和学习时可以随意取舍，所以容易避开它.作为预备知识，附录1给出了一些简单的复习和参考材料，有助于学习此书.

本书适应学生的面非常广泛.也可以用作从线性代数到高等泛函分析的过渡教材.

教学安排 本书可以按每周五小时讲授，一个学期学完，也可以分成两学期讲授，每周讲三小时.

也可将本书截去一部分成为更短的教程.事实上，可以删去一些章节而不损内容之连贯性，并仍然成一体系，例如：

第一章至第四章就是一个短的教程.

第一章至第四章再加第七章就是一个包括谱理论和其它的课题的教程.

内容编排 图1(图见第3页)是一个框图，表明书中材料按相互关系编入五个相互联系的方框之内.

将Hilbert空间理论（第三章）放在赋范空间和Banach空间基本定理之前（第四章），因为它简单，又可以为第四章提供更多的实例.更主要的是使学生从学习Hilbert空间再过渡到一般的Banach空间，较易于克服学习上的困难.

第五，六两章可以删去不学，学完第四章后可以接着学其它几章（第七章至十一章).

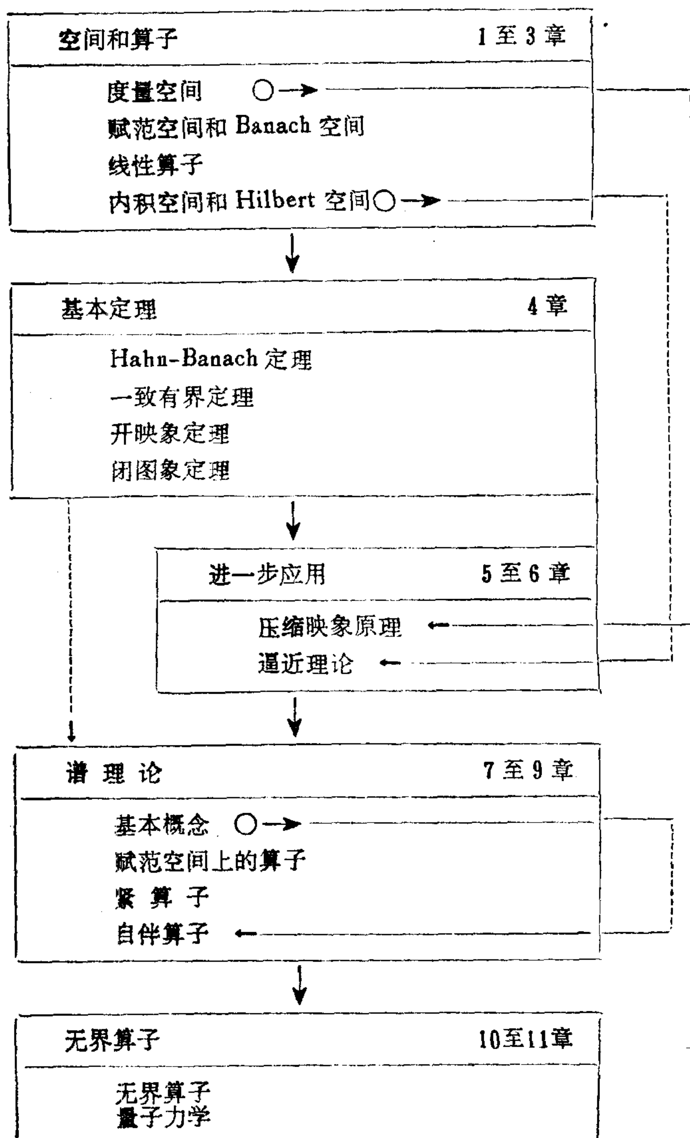
谱理论 第七章至第十一章讲谱理论，教学上有很大的灵活性.可以只讲第七章，或者七章与八章，或者这两章中的基本概念(7.2节与7.3节)，然后立即进行第九章，它讲有界自伴算子的谱理论.

应用 本书在许多地方讲了应用，五章与六章专讲应用.可以依教材顺序来讲，也可以根据要求适当提前.（见图1)

讲第一章后可以立即接第五章.

讲第三章后可以立即接第六章.

第五章和第六章可供选讲，因为其它章节不需要它们作为预备知识.



空间和算子
1至3章
度量空间
赋范空间和 Banach 空间
线性算子
内积空间和 Hilbert 空间
基本定理
4章
Hahn-Banach 定理
一致有界定理
开映象定理
闭图象定理
进一步应用
5至6章
压缩映象原理
逼近理论
谱理论
7至9章
基本概念
赋范空间上的算子
紧算子
自伴算子
无界算子
10至11章
无界算子
量子力学

图1　内容及材料编排

十一章是又一专讲应用的章节，它讨论无界算子（在量子物理中）.实际上它是独立于第十章的.

表述 本书已作为我国、加拿大、欧洲的一些大学的数学系、物理系和工程技术专业学生和研究生的教材，供讲授和讨论班使用.表述方式详细，特别是前几章更是如此，为的是不使初学者感到困难.少数定理的证明步骤较简捷，用到了稍微深入一点的工具知识.

书中讲述概念和方法时注意抽象性是必要的，但应十分重视引出抽象概念的启示.在一般讨论，以及在精心挑选大量合适的例子，其中包括一些简单的例子时我力图作到这一点.希望能帮助学生弄清抽象的概念、思想、技巧总是产生于更具体的事物.学生应该明白，实际问题可以用作说明抽象理论的具体模型，理论应用于它们可以产生具体的结果，实际问题是进一步发展该理论的新思想，新方法的可贵源泉.

习题与解答 本书精选了900多个习题，使读者能更好地理解课文，增强抽象概念的直观性，发展对泛函分析的应用技巧.有些习题很简单，为的是鼓舞初学者的信心。附录2给出了编号为单数的习题的答案.实际上其中许多是完整的题解.

本书内容是自给自足的，即课文中定理和引理的证明都在正文中给出，不放在习题中.因此，内容的展开不依赖于习题.去掉部分甚至全部习题无损于表述的连贯性.

参考材料 参考材料列在附录1中，它包括集合、映射、族等基本概念和事实.

参考文献 它包括与课文有关的书籍和论文，都辑录在附录3中，帮助读者进一步学习课文和钻研有关的课题.所有这些论文

和绝大多数书籍在课文中都引用到。引用时课文中写出了作者姓名和论文发表的年月，请看下面两例，如："存在无Schauder基的可分Banach空间；见P. Enflo(1973)。" 读者就可以从附录3中在Enflo. P(1973)条目找到列出的参考论文。又如"该定理被H. F. Bohnenblust与A. Sobczyk(1938)推广到复向量空间。"这指出在附录3中列出了上面两位作者于1938年发表的有关论文。

符号 紧接于本文之后列出了书中使用的符号并作了解释。

致谢 我要向下列教授深表感谢，他们是：
Haward Anto(Drexel大学)，Helmut Florian（澳大利亚Graz工科大学)，Gordon E. Latta(Virginia大学)，Hwang—Wen Pu (Texas A and M大学)，Donald Sherbert(Illinois大学)和Tim E. Traynor(Windsor大学)。

我还要感谢我以前的和现在的许多学生们，感谢他们的评论和建设性的批评意见。

我还要向John Wiley and Sons出版公司致谢，它在本书出版工作中给予了有效合作和极大关怀。

ERWIN KREYSZIG

符　号

A^C	集A的补集
A^T	矩阵A的转置
$B[a,b]$	有界函数空间
$B(A)$	有界函数空间
$BV[a,b]$	有界变差函数空间
$B(X,Y)$	有界线性算子空间
$B(x;\ r)$	开球
$\bar{B}(x;\ r)$	闭球
c	序列空间
c_0	序列空间
$\mathbf{C}$	复平面或复数域
$\mathbf{C}^n$	n维酉空间
$C[a,b]$	连续函数空间
$C'[a,b]$	连续可微函数空间
$C[X,Y]$	紧线性算子
$\mathscr{D}(T)$	算子T的定义域
$d(x,y)$	由x到y的距离
$\dim X$	空间X的维数
δ_{jk}	Kronecker delta
$\mathscr{E}=(E_\lambda)$	谱族

$\|f\|$	有界线性泛函f的范数
$\mathscr{G}(T)$	算子T的图象
I	恒等算子
inf	下确界（最大下界）
$L^p[a,b]$	函数空间
l^p	序列空间
l^∞	序列空间
$L(X,Y)$	线性算子空间
$M^\perp$	集合M的零化子
$\mathscr{N}(T)$	算子T的零空间
O	零算子
ϕ	空集
$\mathbf{R}$	实直线或实数域
$\mathbf{R}^n$	n维Euclidean空间
$\mathscr{R}(T)$	算子T的值域
$R_\lambda(T)$	算子T的豫解式
$r_\sigma(T)$	算子T的谱半径
$\rho(T)$	算子T的豫解集
s	序列空间
$\sigma(T)$	算子T的谱
$\sigma_c(T)$	算子T的连续谱
$\sigma_p(T)$	算子T的点谱
$\sigma_r(T)$	算子T的剩余谱
Span M	集合M的生成
sup	上确界（最小上界）
$\|T\|$	有界线性算子T的范数
T^*	T的Hilbert伴随算子
$T^\times$	T的伴随算子

T^+, T^-	T的正部与负部
T_λ^+, T_λ^-	$T_\lambda = T - \lambda I$的正部与负部
$T^{1/2}$	T 的正平方根
$\mathrm{Var}(w)$	w的全变差
$\xrightarrow{w}$	弱收敛
X^*	向量空间X的代数对偶(或共轭)空间
X'	赋范空间X的对偶(或共轭)空间
$\|x\|$	x的范数
$\langle x, y \rangle$	x与y的内积
$x \perp y$	x正交于y
$Y^\perp$	闭子空间Y的正交补

目　录

第 一 章

度 量 空 间

泛函分析起源于经典分析，是一个抽象的数学分支，大约八十年前才开始发展，时至今日，泛函分析的方法及其结果对数学的各个领域及其应用都有重要意义．其发展动力来自线性代数、线性常微分方程及偏微分方程、变分法、逼近理论、特别是线性积分方程，它的理论极大地影响了现代泛函分析思想的建立并促进了它的发展．数学家们观察到在不同领域中的问题往往有相关的特征和性质，利用这一事实求得处理这些问题的有效的统一方法，它是由舍去各问题非本质性的具体情节而获得的．这样一种“抽象”方法，优点在于集中注意力于各问题的基本事实，研究者不受那些不重要的情节的干扰，从而就突出了它们，就能很好观察和认识它们．就此而论抽象方法是处理数学系统最简便最经济的方法．一般说来，任何一个数学系统都有种种的具体实现（具体模型），我们看到抽象方法能有效地应用于各具体模型，它避免了把问题孤立起来，并使原来彼此不沾边的数学领域建立起联系和过渡．

遵循这种抽象方法，人们通常从满足某些公理的元素所成之集出发，元素的性质特意不作界定，之后，从该组公理遵照逻辑导出一系列定理，于是一劳永逸地构成整个理论，即是以此公理形式，得出用抽象方法建立起理论体系的数学结构．以后，结构

中有普遍意义的定理就可应用于满足该组公理的特定集合。

例如，在代数学里这个方法用于域、环、群；在泛函分析里用于一些抽象空间，这些空间都有基本重要意义，我们将对其中的一些空间（Banach 空间，Hilbert 空间）仔细讨论。我们将看到"空间"这个概念含意非常之广泛和一般。一个抽象空间是满足某一组公理的一些元素所成之集，元素性质不作界定。选取不同的一组公理就会得出不同类型的抽象空间。

系统地应用抽象空间这一思想始于 M. Fréchet (1906)[1]，事实证明这获得了巨大的成功。

本章研究度量空间，它是泛函分析的基础，所起的作用和实直线**R**在微积分中的作用相似。事实上它是数直线**R**的推广，是为了处理分析中不同分支的问题提供统一的基础而建造的。

我们首先定义度量空间及有关概念并用典型的例子加以说明。对重要的一些特殊空间作了详细的讨论。对完备性这个概念给以非常地重视。这不是所有的度量空间都具有的性质。完备性概念将贯穿全书起关键作用。

重要概念，主要内容方向摘要

度量空间(见1.1-1)是一个集合X，在其上定义了度量。这个度量使X中任意一对元素(点)对应一个距离。度量用公理形式来定义，这些公理是从数直线和复平面中熟知的点与点间的距离的某些性质抽象出来的。基本例子(1.1-2至1.2-3)表明度量这一概念具有非常的一般性。完备性是度量空间可能具有的极为重要的性质，有些度量空间是完备的(见1.4-3)，1.5节与1.6节对此作了详细讨论。另一个有理论和实际意义的概念是度量空间的可分性(见1.3-5)。可分度量空间较之不可分的要简单得多。

---

[1] 见附录3.在那里列出了有关参考书和论文.

1.1 度量空间

在微积分学里我们研究定义在实直线R上的函数。回忆一下在极限过程和其它一些考虑中用到这样的事实，在R上的一个距离函数，叫做d，使每对点x，$y\in$R对应一个距离$d(x,y)=|x-y|$，图2就表明这个概念。在平面上与"普通"三维空间中情况是相似的。



图2 R上的距离

在泛函分析里我们将研究更一般的"空间"与定义在其上的"函数"。我们提出一个很一般，然而又非常灵活的"空间"概念。以一抽象集合X（集中的元素的性质不加界定）来代替R，在X上引进一"距离函数"，它只具有R上距离函数的几条最基本的性质。什么是"最基本"？这远不是平凡的问题。实际上，在定义中公理的选择永远要靠经验，靠对实际问题认识的深度和清楚的思想目的。现在，经历了六十多年的发展，引出了下面在泛函分析及其应用中起基础作用又非常有应用价值的概念。

1.1-1 定义(度量空间，度量) 度量空间是二元组(X,d)，X表一集合而d是X上的度量(或称为X上的距离函数)，即是定义①在$X\times X$上的函数，使得对一切$x,y,z\in X$，有

① 符号×表集合的笛卡尔积，$A\times B$就是一切有序对(a,b)所成之集，其中$a\in A$，$b\in B$。因此$X\times X$就是X中的一切元素的有序对所成之集。

(M1)　d 是实值的，有限的与非负的。

(M2)　$d(x,y)=0$　当且仅当 $x=y$。

(M3)　$d(x,y)=d(y,x)$　　(对称性)。

(M4)　$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$　**(三角不等式)**

以下介绍几个有关的名词：X通常称为(X,d)的基本集，其元素称之为点，对固定的点x，y，称非负实数$d(x,y)$为x到 y 的距离。性质$(M1)$至$(M4)$叫度量公理。三角不等式的称号来自初等几何。见图3。

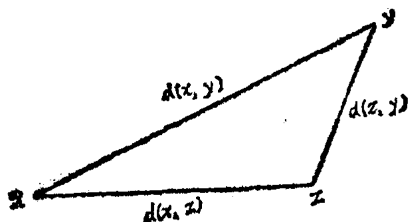


图 3　平面中的三角不等式

从 $(M4)$ 由数学归纳法可导出推广的三角不等式

(1)　$d(x_1,x_n)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)$。

在不致引起混淆时我们可简记 (X,d) 为X。

取$Y\subset X$并将d限制在$Y\times Y$上，就得到(X,d)的子空间 $(Y,\tilde{d})$；于是Y上的度量就是这样的①限制

$$\tilde{d}=d|_{Y\times Y}.$$

$\tilde{d}$称为由d在Y上导出的度量。

现在我们要举出一些度量空间的例子，有些是读者已经很熟

① 附录1 介绍映射的概念时也介绍了限制这个概念。

悉的。要证明它们是度量空间，对它们每个都必须验证满足公理$(M1)$至$(M4)$。通常验证其满足$(M4)$时比验证$(M1)$到$(M3)$要费劲些。但现在这些例子作起来都不困难，所以留给读者（见习题）。在下一节列出了一些对$(M4)$不那么容易验证的例子。

例

1.1-2 实直线R 它是一切实数所成之集，定义了寻常的度量

$$d(x,y)=|x-y|. \tag{2}$$

1.1-3 Euclidean平面R^2 度量空间R^2(叫Euclidean平面)为一切有序实数对，记为$x=(\xi_1,\xi_2)$①，$y=(\eta_1,\eta_2)$，等等所成之集，在其上定了 Euclidean 度量

$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2} \qquad (\geqslant 0). \tag{3}$$

见图4。

如果就在此集上定义另外的度量d_1为

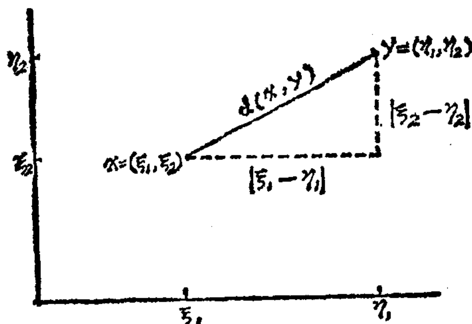


图 4 平面上的 Euclidean 度量.

---

① 我们不用记号$x=(x_1,x_2)$，因为x_1,x_2在后面要用来表示序列.

$$(4) \qquad d_1(x,y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|$$

就得到另外一个度量空间。这就说明了一个重要的事实，对一给定的集合（其不止含一个元素）当选取不同的度量时，即得不同的度量空间。（上述的以d_1为度量的空间没有标准的名称，d_1有时说成是计程度量，为什么？$\mathbf{R}^2$有时也表成E^2）

1.1-4 三维 Euclidean 空间 $\mathbf{R}^3$ 它由有序三元实数组$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$等等的全体所组成，其Euclidean度量为

$$(5) \quad d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2} \quad (\geqslant 0).$$

1.1-5 Euclidean空间 $\mathbf{R}^n$，酉空间 $\mathbf{C}^n$，复平面 $\mathbf{C}$ 前面的例子都是n维 Euclidean 空间$\mathbf{R}^n$的特例，这个空间由全体有序n元实数组，记为

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n), \quad y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$$

等等，所组成，其 Euclidean 度量定义为

$$(6) \qquad d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2} \qquad (\geqslant 0).$$

n维酉空间$\mathbf{C}^n$是由一切有序n元复数组组成，其度量定义为

$$(7) \qquad d(x,y)=\sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2} \qquad (\geqslant 0).$$

当$n=1$时就是复平面$\mathbf{C}$具有寻常的度量

$$(8) \qquad d(x,y)=|x-y|.$$

（$\mathbf{C}^n$通常称为复n维 Euclidean 空间）

1.1-6 序列空间 l^∞ 本例及下一例给我们以初步印象，度量空间是一个多么一般的概念。取一切有界复数列组成集X，即X中每个元素x为复数序列

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots) \qquad 简记为x=(\xi_j),$$

使得对一切 $j=1,2,\cdots$ 合于

$$|\xi_j|\leqslant c_x,$$

c_x表依赖于x但不依赖于j的一个实数。其度量定义为

$$d(x,y)=\sup_{j\in \mathrm{N}}|\xi_j-\eta_j|, \tag{9}$$

其中$x,y\in X$而 $\mathrm{N}=\{1,2,\cdots\}$，sup 表上确界（最小上界）[①]。此空间通常记为 l^{∞}。（这个有点奇特的记号来自 1.2-3）。l^{∞}叫做序列空间，因X中每一元素（或每个点）是一个序列。

1.1-7　函数空间 C[a,b]　取一切定义在闭区间$J=[a,b]$上的实值连续函数$x,y,\cdots$作集X，定义度量为

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|, \tag{10}$$

其中 max 表最大值，表此度量空间为$C[a,b]$（字母C表示“连续”），这是一个函数空间，因$C[a,b]$中每个点是一个函数。

读者应弄清泛函分析与微积分学的重大区别，在微积分中人们通常在一个时候只考虑单个或几个函数，而现在一个函数仅仅是空间中的一个点。

1.1-8　离散度量空间　对任意集合X，在其上定义所谓的离散度量

$$d(x,x)=0,\ \ d(x,y)=1\quad (x\neq y)$$

称此空间为离散度量空间。它在应用上很少出现，然而常用作说明某些概念的例子。

从 1.1-1 可知，度量是以公理术语来定义的。我们要指出，现在，这种公理化的定义已经用于数学各个分支。自从 Hilbert 著述的几何基础开创这种用法以来，获得了广泛的肯定。有趣的是对数学最古老最简单部分的这个研究工作，对现代数学有着极重

---

① 读者要复习 sup 与 inf可以看附录1，A1.6.

要的影响。

习　　题

1. 证明实直线是度量空间。

2. 在一切实数所成之集上，$d(x,y)=(x-y)^2$是否定义一度量？

3. 证明 $d(x, y)=\sqrt{|x-y|}$ 在实数集上定义一度量。

4. 求出由两个点组成的集X上的一切度量．并求 X 为一点所成之集的情形。

5. 设d是X上的一度量，定出所有的常数 k，使得 (i)kd (ii)$d+k$是X上的度量。

6. 证明1.1-6中的d满足三角不等式。

7. 若A是l^∞的子空间，它由一切0与1所成的序列组成。在 A 上的导出的度量是什么？

8. 证明

$$\tilde{d}(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt$$

在1.1-7的集X上定义了另一个度量$\tilde{d}$。

9. 证明1.1-8中的d是一个度量。

10. (Hamming距离) 设X是由 0 和 1 构成的三元有序组全体所成之集．证明X由八个元素组成。又设d表$d(x,y)=x,y$两序组的对应位置上不同数值的个数，证明d是X上的距离．(这个空间和类似的n元有序组所成的空间在开关和自动机理论，编码中起着重要作用。$d(x,y)$ 称为 x 和 y 之间Hamming距离．见R．W．Hamming(1950)的论文，列在附录3中。)

11. 证明(1)。

12. (三角不等式) 三角不等式有几个有用的推论，例如

$$|d(x,y)-d(z,w)|\leqslant d(x,z)+d(y,w)$$

就是其中之一。用(1)证明之。

13. 用三角不等式证明：$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)$。

14. (度量公理) $(M1)$到$(M4)$可以用另一组公理代替（不会改变定义）。例如，证明$(M3)$和$(M4)$可以由$(M2)$和

$$d(x,y)\leqslant d(z,x)+d(z,y)$$

得出。

15. 度量的非负性可以由$(M2)$到$(M4)$得出．试证之。

1.2 度量空间进一步的例子

为阐明度量空间这一概念和验证度量公理的方法，特别是如何验证三角不等式 $(M4)$，我们再给出三个例子，其中最后一例（空间 l^p）在应用上最为重要。

1.2-1 序列空间 s 它由一切（有界或无界）复数序列组成，在其上定义了度量

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\cdot\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|},$$

其中 $x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$。注意：例1.1-6之度量不适合现在的情形。(为什么？)

显然，公理 $(M1)$ 到 $(M3)$ 是满足的。现在验证 $(M4)$，利用 $\mathbf{R}$ 上的辅助函数

$$f(t)=\frac{t}{1+t},$$

求导数得 $f'(t)=1/(1+t)^2$，它是正的，因此 $f(t)$ 单调增加，于是

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

蕴含

$$f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|),$$

把它具体地写出来并利用三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

代入$a=\xi_j-\zeta_j$与$b=\zeta_j-\eta_j$，其中$z=(\zeta_j)$。则$a+b=\xi_j-\eta_j$，从而

$$\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}\leqslant\frac{|\xi_j-\zeta_j|}{1+|\xi_j-\zeta_j|}+\frac{|\zeta_j-\eta_j|}{1+|\zeta_j-\eta_j|}.$$

两端乘以$1/2^j$，再按j从1到∞求和。于是左端得$d(x,y)$而右端为$d(x,z)$与$d(z,y)$之和：

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y).$$

于是$(M4)$成立，因此s是一度量空间.

1.2-2 有界函数空间B(A) 每个元素$x\in B(A)$是定义在给定集A上的有界函数，其度量为

$$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|,$$

其中sup表上确界(见1.1-6之脚注)。当$A=[a,b]\subset \mathbf{R}$时记$B(A)$为$B[a,b]$。

现证$B(A)$为一度量空间。显然$(M1)$与$(M3)$成立，又$d(x,x)=0$也是显然的。反之，对一切$t\in A$，$d(x,y)=0$蕴含$x(t)-y(t)=0$，所以$x=y$。于是$(M2)$成立。此外对一切$t\in A$，我们有

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|&\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|.\end{aligned}$$

这说明$x-y$在A上有界。由于第二行式子不依赖于t，故可在左端取上确界，于是得$(M4)$。

1.2-3 空间l^p，Hilbert序列空间l^2，关于和的Hölder与Minkowski不等式 设$p\geqslant1$为一固定实数，按定义，空间l^p的每个元素为一个数列$x=(\xi_j)=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，合于$|\xi_1|^p+|\xi_2|^p+\cdots$收敛；因而

(1) $$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p<\infty \qquad (p\geqslant 1\text{的实数}),$$

而度量为

(2) $$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^p\right)^{1/p},$$

其中$y=(\eta_j)$，且$\sum|\eta_j|^p<\infty$。如果其中x都是满足(1)的实数列得实l^p空间。如果x都是满足(1)的复数列得复l^p空间。当需要对这两者区分时，可以分别在l^p后加上记号**R**和**C**。

$p=2$时就得到著名的Hilbert空间l^2，其度量为

(3) $$d(x,y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^2}\ .$$

这个空间由D. Hilbert (1912)在研究积分方程时引入并作了研究，这是现在称之为Hilbert空间的最早的例子。(从第三章起，我们要对Hilbert空间作仔细讨论。)

现在证明l^p是一度量空间。如(2)之右端级数收敛，显然(2)满足(M1)到(M3)，以下证明它的确收敛并且也满足(M4)。证明分以下步骤：

(a) 导出一个辅助不等式，

(b) 由(a)导出Hölder不等式，

(c) 由(b)得到Minkowski不等式，

(d) 由(c)得到三角不等式。

具体证明如下：

(a) 令$p>1$并定义q为

(4) $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

p与q称为**共轭指数**，这是个标准名称。由(4)得到

(5) $$1=\frac{p+q}{pq},\quad pq=p+q,\quad (p-1)(q-1)=1.$$

于是$1/(p-1)=q-1$，所以

$$u=t^{p-1}\ \text{蕴含}\ t=u^{q-1}.$$

令α与β为任意正数。由于$\alpha\beta$是矩形的面积，见图5，利用积分得不等式

(6) $$\alpha\beta\leqslant\int_0^\alpha t^{p-1}dt+\int_0^\beta u^{q-1}du=\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}.$$

注意当$\alpha=0$或$\beta=0$时，不等式成立是显然的。

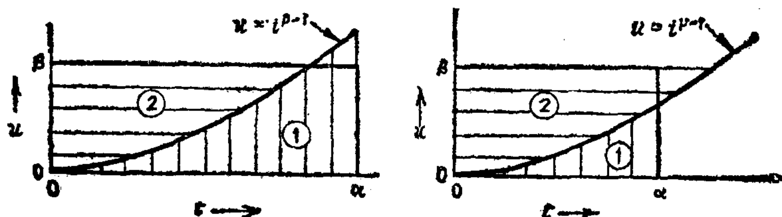


图5 不等式(6)，其中①对应于(6)中第一个积分而②对应第二个。

(b) 令$(\tilde{\xi}_j)$与$(\tilde{\eta}_j)$合于

(7) $$\sum|\tilde{\xi}_j|^p=1,\quad \sum|\tilde{\eta}_j|^q=1.$$

置$\alpha=|\tilde{\xi}_j|$和$\beta=|\tilde{\eta}_j|$，从(6)得到不等式

$$|\tilde{\xi}_j\tilde{\eta}_j|\leqslant\frac{1}{p}|\tilde{\xi}_j|^p+\frac{1}{q}|\tilde{\eta}_j|^q.$$

对j求和并利用(7)与(4)，得到

(8) $$\sum|\tilde{\xi}_j\tilde{\eta}_j|\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

现取任意非零的$x=(\xi_j)\in l^p$与$y=(\eta_j)\in l^q$，并且置

(9) $$\tilde{\xi}_j=\frac{\xi_j}{(\sum|\xi_k|^p)^{1/p}},\quad \tilde{\eta}_j=\frac{\eta_j}{(\sum|\eta_m|^q)^{1/q}}.$$

于是满足(7)，所以可以应用(8)，将(9)代入(8)，乘以(9)中分

母之积，则得到和的Hölder不等式

$$\text{(10)}\qquad \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^q\right)^{1/q},$$

其中$p>1$且$1/p+1/q=1$。此不等式由O. Hölder（1889年）给出。

如果$p=2$，则$q=2$，于是(10)成为和的Cauchy-Schwarz不等式。

$$\text{(11)}\qquad \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^2}.$$

关于$p=q=2$的这种情形，现在要讲些什么还为时过早，但要扼要地指出在今后的一些章节中将起特别作用，它引出一个空间(Hilbert空间)具有比别的$p\neq2$的空间更好的性质。

(c) 以下证明和的 Minkowski 不等式

$$\text{(12)}\qquad \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j+\eta_j|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^p\right)^{1/p},$$

其中$x=(\xi_j)\in l^p$与$y=(\eta_j)\in l^p$，$p\geqslant1$。当求和的项数为有限时此不等式由H. Minkowski（1896年）给出。

对$p=1$，此不等式很容易从数的三角不等式得到。现令$p>1$。为简化书写，记$\xi_j+\eta_j=\omega_j$。由数的三角不等式得

$$\begin{aligned}|\omega_j|^p&=|\xi_j+\eta_j||\omega_j|^{p-1}\\&\leqslant(|\xi_j|+|\eta_j|)|\omega_j|^{p-1}.\end{aligned}$$

对j从1到任意固定的n求和得

$$\text{(13)}\qquad \sum|\omega_j|^p\leqslant\sum|\xi_j||\omega_j|^{p-1}+\sum|\eta_j||\omega_j|^{p-1}.$$

对右端第一个和数用 Hölder 不等式，得

$$\sum|\xi_j||\omega_j|^{p-1}\leqslant\left[\sum|\xi_k|^p\right]^{1/p}\left[\sum(|\omega_m|^{p-1})^q\right]^{1/q}.$$

在右端因$pq=p+q$，见(5)，直接有

$$(p-1)q=p.$$

同样处理(13)式中后一个和数，得

$$\sum|\eta_j||\omega_j|^{p-1}\leqslant[|\eta_k|^p]^{1/p}[\sum|\omega_m|^p]^{1/q}.$$

两者结合起来得

$$\sum|\omega_j|^p\leqslant\{[\sum|\xi_k|^p]^{1/p}+[|\eta_k|^p]^{1/p}\}(\sum|\omega_m|^p)^{1/q}.$$

除以右端最后的因子并注意$1-1/q=1/p$，得出(12)中从1到n的求和的情形。现在让$n\to\infty$。在右端，因x，$y\in l^p$，出现两个收敛级数，于是左端的级数也收敛，(12)得证。

(d)　由(12)式得知当$x,y\in l^p$，(2)中的级数收敛，

故由(12)得出三角不等式。事实上，取任意的$x,y,z\in l^p$，记$z=(\zeta_j)$，用数的三角不等式，然后再应用(12)，得

$$\begin{aligned}d(x,y)&=(\sum|\xi_j-\eta_j|^p)^{1/p}\\&\leqslant(\sum[|\xi_j-\zeta_j|+|\zeta_j-\eta_j|]^p)^{1/p}\\&\leqslant(\sum|\xi_j-\zeta_j|^p)^{1/p}+(\sum|\zeta_j-\eta_j|^p)^{1/p}\\&=d(x,z)+d(z,y).\end{aligned}$$

l^p是度量空间得证。∎

不等式(10)至(12)在许多理论和实际问题中是十分重要必不可缺少的工具。今后工作中将多次用到它们。

习　　题

1．证明在1.2-1中用$\mu_j>0$代替$1/2^j$，且μ_j合于$\sum\mu_j$收敛，就得出另一度量。

2．利用(6)证明两个正数的几何平均数不超过它们的算术平均数。

3．证明 Cauchy-Schwarz 不等式(11)蕴含

$$(|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|)^2\leqslant n(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2).$$

4．(空间l^p)　求一个序列它收敛于零但不在任意的l^p中，$(1\leqslant p<\infty)$

5．求一序列x它在l^p中$(p>1)$，但不在l^1中。

6．(直径，有界集)　距离空间(X,d)中非空有界集的直径$\delta(A)$定义

为

$$\delta(A)=\sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

如果$\delta(A)<\infty$称A是有界的。

证明如果$A\subset B$，则$\delta(A)\leqslant\delta(B)$。

7． 证明$\delta(A)=0$（见6题）当且仅当A是单点集。

8． **（集合间的距离）** (X,d)中两个非空子集A,B间的距离$D(A,B)$定义为

$$D(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B} d(a,b)$$

证明在X的幂集上（即X的一切子集所成之集）D不是度量。（因此这里用符号D，而不用会使我们认为是距离的d）

9． 在8题中如果$A\cap B\neq\phi$，证明$D(A,B)=0$，其逆命题是否成立？不

10． 从点x到(X,d)的非空子集B的距离$D(x,B)$之定义与8题一致，即

$$D(x,B)=\inf_{b\in B} d(x,b)$$

证明对任何$x,y\in X$，

$$|D(x,B)-D(y,B)|\leqslant d(x,y)$$

11． 如果(X,d)是任一度量空间。证明由

$$\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

定义了另一度量，而且在度量$\tilde{d}$下，X是有界的。

12． 证明在度量空间中，两个有界集合A与B的并仍是有界集。（定义见6题）

13． **（度量空间的积）** 两个度量空间(X_1,d_1)和(X_2,d_2)的笛卡尔积$X=X_1\times X_2$能以多种方式定义度量使成度量空间(X,d)。例如，d由

$$d(x,y)=d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$$

来定义，其中$x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$证明它是一个度量。

14． 证明在13题中的X上可以定义另一个度量

$$\tilde{d}(x,y)=\sqrt{d_1(x_1,y_1)^2+d_2(x_2,y_2)^2}.$$

15． 证明在13题中还可定义度量

$$\tilde{\tilde{d}}(x,y)=\max[d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)].$$

（13题至15题中的度量特别重要，X上还可以有别的度量。）

1.3 开集、闭集、邻域

与度量空间有关的重要辅助概念相当多．我们要用到的都在这一节里。因此本节包含许多概念（比本书其它任何一节都多）．但读者会注意到将它们用于Euclidean空间时有些是大家很熟悉的．这当然是很大的方便并显示出了我们沿用来自经典几何学的术语的优点。

首先我们考虑在给定的度量空间(X,d)的一些重要类型的子集．

1.3-1 定义（球和球面） 给定点$x_0\in X$和一正实数$r>0$，定义[①]三种重要的集：

(1) (a) $B(x_0;r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<r\}$ **（开球）**

(b) $\widetilde{B}(x_0;r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)\leqslant r\}$ **（闭球）**

(c) $S(x_0;r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)=r\}$ **（球面）**

所有三种情况中x_0都叫做中心而r叫做半径．∎

我们看到以r为半径的开球就是X中一切距离球心小于r的点．此外，从定义立即得

(2) $$S(x_0;r)=\widetilde{B}(x_0;r)-B(x_0;r).$$

当心．在度量空间，使用类似于Euclidean几何学的术语有很大好处．然而，应当警惕一种危险即认定在任意度量空间中的球和球面具有$\mathbf{R}^3$中的球和球面同样的性质．情况并非如此．一个反常的性质是，在度量空间中球面可能是空集．例如，在1.1-8

① 假定读者已经熟悉了集合论中常用的一些记号，但附录1中还是将它们列出供参考．

离散度量空间中，当$r\neq 1$时我们有$S(x_0;r)=\Phi$。（当$r=1$时它是什么？）别的反常的性质以后要提到。

现介绍另外两个概念，他们是互相联系着的。

1.3-2 定义(开集，闭集) 度量空间X的子集M叫做开集，如果M含有以它的每个点为中心的一个球。X的子集K叫做闭集，如果它的补集（对X取补）是开集，即是，$K^c=X-K$是开的。∎

读者易知按定义开球是开集，闭球是闭集。

半径为ε的开球$B(x_0;\varepsilon)$称为x_0的ε-邻域（按定义 1.3-1，$\varepsilon>0$）。称X的含有x_0的ε-邻域的任一子集为x_0的邻域①。

从定义直接可知x_0的任一邻域含有x_0；换句话说，x_0是它的每个邻域中的点。并且如果N是x_0的一个邻域而$N\subset M$则M也是x_0的一个邻域。

称x_0是集$M\subset X$的**内点**，如果M是x_0的一邻域。M的全体内点所成之集叫做M的**内部**可表示为M^0或$\mathrm{Int}(M)$。但没有大家都采用的统一记号。$\mathrm{Int}(M)$是开的且是含于M的最大开集。

不难证明X的一切开子集所成的集，记为$\mathscr{T}$，具有下列性质：

(T₁) $\phi\in\mathscr{T}$，$X\in\mathscr{T}$。

(T₂) 任意多个$\mathscr{T}$中的元的并是$\mathscr{T}$中之元。

(T₃) $\mathscr{T}$中有限个元之交是$\mathscr{T}$中之元。

证明，(T_1)成立，因空集不含元素因此是开的，又显然X是开的。现证(T_2)。开集的并U中任意一点至少属于这些开集中之

① 在较早的文献中，邻域都是开集，但这个要求已在本定义中去掉了.

一，记此为M，M含有某个以x_0为心的球B，因为M是开的，于是按并集的定义$B\subset U$。(T_2)得证。最后，如果y是开集$M_1, \cdots, M_n$的交集中的任一点，则每个M_j包含有一个以y为心的球。这些球中之最小者就包含在此交集中。(T_3)得证。▮

我们指出性质(T_1)至(T_3)是非常基本的，所以人们要求在更一般的背景上保持这些性质。因此，人们定义**拓扑空间**$(X, \mathscr{T})$为一个集X和X的一切合于公理(T_1)至(T_3)的子集所成的集$\mathscr{T}$。集$\mathscr{T}$称为X的拓扑。由此定义可得：

度量空间是拓扑空间。

开集也在连续映象中起作用，这里的连续性是已知的微积分学中连续性的自然推广，其定义如下：

1.3-3 定义（连续映象） 设$X=(X,d)$和$Y=(Y,\tilde{d})$均为度量空间。称映象$T: X\to Y$在点$x_0\in X$是连续的，如果对每个$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得①（见图6.）

$$\tilde{d}(Tx, Tx_0)<\varepsilon \text{ 对一切合于 } d(x,x_0)<\delta \text{ 的} x \text{成立。}$$

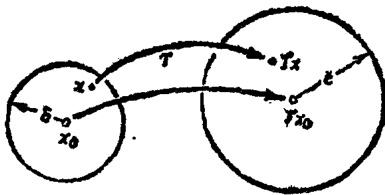


图6 当X,Y都是Euclidean平面$X=R^2, Y=R^2$的情形时，定义1.3-3中不等式之图示

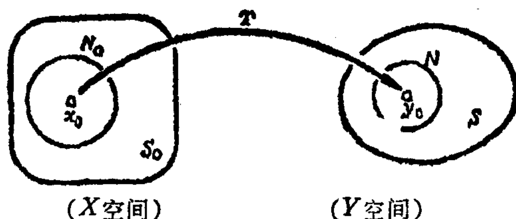
① 在微积分里通常写成$y=f(x)$。相应的x关于T的象就应该写成$T(x)$。但在泛函分析中为了简单起见，习惯上省去括号写成Tx。关于映象的定义列在$A.12$内，见附录1.

重要而有兴趣的是连续映象可以用开集这个术语来刻划如下：

1.3-4 定理（连续映象） 从度量空间 X 到度量空间 Y 内的映象T是连续的，当且仅当Y的任意开子集的逆象是 X 的开子集。

证明．(*a*)设T连续，令$S\subset Y$是开集，又 S_0 为 S的逆象．如果$S_0=\Phi$，那末它是开的．现设$S_0\neq\Phi$．对任意$x_0\in S_0$，命$y_0=Tx_0$．由于S是开的，它含有以 y_0为心的 ε-邻域N，见图7．既然T连续，x_0有一个δ-邻域N_0被映入N．由于$N\subset S$，于是有 $N_0\subset S_0$，所以S_0是开集，因 $x_0\in S_0$ 是任意的．

(*b*)反过来，假定Y 中每个开集的逆象是 X 中的开集，则对每个 $x_0\in X$与任一Tx_0 的 ε-邻域N，N的逆象N_0是开的，且N_0含有x_0．因此 N_0也含有 x_0 的一个 δ-邻域，它被映入N中，这是因为N_0被映入N中．因此，按定义，T在 x_0连续．由于 x_0是X中任一点，故T连续．∎



（X空间）　　（Y空间）

图7　定理1.3-4证明(*a*)部分的记号图示

现在我们还要引入两个有关的概念．设M是度量空间X的子集，称 $x_0\in X$（它可以属于M，或不属于M）为 M 的**聚点**，如果 x_0 的每个邻域至少含有 M 中的异于 x_0 的一个点．由M中的点及

其聚点所成之集称为M的**闭包**，并记为

$$\overline{M}$$

它是包含M的最小闭集。

在往下进行以前，我们要提到度量空间中的球的另一不寻常的性质。在$\mathbf{R}^3$中，开球$B(x_0;\ r)$的闭包$\overline{B(x_0;r)}$就是闭球$\tilde{B}(x_0;r)$，但在一般度量空间中就可能不成立。请读者自己举例说明。

利用闭包概念现给出对今后工作特别重要的下述定义。

1.3-5 定义（稠密集，可分空间） 度量空间X的子集M称为在X中**稠密**，如果

$$\overline{M}=X$$

X叫做**可分的**如果X有在其中稠密的可数子集。（可数集的定义见附录1.）▌

因此，如果M在X中稠密，则X中每个无论多么小的球都含有M中的点。或者换个说法，在这种情形，X中不存在这样的点它有不含M中的点的邻域。

以后会看到可分度量空间比不可分的度量空间相对说来简单一些。以下是可分与不可分空间的一些重要例子，使我们熟悉这些基本概念。

例

1.3-6 实直线R 实直线**R**是可分的。

证明。一切有理数所成之集**Q**是可数的且在**R**中稠密。

1.3-7 复平面C 复平面**C**是可分的

证明。**C**的可数稠子集是由一切实部和虚部都是有理数的复数所组成。

1.3-8 离散度量空间 离散度量空间 X 是可分的当且仅当 X 是可数的。(见1.1-8.)

证明。这种度量蕴含着 X 不可能有真子集在 X 中稠密。因此 X 的稠密子集只可能是 X 本身。于是结论成立。

1.3-9 空间 l^∞ 空间 l^∞ 是不可分的。(见1.1-6.)

证明。设 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$ 是一个由 0 和 1组成的序列，则 $y\in l^\infty$。由 y 我们作出实数 $\hat{y}$，它的二进位制表示式是

$$\frac{\eta_1}{2^1}+\frac{\eta_2}{2^2}+\frac{\eta_3}{2^3}+\cdots.$$

现在利用这一事实：$[0,1]$ 是不可数集，每个 $\hat{y}\in[0,1]$ 都有二进制表示式且不同的 $\hat{y}$ 其二进制表示法也不同。因此有不可数个由0和1组成的序列。根据 l^∞ 上的度量知，任意两不同的 $\hat{y}$ 它们的距离都是1。如果让每个这样的序列为一小球的中心，各小球的半径如果小于1/3，这些球就互不相交。于是得到不可数个这样的球。如果 M 是 l^∞ 的任一稠子集，彼此不相交的每个这样的球必含有 M 中的一个元素。因此 M 不可数。由于 M 是任意的稠子集，这证明 l^∞ 不可能有可数稠子集。因此 l^∞ 不可分。

1.3-10 空间 l^p 空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 是可分的。(见1.2-3)

证明。设 M 为一切如下之序列 y 的集

$$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,0,0,\cdots)$$

其中 n 是任意的正整数而各 η_j 都是有理数。M 是可数的。现证 M 在 l^p 中稠密。设 $x=(\xi_j)\in l^p$ 是任意的。则对每个 $\varepsilon>0$，存在一个 n（依赖于 ε）使得

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_j|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

因为左端是收敛级数余项。由于有理数在R中稠密，对每个ξ_j都有有理数η_j充分接近于它。从而可以求得一个$y\in M$满足

$$\sum_{j=1}^{n}|\xi_j-\eta_j|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

故可得

$$[d(x,y)]^p=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j-\eta_j|^p+\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_j|^p<\varepsilon^p$$

于是我们有$d(x,y)<\varepsilon$，因而证得M在l^p中稠密。

习　　题

1. 通过证明(*a*)任何开球是开集，(*b*)任何闭球是闭集，论证名词"开球"与"闭球"是合理的.

2. 在R上开球$B(x_0;1)$是什么？在C上呢？（见1.1-5）．在$C[a,b]$上呢？（见1.1-7）．解释图8．

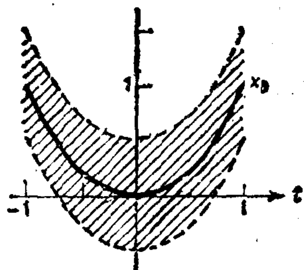


图8　在$C[-1,1]$上，$x_0\in C[-1,1]$，$x_0=t^2$，$\varepsilon=\frac{1}{2}$，x_0的ε-邻域中一切$x\in[C-1,1]$所成的区域．

3. 在$C[0,2\pi]$内，$x(t)=\sin t$，$y(t)=\cos t$，确定使$y\in\tilde{B}(x;r)$的最小的r．

4. 证明任意非空集$A\subset(X,d)$是开的当且仅当它是开球的并．

5. 知道某些集同时既是开集又是闭集是重要的．(*a*)证明X和ϕ总是这种情形．(*b*)证明在离散度量空间X中，每个子集既开又闭．

6. 如果x_0是集$A\subset(X,d)$的聚点，证明x_0的任何邻域含有A的无限多个点．

7. 说出以下每个子集的闭包．(*a*)R上的全体整数．(*b*)R上的全体有理数，(*c*)复平面C上实部和虚部都是有理数的复数全体．(*d*)圆盘$\{z\mid |z|<1\}\subset$C

8. 证明在度量空间中，开球$B(x_0;r)$的闭包$\overline{B(x_0;r)}$可以不同于闭球$\tilde{B}(x_0;r)$．

9. 证明$A\subset\bar{\bar{A}}$，$\bar{\bar{A}}=\bar{A}$，$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$，$\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$.

10. 不属于闭集$M\subset(X,d)$的点x到M的距离总不是零. 要证明这个事实，可证$x\in\bar{A}$当且仅当$D(x,A)=0$（见1.2节10题）；这里A是X的任意非空子集.

11. （边界）集$A\subset(X,d)$的边界点x是X中的点，含于x的每个邻域内既含有A的点，也有不属于A的点（至于x则可能在，也可能不在集A内）；A的边界点的全体称为A的边界. 说明下列情形的边界. (a) **R**上的区间$(-1,1)$，$[-1,1)$，$[-1,1]$；(b) **R**上一切有理数之集；(c) 圆盘$\{z \mid |z|<1\}\subset\mathbf{C}$和$\{z \mid |z|\leqslant 1\}\subset\mathbf{C}$

12. （空间**B**$[a,b]$）证明$B[a,b]$，$a<b$，是不可分的（见1.2-2.）

13. 证明度量空间X是可分的当且仅当X有一可数子集Y，使得对每个$\varepsilon>0$和每个$x\in X$，存在$y\in Y$满足$d(x,y)<\varepsilon$.

14. （连续映象）证明映象$T: X\to Y$是连续的当且仅当任意闭集$M\subset Y$的逆象是X中的闭集.

15. 证明在连续映象下开集的象不必是开集.

1.4 收敛、Cauchy序列、完备性

我们知道实数列在微积分中起重要作用，是因为**R**上的度量使我们能定义这种序列收敛性的基本概念. 对于复数序列情形相同，这时必须用到复平面上的度量. 对于任意的度量空间$X=(X,d)$，情况也十分相似，就是，可以考虑X中的元素x_1，x_2，…的序列(x_n)，利用X上的度量d类似于微积分中的收敛性那样定义收敛：

1.4-1 定义（序列的收敛，极限） 度量空间(X,d)中的序列(x_n)称为是收敛序列或收敛的，如果存在$x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0.$$

x称为是(x_n)的极限，并记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x$$

或者，简记为

$$x_n \to x.$$

我们说该(x_n)收敛于 x 或有极限x。如果 (x_n) 不收敛，就说它是发散的。∎

度量 d 是怎样用于这个定义的呢？我们看到由 d 产生实数$a_n=d(x_n,x)$ 的数列，由它的收敛性定义(x_n)的收敛性。因此如果$x_n\to x$，则对给定的$\varepsilon>0$，有$N=N(\varepsilon)$使得一切x_n，当$n>N$时，都在x的ε-邻域$B(x;\varepsilon)$内。

为避免误解，应注意，按 1.4-1 定义，一个收敛序列的极限必须是该空间X中的点。例如，设X为$\mathbf{R}$上的开区间$(0,1)$。定义寻常度量 $d(x,y)=|x-y|$。则序列$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\right)$不是收敛的，因为该序列要收敛到的点 0 不属于$X$。在本节后面还要涉及到这一点和类似情况。

我们首先证明收敛序列的两个熟知的性质．（极限的唯一性和有界性），它们是从微积分移植到我们现在这一更一般的框架中来的。

称非空子集$M\subset X$为有界集，如果它的直径

$$\delta(M)=\sup_{x,y\in M} d(x,y)$$

是有限的。又称X中的序列(X_n)为**有界序列**，如果对应的点集是X的有界子集。

显然，如果M有界，则$M\subset B(x_0;r)$，其中$x_0\in X$为任意点且r是一个（充分大）实数，反之亦然。

现在，有下面的论断

1.4-2 引理（有界性，极限） 设 $X=(X,d)$ 为一度量空间，则：

(a) X中的收敛序列是有界序列且其极限是唯一的。

(b) 如果在X中$x_n \to x$，且$y_n \to y$，则$d(x_n, y_n) \to d(x, y)$。

证明. (a) 假定$x_n \to x$，则取$\varepsilon = 1$，可以有一个N使得对一切$n > N$，$d(x_n, x) < 1$。于是根据1.1节三角不等式($M4$)，对一切n我们有$d(x_n, x) < 1 + a$，其中

$$a = \max\{d(x_1, x), \cdots, d(x_N, x)\}.$$

这表明(x_n)有界。如果$x_n \to x$ 又$x_n \to z$，由($M4$)得

$$0 \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, z) \to 0 + 0$$

于是极限的唯一性$x = z$由($M2$)得出。

(b) 根据1.1节(1)，我们有

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

因此得

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

将x_n与x，y_n与y交换并乘以-1，所得结果与上式结合，得到

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0 \quad (n \to \infty) \blacksquare$$

现在我们要定义度量空间的完备性，它是今后我们工作的基础，完备性不能由1.1节($M1$)至($M4$)推导出来，因为存在不完备的度量空间。换言之，完备性这个性质，有的度量空间有，而有的度量空间没有，它不是度量空间固有的性质。完备的度量空间与不完备的空间相比，有更好一些的性质并且相对简单一些。随着课程的进行，这些话的意思会越来越明白。

首先回忆在微积分中一个实数的或复数的序列(x_n)，它分别在实直线**R**上收敛或在复平面上收敛，当且仅当它满足Cauchy收敛准则，即当且仅当对每个$\varepsilon > 0$，存在$N = N(\varepsilon)$，使得

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \qquad (m, n > N)$$

（见附录1，$A.1.7$中有证明）。这里$|x_m - x_n|$是由x_m到x_n在实直线**R**上或复平面**C**上的距离$d(x_m, x_n)$。因此可以将Cauchy准则表

为

$$d(x_m,x_n)<\varepsilon \qquad (m,n>N)。$$

满足 Cauchy 准则条件的序列可以叫做 Cauchy 序列。于是 Cauchy收敛准则可简言之为：在**R**上或**C** 上的实数列或复数列收敛，当且仅当它是Cauchy 数列。这个收敛涉及到在**R**或**C**上这个背景。不幸的是在更一般的空间里情况就复杂得多，有的空间可能存在不收敛的 Cauchy 序列。这些空间缺乏一个极为重要的性质，叫做完备性，基于这个考虑提出了以下定义。它首先由 M. Fréchet (1906)给出。

1.4-3 定义（Cauchy序列，完备性） 度量空间 $X=(X,d)$中的序列称为是Cauchy序列（或基本序列）如果对每个$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，使得

(1) $\quad d(x_m,x_n)<\varepsilon$，对一切$m,n>N$。

空间X称为是完备的，如果X中的每个 Cauchy 序列都收敛。（即它收敛于X中的一个元素）▮

利用完备性这个词语来表述时，Cauchy 收敛准则蕴含下面的定理。

1.4-4 定理（实直线，复平面） 实直线和复平面都是完备度量空间。

更一般地，从定义直接可知完备度量空间恰恰是那样的空间，在其中 Cauchy 条件(1)是收敛性成立的充要条件。

在应用中一些重要的完备空间与不完备空间将在下节作系统介绍。

目前我们提到几个很容易得到的简单的不完备的空间。在实直线上去掉一点a就产生不完备度量空间$\mathbf{R}-\{a\}$。还可进一步去

掉全体无理数得到有理直线Q，它是不完备的。开区间(a,b)其度量由R导出也是一个不完备空间．如此等等。

由于度量空间可能不完备，显然对一般度量空间，定义中的(1)可以不是收敛的充分条件．很好地了解问题的整个处境十分重要；试考虑一个简单例子．令$X=(0,1]$，具有寻常度量$d(x,y)=|x-y|$，和序列(x_n)，$x_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$。这是一个Cauchy序列，但它不收敛，因为点0（这是该序列要收敛到的点）不是X中的点。这说明收敛不是这个序列本身的内在性质，它还依赖于序列所在的空间。换言之，收敛序列不是收敛"在它自己上面"而必需收敛到空间中某个点。

虽然条件(1)对收敛性不再是充分的，值得注意它仍是必要的。事实上很容易得到以下结果

1.4-5 定理（收敛序列） 度量空间中每个收敛序列都是Cauchy序列。

证明。如果$x_n\to x$，则对每个$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，使得

$$d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}\qquad 对一切 n>N。$$

从而由三角不等式，对$m,n>N$，得

$$d(x_m,x_n)\leqslant d(x_m,x)+d(x,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这就证明(x_n)是Cauchy列。

我们将看到，比如在线性算子理论中，有许多的结果依赖于对应空间的完备性。为什么我们在微积分中用R而不用有理直线Q（一切有理数所成之集其由R上导出的度量）。实直线R是完备的

是一个重要原因.

我们还要讲三个与收敛性和完备性有关而后面要用到的定理来结束本节.

1.4-6 定理（闭包，闭集） 设M为度量空间(X,d)的非空子集，而$\overline{M}$按前节定义是它的闭包. 则

(a) $x\in\overline{M}$当且仅当M中存在序列(x_n)使得$x_n\to x$.

(b) M是闭的当且仅当$x_n\in M$，$x_n\to x$则$x\in M$.

证明. (a)设$x\in\overline{M}$. 如果$x\in M$，则序列$(x,x,x,\cdots)$为所求. 如果$x\notin M$，则它是M的聚点. 于是对每个$n=1,2,\cdots$，球$B(x;\frac{1}{n})$含有$x_n\in M$，于是$x_n\to x$. 因为当$n\to\infty$，$\frac{1}{n}\to 0$.

反之 如果(x_n)是M中的序列且$x_n\to x$，则有$x\in M$，或者x的每个邻域含有$x_n\neq x$，所以x是M的聚点. 于是按定义$x\in\overline{M}$.

(b) M是闭的当且仅当$M=\overline{M}$. 所以(b)容易由(a)得到. ∎

1.4-7 定理（完备子空间） 完备度量空间的子空间是完备的当且仅当M是X中的闭集.

证明. 设M完备，由1.4-6(a)，对每个$x\in\overline{M}$，存在M中序列(x_n)收敛于x，因由1.4-5知(x_n)是Cauchy列又M完备，所以(x_n)在M中收敛，又由1.4-2其极限是唯一的，因此$x\in M$. 由于$x\in\overline{M}$是任意的，得证M是闭的.

反之，设M是闭的而(x_n)是M中的Cauchy序列，则$x_n\to x\in X$，由1.4-6(a)知$x\in\overline{M}$，又由假设$M=\overline{M}$. 于是$x\in M$. 因此这个任意的Cauchy列在M中收敛. 所以M是完备的.

这个定理很有用，今后常常用到它。下一节的例 1.3-5 为其首次应用。这种用法是典型的。

这三个定理的最后一个表明了序列收敛与映象连映性之间的重要关系。

1.4-8 定理（连续映象） 映象T：$X\to Y$将度量空间(X, d)映入度量空间$(Y, \tilde{d})$在点$x_0\in X$是连续的当且仅当

若$x_n\to x_0$，则 $Tx_n\to Tx_0$

证明。设T在x_0连续；见定义 1.3-3，则对给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$d(x,x_0)<\delta$，就有$\tilde{d}(Tx,Tx_0)<\varepsilon$。让$x_n\to x_0$。于是存在$N$，使得对一切$n>N$有

$$d(x_n,x_0)<\delta.$$

因此对一切$n>N$

$$\tilde{d}(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon.$$

按定义，这说明

$$Tx_n\to Tx_0$$

反之，假定

$$x_n\to x_0,\ \text{则}\ Tx_n\to Tx_0$$

现在证明T在x_0连续。设结论不成立。则存在$\varepsilon>0$，使得对一切$\delta>0$，存在$x\neq x_0$它满足$d(x,x_0)<\delta$，而$\tilde{d}(Tx,Tx_0)\geqslant\varepsilon$。

特别，对$\delta=\frac{1}{n}$，存在x_n满足

$$d(x_n,x_0)<\frac{1}{n},\ \text{但}\ \tilde{d}(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon$$

显然 $x_n\to x_0$，但(Tx_n)不收敛于Tx_0。这与$Tx_n\to Tx_0$矛盾。定理得证。

习　　题

1. （子序列）设在度量空间X内序列(x_n)是收敛的且其极限为x. 证明(x_n)的每个子序列(x_{n_k})是收敛的，而且有同一极限x.

2. 如果(x_n)是Cauchy序列，并且有子序列$x_{n_k}\to x$，证明(x_n)收敛于极限x.

3. 证明$x_n\to x$当且仅当对x的每个邻域V，总存在正数n_0，当$n>n_0$时，$x_n\in V$.

4. （有界性）证明 Cauchy 序列总是有界的.

5. 在度量空间内，有界序列是Cauchy序列吗？是收敛序列吗？

? 6. 设(x_n)和(y_n)是度量空间(X,d)中的两个Cauchy序列，证明(a_n)，$a_n=d(x_n,y_n)$，收敛. 举例说明之.

7. 给出一个关于引理1.4-2(b)的间接证明.

8. 如果d_1和d_2是在同一集合上的两个度量且存在正数a与b使得对一切$x,y\in X$，

$$ad_1(x,y)\leqslant d_2(x,y)\leqslant bd_1(x,y).$$

证明(X,d_1)和(X,d_2)中的Cauchy 序列是相同的.

9. 利用8题，证明在1.2节13题到15题中的各度量空间有相同的Cauchy 序列.

10. 利用R的完备性，证明C的完备性.

1.5　例. 完备性的证明

在各种应用中，给定了集X，（例如，由序列或函数所成之集），并且在X上选定度量使X成一度量空间，剩下要做的是弄清(X,d)是否完备. 为证明完备性，在X中任取Cauchy 序列(x_n)证明它在X中收敛. 证明的简单或复杂程度随空间不同而不同，但其证明有近乎相同的一般模式：

(i) 构造一个元素x（用作极限）.

(ii) 证明x是所研究的空间的元素.

(iii) 证明$x_n\to x$（按所选的度量意义下）.

对一些理论上和应用研究中经常出现的一些度量空间，我们将给出它们的完备性的证明．读者会注意到在各例中(例1.5-1到1.5-5)都借助于实直线和复平面的完备性．这是很典型的．

例

1.5-1 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 的完备性． Euclidean 空间 $\mathbf{R}^n$ 与酉空间 $\mathbf{C}^n$ 是完备的．(见1.1-5.)

证明．先考虑 $\mathbf{R}^n$．回忆 $\mathbf{R}^n$ 上的度量 (Euclidean 度量) 是

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j-\eta_j|^2\right)^{1/2}$$

其中 $x=(\xi_j)$ 与 $y=(\eta_j)$；(见1.1节 (6))．设 (x_m) 是 $\mathbf{R}^n$ 中任一 Cauchy 序列，记 $x_m=(\xi_1^{(m)},\cdots,\xi_n^{(m)})$．因为 (x_m) 是 Cauchy 序列，对每个 $\varepsilon>0$，存在 N 使

$$(1)\quad d(x_m,x_r)=\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)})^2\right)^{1/2}<\varepsilon\quad(m,r>N)$$

平方两端，对 $m,r>N$ 和 $j=1,\cdots,n$，我们有

$$(\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)})^2<\varepsilon^2,\text{于是}\ |\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)}|<\varepsilon$$

这表明对每个固定的 j，$(1\leqslant j\leqslant n)$，序列 $(\xi_j^{(1)},\ \xi_j^{(2)},\cdots)$ 是实数的 Cauchy 序列。根据定理 1.4-4 它是收敛的，比如说，当 $m\to\infty$，$\xi_j^{(m)}\to\xi_j$．现用这 n 个极限定义 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，显然 $x\in\mathbf{R}^n$．由(1)，当 $r\to\infty$，得

$$d(x_m,x)\leqslant\varepsilon\qquad(m>N).$$

这证明了 x 是 (x_m) 的极限．因为 (x_m) 是任意的Cauchy序列，空间 $\mathbf{R}^n$ 的完备性得证．$\mathbf{C}^n$的完备性可用同样方法根据定理1.4-4

证得。

1.5-2 l^∞的完备性 空间l^∞是完备的。(见1.1-6)

证明．设(x_m)是空间l^∞中任一 Cauchy 序列，其中$(x_m)=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\cdots)$。由于$l^\infty$上的度量是

$$d(x,y)=\sup_j|\xi_j-\eta_j|$$

[其中$x=(\xi_j)$而$y=(\eta_j)$]且(x_m)是 Cauchy 序列，对任意$\varepsilon>0$，存在N使得对一切$m,n>N$

$$d(x_m,x_n)=\sup_j|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon$$

于是对每个固定的j更有

$$(2)\qquad |\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon \qquad (m,n>N).$$

因此对每个固定的j，序列$(\xi_j^{(1)},\xi_j^{(2)},\cdots)$是 Cauchy 数列。根据定理1.4-4它收敛，比如说$\xi_j^{(m)}\to\xi_j$当$m\to\infty$。用这无限多个极限定义序列$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，以下证明$x\in l^\infty$且$x_m\to x$。由(2)让$n\to\infty$我们有

$$(2^*)\qquad |\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqslant\varepsilon \qquad (m>N).$$

由于$x_m=(\xi_j^{(m)})\in l^\infty$，存在实数$k_m$使得$|\xi_j^{(m)}|\leqslant k_m$对一切$j$成立。于是根据三角不等式

$$|\xi_j|\leqslant|\xi_j-\xi_j^{(m)}|+|\xi_j^{(m)}|\leqslant\varepsilon+k_m \qquad (m>N).$$

此不等式对一切j成立且右端与j无关，从而(ξ_j)是有界数列。于是$x=(\xi_j)\in l^\infty$。又由(2^*)可得

$$d(x_m,x)=\sup_j|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqslant\varepsilon \qquad (m>N).$$

这表明$x_m\to x$。因(x_m)是l^∞的任一Cauchy 序列。所以l^∞完备。

1.5-3 空间 c 的完备性 空间 c 由一切收敛的复数列组成，其度量由l^∞导出。

空间c是完备的。

证明。c 是 l^∞ 的子空间因而我们证明 c 闭于 l^∞，于是根据定理1.4-7它是完备的。

考虑任意 $x=(\xi_j)\in\bar{c}$，$\bar{c}$ 表 c 的闭包。根据1.4-6(a)存在 $x_n=(\xi_j^{(n)})\in c$，使得 $x_n\to x$。因此，任意给定 $\varepsilon>0$，存在 N 使得对 $n\geqslant N$ 及一切 j，我们有

$$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|\leqslant d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{3},$$

特别，

对 $n=N$ 和一切 j，因 $x_N\in c$，它的项 $\xi_j^{(N)}$ 构成一收敛序列，它当然是 Cauchy 序列，因此存在 N_1 使得

$$|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad (j,k\geqslant N_1).$$

利用三角不等式，对一切 $j,k\geqslant N_1$ 则有

$$|\xi_j-\xi_k|\leqslant|\xi_j-\xi_j^{(N)}|+|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|+|\xi_k^{(N)}-\xi_k|<\varepsilon$$

这表明序列 $x=(\xi_j)$ 是收敛的，从而 $x\in c$。由于 $x\in\bar{c}$ 是任意的，证明了 c 在 l^∞ 是闭的。于是由1.4-7得证 c 完备。∎

1.5-4 l^p的完备性 空间 l^p 是完备的；p 为定数且 $1\leqslant p<+\infty$。（见1.2-3）

证明。设 (x_n) 是 l^p 中的任一Cauchy 序列，其中 $x_m=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\cdots)$，则对每个 $\varepsilon>0$，存在 N 使得对一切 $m,n>N$

$$d(x_m,x_n)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon \tag{3}$$

从而对每个 $j=1,2,\cdots$ 我们有

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon\qquad (m,n>N). \tag{4}$$

选一固定的 j。由(4)知 $(\xi_j^{(1)},\xi_j^{(2)},\cdots)$ 是一 Cauchy 数列。由于**R**与**C** 是完备的所以它收敛（见1.4-4）。比如说，当 $m\to\infty$，$\xi_j^{(m)}\to$

ξ_j。用这些极限，我们定义$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$并证明$x\in l^p$，且$x_m\to x$。

由(3)，对一切$m,n>N$我们有

$$\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p<\varepsilon^p \qquad (k=1,2,\cdots),$$

让$n\to\infty$，对$m>N$得出

$$\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(m)}-\xi_j|^p<\varepsilon^p \qquad (k=1,2,\cdots).$$

现在再让$k\to\infty$；则对$m>n$

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(m)}-\xi_j|^p\leqslant\varepsilon^p$$

这表明$x_m-x=(\xi_j^{(m)}-\xi_j)\in l^p$.因$x_m\in l^p$,应用1.2节之Minkowski不等式(12)，则

$$x=x_m+(x_m-x)\in l^p.$$

此外，(5)中的级数代表$[d(x_m,x)]^p$。所以(5)蕴含$x_m\to x$。因(x_m)是l^p中任意Cauchy序列。$l^p(1\leqslant p+\infty)$是完备的得证。

1.5-5 C[a,b]的完备性 函数空间$C[a,b]$是完备的；这里$[a,b]$是**R**上任一给定的闭区间。（见1.1-7.）

证明。设(x_m)是$C[a,b]$中的任一Cauchy序列。则任意给定$\varepsilon>0$，存在N，使得对一切$m,n>N$，我们有

$$(6) \qquad d(x_m,x_n)=\max_{t\in J}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon$$

其中$J=[a,b]$。从而对任意的$t=t_0\in J$，

$$|x_m(t_0)-x_n(t_0)|<\varepsilon \qquad (m,n>N)$$

这表明$(x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots)$是实数的Cauchy列，因**R**完备(见1.4-4)，此序列收敛，比如说，$x_m(t_o)\to x(t_o)$当$m\to\infty$。这

样，对每个$t\in J$可以对应唯一的实数$x(t)$。于是在J上就（逐点地）定义了一个函数．下证$x\in C[a,b]$且$x_m\to x$。

由(6)让$n\to\infty$，我们有

$$\max_{t\in J}|x_m(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon \qquad (m>N),$$

从而对每个$t\in J$

$$|x_m(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon \qquad (m>N).$$

这表明在J上$(x_m(t))$一致收敛于$x(t)$。由于各x_m都是J上的连续函数而收敛又是一致的，由熟知微积分知识知道其极限函数$x(t)$是连续的．(也可参见9题)。因此$x\in C[a,b]$。同时又得到$x_m\to x$。这就证得$C[a,b]$的完备性。

在1.1-7及这里，为了简单起见，我们假定x是实值连续函数。这样的空间可以称为实$C[a,b]$。类似地，如果取在$[a,b]\subset$ R上的一切复值连续函数，可得复$C[a,b]$。它也是完备的。其证明与上面几乎是一样的。此外，由上证明还同时得出以下事实。

1.5-6 定理（一致收敛） 空间$C[a,b]$中$x_m\to x$的收敛性是一致收敛，即，(x_m)在$[a,b]$上一致收敛于x。

由于$C[a,b]$上的度量表明在$[a,b]$上一致收敛，因此有时叫它一致度量。

为了更好地了解完备性及有关概念，最后我们来看几个不完备空间的例。

不完备度量空间的例

1.5-7 空间Q 它是一切有理数所成之集具有寻常度量

$d(x,y)=|x-y|$，其中 $x,y\in Q$。又称之为有理直线。Q是不完备的。（证明？）

1.5-8 多项式 X 是由一切定义在一有限闭区间 $J=[a,b]$ 上 t 的多项式全体组成，其度量为

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|.$$

此度量空间(X,d)是不完备的。事实上，在 J 上任一个一致收敛于一个连续函数的多项式序列，当此连续函数不是多项式时，它就是X中的Cauchy 列但在X中不收敛的例子。

1.5-9 连续函数。设X是 $J=[0,1]$ 上一切实值连续函数所成之集，又令

$$d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt$$

此度量空间(X,d)是不完备的。

证明。图9中的函数x_m构成一Cauchy 序列，这是由于$d(x_m,x_n)$是图10中三角形的面积，它对每个给定的$\varepsilon>0$,

$$d(x_m,x_n)<\varepsilon \qquad \text{当} m,n>1/\varepsilon \text{时}.$$

现证此 Cauchy 列不收敛。我们有

$$x_m(t)=0 \quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\ x_m(t)=1 \quad t\in[a_m,1]$$

其中$a_m=\frac{1}{2}+\frac{1}{m}$。因此对每个$x\in X$,

$$d(x_m,x)=\int_0^1 |x_m(t)-x(t)|dt$$

$$=\int_0^{1/2}|x(t)|dt+\int_{1/2}^{a_m}|x_m(t)-x(t)|dt$$

$$+\int_{a_m}^{1}|1-x(t)|dt.$$

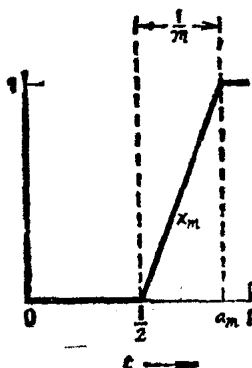


图9 例1.5-9

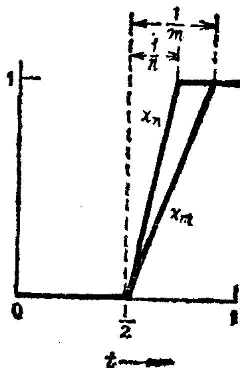


图10 例1.5-9

因右端的被积函数是非负的，所以每个积分也是非负的。如果$d(x_m,x)\to 0$，则每个积分趋近于零。因x是连续的，所以应有

$$x(t)=0 \quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right), \quad x(t)=1 \quad t\in\left(\frac{1}{2},1\right].$$

但作为连续函数这是不可能的。因此(x_m)不收敛，即在X中它不可能有极限。这就证明了X是不完备的。

习　　题

1．设$a,b\in\mathbf{R}$，且$a<b$．证明开区间(a,b)是$\mathbf{R}$的不完备子空间，而闭区间$[a,b]$是完备的．

2．设X的一切元素为有序的n元组$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$\xi_i$为实数，其度量为

$$d(x,y)=\max_j|\xi_j-\eta_j|$$

其中$y=(\eta_j)$．证明(X,d)是完备的．

3．设子空间$M\subset l^\infty$是由至多有限项不为零的序列全体所组成．试求一个M中的Cauchy列它在M中不收敛，从而证得M不完备．

4. 应用定理1.4-7证明 3 题中的M不完备.

5. 证明全体整数所成之集其度量d为 $d(m,n)=|m-n|$时，它是度量空间.

6. 在全体实数所成之集上，如果选择度量

$$d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|,$$

证明它是不完备的度量空间.

7. 设X是全体正整数所成之集，$d(m,n)=|m^{-1}-n^{-1}|$，证明 (X,d) 不完备.

8. (空间C[a,b]). 设子空间$Y\subset C[a,b]$ 由一切 $x\in C[a,b]$，x 合于 $x(a)=x(b)$，所组成. 证明Y是完备的.

9. 在1.5-5中曾引用到微积分中以下定理. 在$[a,b]$上的连续函数列如果一致收敛，则其极限函数在$[a,b]$上连续. 试证明这个定理.

10. (离散度量) 证明离散度量空间 (见1.1-8) 是完备的.

11. (s 空间) 证明在 s 空间中(见1.2-1)$x_n\to x$ 当且仅当 $\xi_j^{(n)}\to\xi_j$ 对一切$j=1,2,\cdots$,其中$x_n=(\xi_j^{(n)})$与$x=(\xi_j)$.

12. 利用11题证明 s 空间是完备的.

13. 证明在1.5-9中(x_n)是另一个 Cauchy 列. 其中

$$x_n(t)=n \quad 当0\leqslant t\leqslant n^{-2}, x_n(t)=t^{-\frac{1}{2}}, \quad 当n^{-2}\leqslant t\leqslant 1.$$

14. 证明13题中的Cauchy列不收敛.

15. 设X是由仅有有限项异于零的实数列$x=(\xi_j)$全体组成，赋以度量$d(x,y)=\sum|\xi_j-\eta_j|$,这里 $y=(\eta_j)$,注意这是一个有限和，但项数依赖于x与y. 考虑序列(x_n)，其中

$$x_n=(\xi_j^{(n)}),$$

$$\xi_j^{(n)}=j^{-2} \quad 当j=1,2,\cdots,n, \quad \xi_j^{(n)}=0 \quad 当j>n.$$

试证明(x_n)是 Cauchy 列但不收敛.

1.6 度量空间的完备化

我们知道有理直线Q是不完备的 (见1.5-7) 但可以"扩大"成实直线 R 而 R 完备. 而且这个Q的"完备化"空间 R 使Q在其中稠密 (见1.3-5). 十分重要的是我们将看到任意不完备的度量空间可以按类似的方式将它"完备化". 为叙述简洁起见我们用到两个有关的概念，它们还有别的应用.

1.6-1 定义（等距映象，等距空间） 设$X=(X,d)$与$\tilde{X}=(\tilde{X},\tilde{d})$是度量空间，则：

(a) 将X映入$\tilde{X}$的映象T叫做是等距的或者等距，如果T保距，即是，如果对一切$x,y\in X$,

$$\tilde{d}(Tx,Ty)=d(x,y),$$

其中Tx与Ty是x与y各自的象。

(b) 称空间X等距于空间$\tilde{X}$如果存在X到$\tilde{X}$上的双射等距。这时空间X与$\tilde{X}$叫做等距的空间。∎

因此两等距的空间至多它们的元素的性质不同，但从度量观点来看它们没有区别。如果在研究中不考虑点的性质就可以将这两空间视为恒同的即视为同一"抽象"空间的两个复印品。

现在我们可以叙述和证明每个度量空间都可以完备化这个定理了。出现在此定理中的空间$\hat{X}$称为已知空间X的**完备化空间**。

1.6-2 定理（完备化） 对于度量空间$X=(X,d)$存在完备度量空间$\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$，它有一子空间$W$与$X$等距并在$\hat{X}$中稠密。除等距不计外，这个空间$\hat{X}$是唯一的。即是说，如果$\tilde{X}$是任一有子空间$\tilde{W}$与$X$等距的完备度量空间，则$\tilde{X}$与$\hat{X}$等距。

证明。证明过程稍长但是是直接的。分为从(a)到(d)四步。我们构造

(a) $\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$,

(b) X到W上的等距T，其中$\overline{W}=\hat{X}$。然后证明

(c) $\hat{X}$的完备性,

① 一一映上的这个概念见附录1. A1.2 关于映象的一些基本概念. 注意，等距映象一定是内射.（为什么？）

(d) $\hat{X}$的唯一性，除等距的不计外。

概括地说，我们的工作是给X中每个不收敛的 Cauchy 序列指定一个适当的极限，但考虑到有些序列由于它们的项"最终彼此任意接近"它们可能要收敛于同一个极限。我们不应该引入太多的极限。这种直观的想法可以用适当的等价关系这个术语数学地表达［见下面的(1)］。这没有什么不自然，而是根据本节开始提到的有理数直线的完备化过程抽出来的，证明具体过程如下。

(a) 构造$\hat{X}=(\hat{X}, \hat{d})$。设$(x_n)$与$(x_n')$是$X$中的 Cauchy 序列。定义$(x_n)$等价①于$(x_n')$，记为$(x_n)\sim(x_n')$如果

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n')=0.$$

设$\hat{X}$是X的一切 Cauchy 序列的等价类$\hat{x}$，$\hat{y}$，…为元之集。记$(x_n)\in\hat{x}$表示(x_n)是$\hat{x}$中的一元（类$\hat{x}$的一个代表）。现在令

$$(2)\qquad \hat{d}(\hat{x}, \hat{y})=\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),$$

其中$(x_n)\in\hat{x}$而$(y_n)\in\hat{y}$。下证此极限存在。我们有

$$d(x_n, y_n)\leqslant d(x_n, x_m)+d(x_m, y_m)+d(y_m, y_n),$$

从而得到

$$d(x_n, y_n)-d(x_m, y_m)\leqslant d(x_n, x_m)+d(y_m, y_n),$$

交换m与n可得另一相似的不等式，两者结合得

$$(3)\qquad |d(x_n, y_n)-d(x_m, y_m)|\leqslant d(x_n, x_m)+d(y_m, y_n).$$

因为(x_n)与(y_n)均为 Cauchy 序列，可以使右端任意小，则(2)中之极限存在，因$\mathbf{R}$是完备的。

我们必须证明(2)中的极限与代表元素之选择无关。事实上，如果$(x_n)\sim(x_n')$且$(y_n)\sim(y_n')$，则由(1)

$$|d(x_n, y_n)-d(x_n', y_n')|\leqslant d(x_n, x_n')+d(y_n, y_n')\to 0$$

当$n\to\infty$，于是有

① 等价概念的复习见附录1.A1.4.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

我们证明(2)中的 $\hat{d}$ 是 $\hat{X}$ 的一度量。显然 $\hat{d}$ 满足1.1中的 $(M1)$ 以及 $d(\hat{x}, \hat{x})=0$ 和 $(M3)$。此外，

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y})=0 \quad \Rightarrow \quad (x_n)\sim(y_n) \quad \Rightarrow \quad \hat{x}=\hat{y}.$$

于是 $(M2)$ 成立，又由

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, z_n)+d(z_n, y_n),$$

让 $n\to\infty$，则 $(M4)$ 对 $\hat{d}$ 也成立。

(b) 构造等距 $T: X\to W\subset\hat{X}$。对每个 $b\in X$ 对应于类 $\hat{b}\in\hat{X}$ 它含有定常 Cauchy 序列 $(b, b, \cdots)$。这定义了满映射 $T: X\to W$，$W=T(X)\subset\hat{X}$，它由 $b\mapsto\hat{b}=Tb$ 给定。其中 $(b, b, \cdots)\in\hat{b}$。我们看到 T 是一个等距，因为(2)就是

$$\hat{d}(\hat{b}, \hat{c})=d(b, c);$$

这里 $\hat{c}$ 是 (y_n) 的类，其中对一切的 n，$y_n=c$。任何等距都是内射，又因 $T(X)=W$。所以 $T: X\to W$ 是满射。于是 W 与 X 是等距的。（见定义。1.6-1(b)）

下证 W 在 $\hat{X}$ 中稠密。考虑任意 $\hat{x}\in\hat{X}$，设 $(x_n)\in\hat{x}$。对每个 $\varepsilon>0$，存在 N 使得

$$d(x_n, x_N)<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (n>N).$$

设 $(x_N, x_N, \cdots)\in\hat{x}_N$。则 $\hat{x}_N\in W$。由(2)

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_N)=\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

这表明任意 $\hat{x}\in\hat{X}$ 的每个 ε-邻域都含有 W 的一个元。因此 W 在 $\hat{X}$ 中稠密。

(c) $\hat{X}$ 的完备性。设 $(\hat{x}_n)$ 为 $\hat{X}$ 中的任意Cauchy 列，因 W 在 $\hat{X}$ 中稠密，故对每个 $\hat{x}_n$ 存在 $\hat{z}_n\in W$ 使得

$$(4) \qquad \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n)<\frac{1}{n}.$$

因此，由三角不等式

$$\hat{d}(\hat{z}_m,\ \hat{z}_n) \leqslant \hat{d}(\hat{z}_m,\ \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m,\ \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n,\ \hat{z}_n)$$

$$< \frac{1}{m} + \hat{d}(\hat{x}_m,\ \hat{x}_n) + \frac{1}{n}$$

只要 m 与 n 充分大它就可以小于任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $(\hat{x}_m)$ 是 Cauchy 序列。于是得 $(\hat{z}_m)$ 是 Cauchy 序列。由于 $T: X \to W$ 是等距又 $\hat{z}_m \in W$，可得序列 (z_m) 是 X 中的 Cauchy 序列，其中 $z_m = T^{-1}\hat{z}_m$。设 $\hat{x} \in \hat{X}$ 表 (z_m) 所属的等价类，下证 $\hat{x}$ 是 $(\hat{x}_n)$ 的极限。由 (4) 得

$$(5) \qquad \hat{d}(\hat{x}_n,\ \hat{x}) \leqslant \hat{d}(\hat{x}_n,\ \hat{z}_n) + \hat{d}(\hat{z}_n,\ \hat{x})$$

$$< \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{z}_n,\ \hat{x})$$

由于 $(z_m) \in \hat{x}$（见上面）又 $\hat{z}_n \in W$，所以 $(z_n,\ z_n,\ z_n, \cdots) \in \hat{z}$，不等式 (5) 成为

$$\hat{d}(\hat{x}_n,\ \hat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} d(z_n,\ z_m)$$

而右端当 n 充分大时它小于任意给定的 $\varepsilon>0$。从而 $\hat{X}$ 的任意 Cauchy 序列 $(\hat{x}_n)$ 有极限 $\hat{x} \in \hat{X}$，因此 $\hat{X}$ 是完备的。

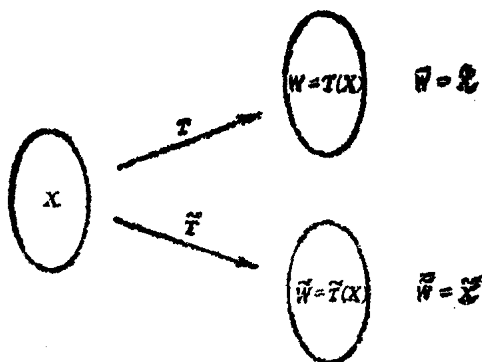


图11　定理1.6-2的证明中(d)部分之说明

(d) 除等距不计而外$\hat{X}$是唯一的。如果$(\tilde{X}, \tilde{d})$是另一完备度量空间它有子空间$\widetilde{W}$在$\tilde{X}$中稠密，而且$\widetilde{W}$与X等距，则对任意$\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$，我们有$\widetilde{W}$中的序列$(\tilde{x}_n)$，$(\tilde{y}_n)$使得$\tilde{x}_n \to \tilde{x}$而$\tilde{y}_n \to \tilde{y}$，于是由

$$|\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \leqslant \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) + \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{y}_n) \to 0$$

[此不等式类似于(3)]得出

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

由于$\widetilde{W}$是等距于$W \subset \hat{X}$且$\overline{\widetilde{W}} = \tilde{X}$，$\tilde{X}$与$\hat{X}$上的距离一定是相同的。因此$\tilde{X}$与$\hat{X}$等距。∎

在下两章中（特别在2.3-2，3.1-5与3.2-3）这个定理对个别不完备空间以及全体这样的空间类都起着基本的作用。

习　题

1. 证明度量空间的子空间Y由有限多个点组成时，Y是完备的。

2. X是全体有理数之集且$d(x,y)=|x-y|$，什么是(X, d)的完备化空间。

3. 离散度量空间X的完备化空间是什么？（见1.1-8）

4. 设X_1与X_2等距而X_1是完备的，证明X_2是完备的。

5. （同胚）同胚是连续的双射映象$T: X \to Y$，其逆映象也是连续的。(*a*)证明如果X与Y等距，则它们是同胚的。(*b*)举例说明完备度量空间与不完备度量空间可以同胚。

6. 证明$C[0, 1]$与$C[a, b]$是等距的。

7. 假如(X,d)完备，证明$(X,\tilde{d})$，这里$\tilde{d}=\dfrac{d}{1+d}$，也是完备的。

8. 证明在7题中，$(X, \tilde{d})$的完备性蕴含着(X,d)的完备性。

9. 如果(x_n)与(x_n')是(X, d)中的序列使得(1)成立且$x_n \to l$，试证明(x_n')收敛并以l为极限。

10. 如果(x_n)与(x_n')是度量空间(X, d)中的收敛序列且有相同的极限l，证明它们满足(1)。

11. 证明(1)在以X的一切Cauchy序列为元素所成之集上定义了一个等价关系。

12. 假如(x_n)是(X, d)中的Cauchy序列，而(x_n')是X中满足(1)的序列，证明(x_n')是X中的Cauchy序列。

13. （伪度量）集X上的伪度量是一个函数d：$X\times X\to \mathbf{R}$满足1.1节$(M1)$，$(M3)$，$(M4)$，以及

$(M2^*)$ $\qquad d(x, x)=0$。

度量与伪度量的区别是什么？试证明$d(x,y)=|\xi_1-\eta_1|$在一切有序实数对上定义了一个伪度量，其中$x=(\xi_1,\xi_2)$，$y=(\eta_1, \eta_2)$（有些作者用半度量一词来代替伪度量）

14. 如果X是(i)$[a,b]$上一切实值连续函数所成之集，(ii)$[a,b]$上一切实值黎曼可积函数之集。

$$d(x, y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt$$

是否定义一个度量或伪度量？

15. 假如(X, d)是伪度量空间，称集

$B(x_0; r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\} \qquad (r>0)$

为以x_0为心和r为半径的开球。（注意这类似于1.3-1）。13题中半径为1的开球是什么？

第 二 章

赋范空间 Banach空间

如果在向量空间上利用范数定义一个度量，就得到特别有用和重要的度量空间，称之为赋范空间。如果它是完备度量空间则称为 Banach 空间。赋范空间，特别是 Banach 空间的理论，以及定义在它们之上的线性算子的理论是泛函分析中高度发展的部分。本章介绍这些理论的基本思想。

重要概念，主要内容方向摘要

赋范空间（见2.2-1）是由范数定义了度量的向量空间（见2.1-1）；范数是平面或三维空间中向量长度的推广．Banach 空间（见2.2-1）是完备的赋范空间。赋范空间的完备化空间是 Banach 空间（见2.3-2）。在赋范空间中也可以定义和使用无穷级数。（见2.3）

从赋范空间X到赋范空间Y内的映象叫做算子，由X到纯量域**R**或**C**的映象叫做泛函。特别重要的是所谓有界线性算子（见2.7-1）与有界线性泛函（见2.8-2）。因为它们是连续的又可利用向量空间结构的优点。事实上，定理2.7-9指明线性算子是连续的当且仅当它是有界的，这是一个基本结果，向量空间在这里之所以重要，主要因为在它们上面有线性算子和泛函。

从给定的赋范空间X到给定的赋范空间Y内的一切有界算子

所成之集可以构成赋范空间(见2.10-1)，表作$B(X,Y)$，这是基本的结果。类似地，X上的一切有界线性泛函所成之集也构成赋范空间，叫做X的对偶空间X'（见2.10-3）。

在泛函分析中，无限维赋范空间比有限维的更为重要，后者要简单一些（见2.4，2.5）。有限维空间上的算子可以用矩阵表示（见2.9）。

符号说明

用X，Y表空间，用大写字母表算子（多用T），x关于T的象记为Tx（不用加括号），用小写字母表泛函（多用f），x关于f的数值（用括号）记为$f(x)$。这些符号都是广为使用的。

2.1 向量空间

向量空间在数学的许多分支及其应用中都有重要作用。事实上，许多实际（以及理论）问题中，有一个集合X，它的元素可能是三维空间中的向量，或者数列，或者是函数，而这些元素可以按通常方式相加或乘以常数，其结果仍是X中的元素。这种具体的背景提出了下面的向量空间的定义。此定义涉及一个一般的域K，但在泛函分析中，K是**R**或**C**。K的元素叫做纯量，在我们的情况下它们是实数或复数。

2.1-1 定义（向量空间） 域K上的向量空间（或线性空间）是由元素x，y，…（称为向量）组成的非空集合，具有两种代数运算分别称之为加法和向量乘以纯量，即乘以域K中之元素。

向量加法 使每一有序对向量（x，y）对应于一向量$x+y$，叫做x与y之和，使以下性质成立①：向量加法是交换的与结合

① 熟悉群论的读者可以看出向量加法与乘法的性质说明X是加法的abelian群。

的，即，对一切向量我们有

$$x+y=y+x$$

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

此外，存在一向量0，称为零向量，又对每个x存在向量$-x$，使得对一切向量我们有

$$x+0=x,$$

$$x+(-x)=0.$$

乘以纯量　使每个向量x与纯量α对应一向量αx（也记为$x\alpha$），叫做α与x的积，使得对一切向量x，y与纯量α，β我们有

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,$$

$$1x=x,$$

以及分配律

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,$$

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x.$$

由定义可见，向量加法是映象$X\times X\to X$，而乘以纯量是映象$K\times X\to X$.

K叫做向量空间X的**纯量域**（或系数域），当$K=\mathbf{R}$（实数域）时X称为**实向量空间**，当$K=\mathbf{C}$（复数域①）X叫做**复向量空间**。

用0既表纯量0，又表零向量一般不会引起混淆，如果需要区分，可以用θ表零向量.

读者可以证明对一切向量与纯量

(1a)　　$0x=\theta$

(1b)　　$\alpha\theta=\theta$

① 回忆R与C也分别表示实直线和复平面（见1.1-2与1.1-5）. 但不必用别的字母，因为不会引起混淆.

以及

(2) $(-1)x=-x$。

例

2.1-2 空间$\mathbf{R}^n$ 这是1.1-5介绍的Euclidean空间，其基本集的元素是一切有序的实数n元组，记为$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$，等等，现在按照通常方式定义了两个代数运算

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \cdots, \xi_n+\eta_n),$$
$$\alpha x=(\alpha\xi_1, \cdots, \alpha\xi_n) \qquad (\alpha\in\mathbf{R}),$$

显然，我们看出它是实向量空间。

以下每个（以前所定义的）空间都是向量空间，它们都有相似的性质。

2.1-3 空间$\mathbf{C}^n$ 这是1.1-5定义的空间，它由一切有序复数n元组，$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$，等等所组成，按照上例定义它的代数运算，它就是复向量空间，其中$\alpha\in\mathbf{C}$。

2.1-4 空间$C[a,b]$ 这是1.1-7定义的空间。空间中的每个点是$[a, b]$上的实值连续函数。按通常方式为定义代数运算：

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t)$$
$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t) \qquad (\alpha\in\mathbf{R}),$$

则它是一个实向量空间。事实上，当x，y是$[a,b]$上的实值连续函数而α是实数时，$x+y$与αx都是$[a, b]$上的实值连续函数。

别的重要的函数向量空间是(a)在1.2-2的向量空间$B(A)$，(b) $\mathbf{R}$上的一切可微函数的向量空间，(c)在$[a, b]$上一切依某种意义可以积分的实值函数的向量空间。

2.1-5 空间l^2 1.2-3介绍过这个空间，它是按通常的序列的代数运算定义得来的向量空间，即，

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots,) + (\eta_1, \eta_2, \cdots) = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots)$$

$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots).$$

事实上，$x=(\xi_j)\in l^2$ 与 $y=(\eta_j)\in l^2$ 蕴含 $x+y\in l^2$，这很容易由1.2(12)的 Minkowski 不等式得出；又显然 $\alpha x\in l^2$.

别的向量空间有 1.1-6的l^∞, 1.2-3的l^p，其中$1\leqslant p<+\infty$，还有 1.2-1 中的 s，都按通常序列的代数运算来定义空间的两个代数运算.∎

向量空间X的**子空间**是X的非空子集Y，使得对一切 $y_1, y_2\in Y$ 与一切纯量α，β 我们有 $\alpha y_1+\beta y_2\in Y$. 因此$Y$本身是一个向量空间，它的两个代数运算是$X$导出来的.

X的一个特别子空间是非真子空间 $Y=X$. 而 $X(\neq\{0\})$的其它的每个子空间都叫真子空间.

任一向量空间X的一个特别的子空间是$Y=\{0\}$.

向量空间X的向量 $x_1, \cdots, x_m$ 的**线性组合**是如下的表示式

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_m x_m,$$

其中系数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是任意的纯量.

对任意非空子集$M\subset X$，M中向量的一切线性组合称为M的**生成**，记为

$$\operatorname{span} M.$$

显然，这是X的一个子空间Y，称Y是由M**生成**的或**产生**的.

我们将介绍两个有关的重要概念它们将一再被用到.

2.1-6 定义（线性无关，线性相关） 向量空间 X 的向量 $x_1, \cdots, x_r$ 所成之集M ($r\geqslant 1$) 的线性无关性与线性相关性由方程

$$(3) \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0$$

定义，其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 都是纯量。显然 (3) 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ 时是成立的。如果这是使(3)成立的唯一的r个纯量，则称M是线性无关的，如果M不是线性无关的，即，如果(3)对有r个不全为零的纯量组也成立，称M是线性相关的。

又X的任意子集M称为是线性无关的，如果M的每个非空有限子集是线性无关的。M称为是线性相关的，如果M不是线性无关的。▮

线性相关这个术语是根据以下事实得来的。如果$M=\{x_1, \cdots, x_r\}$是线性相关的，M中至少有一个向量可以表成其它向量的线性组合；例如，如果(3)对 $\alpha_r \neq 0$ 成立，则M是线性相关的且可由(3)解出 x_r，得到

$$x_r = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{r-1} x_{r-1} \qquad (\beta_j = -\alpha_j / \alpha_r).$$

我们可以用线性相关与无关的概念定义向量空间的维数如下。

2.1-7 定义（有限维与无限维向量空间） 向量空间 X 叫做有限维的如果有一个正整数n使得X含有n个向量的线性无关组，而任意 $n+1$ 个向量或者更多的向量组都是线性相关的。n叫做X的维数，记 $n = \dim X$。按此定义，$X = \{0\}$是有限维的且 $\dim X = 0$。如果X不是有限维的，那它叫做无限维的。▮

在泛函分析中，无限维向量空间远比有限维的有兴趣。例如，$C[a, b]$与l^2 就是无限维的，而$\mathbf{R}^n$与$\mathbf{C}^n$是有限维的。

如果 $\dim X = n$，向量空间X的任一线性无关的n个向量的组称为 X 的一个**基**（或X中的一个基）。如果$\{e_1, \cdots, e_n\}$是X的一个基，每个 $x \in X$可以唯一地表为这些基向量的线性组合：

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

例如$\mathbf{R}^n$的一个基是

$$e_1=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$
$$e_2=(0,\ 1,\ 0\ \ \cdots,\ 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)$$

这个基通常称为$\mathbf{R}^n$的典则基。

更一般地，如果X是任一向量空间，不必有限维，而B是X的线性无关子集它生成X，则B称为X的一个基（或Hamel基）。因此如果B是X的一个基，则每个非零$x\in X$都可唯一表成B中元素（有限多个元素！）以非零纯量为系数的线性组合。

每个向量空间$X\neq\{0\}$有一个基。

对有限维空间的情形这是显然的。对任意的无限维向量空间，用 Zorn 引理可以证明其存在性。这个引理涉及几个概念，要解释它要花一些时间，而目前还有许多对我们来说更重要的事情。我们把这个存在性的证明推后到 4.1 节。在那里为了别的目的我们必须介绍 Zorn 引理。

我们指出，对一给定的向量空间X，（有限维或者无限维）它的一切的基有相同的基数。（它的证明要用到集论中更高级的工具；见 M. M. Day(1973)，p.3)。这个数叫做空间X的维数。注意这包括和推广了定义 2.1-7。

稍后，我们将用到以下的简单定理。

2.1-8 定理（子空间的维数） 设X是n维向量空间．则X的任一真子空间Y的维数小于n.

证明．如果$n=0$，则$X=\{0\}$且没有真子空间，如果$\dim Y$

$=0$，则 $Y=\{0\}$，而 $X\neq Y$ 则 $\dim X\geqslant 1$．显然 $\dim Y\leqslant\dim X=n$．如果 $\dim Y$ 是 n，则 Y 有一具 n 个元素的基，它也就是 X 的基，因为 $\dim X=n$，所以 $X=Y$．这证明 Y 中任一线性无关向量组的向量个数少于 n 个．因此 $\dim Y<n$．▮

习　　题

1．证明全体实数之集关于通常的加法和乘法构成一维实向量空间，而全体复数之集则构成一维复向量空间．

2．证明(1)与(2)．

3．叙述 $\mathbf{R}^3$ 中 $M=\{(1,1,1),(0,0,2)\}$ 的生成．

4．下述的 $\mathbf{R}^3$ 中的子集，那些是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间？[这里，$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$]．

(a) $\xi_1=\xi_2$ 和 $\xi_3=0$ 的一切 x．

(b) $\xi_1=\xi_2+1$ 的一切 x

(c) ξ_1、ξ_2、ξ_3 都是正数的一切 x．

(d) $\xi_1-\xi_2+\xi_3=\kappa=$ 常数的一切 x．

5．证明 $\{x_1,\cdots,x_n\}$，其中 $x_j(t)=t^j$，是空间 $C[a,b]$ 中的线性无关组．

6．证明在 n 维向量空间 X 中，任意 $x\in X$ 对于给定的一组基向量 $e_1,\cdots,e_n$ 的线性组合表示式是唯一的．

7．设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是复向量空间 X 的一个基，当视 X 为实向量空间时求出它的一个基．X 在此两种情形的维数各是什么？

8．如果 M 是复向量空间 X 内的线性相关组，当视 X 为实向量空间时 M 仍然是线性相关的吗？

9．在一固定的区间 $[a,b]\subset\mathbf{R}$ 上，考虑所有次数不超过给定 n 的实系数多项式全体和多项式 $x=0$ 组成的集 X（对于 $x=0$ 在通常讨论中不定义它的次数）．证明此 X 对通常的加法和乘以实数，是 $n+1$ 维的实向量空间，求出 X 的一个基，证明如果这些系数是复数，我们可类似地得到复向量空间 $\tilde{X}$，是否 X 是 $\tilde{X}$ 的子空间？

10．如果 Y 与 Z 都是向量空间 X 的子空间，证明 $Y\cap Z$ 是 X 的子空间，但 $Y\cup Z$ 不必是．试举例说明．

11．如果 $M\neq\phi$ 是向量空间 X 的任一子集，证明 M 的生成是 X 的子空间．

12. 证明实二阶方阵全体所成之集X构成一向量空间，X中的零向量是什么？求出X的一个基？定出X的维数。给出X的子空间的例，X的对称矩阵构成一子空间吗？X的所有降秩矩阵呢？

13. （积） 证明同一域上的两个向量空间的笛卡尔积$X=X_1\times X_2$，当定义了两个代数运算

$$(x_1,\ x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2),$$
$$a(x_1,\ x_2)=(ax_1,\ ax_2)$$

时，X是向量空间。

14. （商空间，余维数） 设Y是向量空间X的子空间。元素$x\in X$关于Y的陪集表作$x+Y$，（见图12）定义

$$x+Y=\{v\mid v=x+y,\ y\in Y\}.$$

证明所有不同的陪集构成X的一个划分。

证明在以下规定的代数运算下（见图13.14）

$$(w+Y)+(x+Y)=(w+x)+Y$$
$$a(x+Y)=ax+Y,$$

全体陪集之集是一个向量空间，这个空间叫做商空间（或有时叫做因子空间）并记为X/Y。它的维数叫做Y的余维数并记为codim Y，即

$$\operatorname{codim} Y=\dim\ (X/Y).$$

15. 设$X=\mathbf{R}^3$而$Y=\{(\xi_1,0,0)\mid\xi_1\in\mathbf{R}\}$。求$X/Y,X/X,X/\{0\}$。

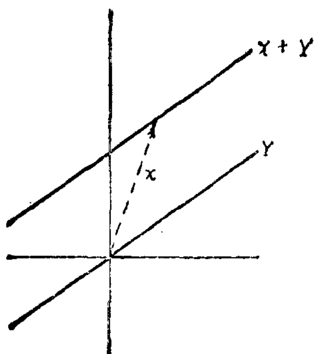


图12 $x+Y$的图示（见14题）

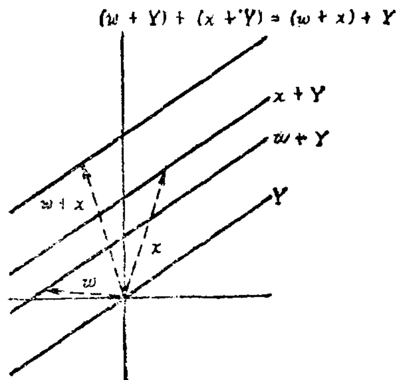


图13 商空间中向量加法的图示（见14题）

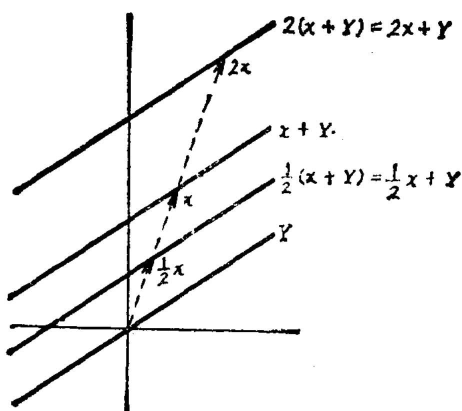


图14 商空间中乘以纯量的说明

2.2 赋范空间·Banach空间

从上节的例中说明，在许多情形下，向量空间X同时又是度量空间．因为X上又定义了度量d．然而，如果代数结构与度量之间没有关系，就不能得到将此二者结合的有用的理论，为保证X上“代数的”和“几何的”性质之间的这种关系，在X上我们定义如下的一个特殊的度量d．首先我们引进辅助概念，就是范数，（定义见下）它用到向量空间的代数运算，然后，利用范数得到我们所要求的那种度量d．这种思想引出了赋范空间的概念，结果发现，赋范空间是够特殊的，它能为产生丰富而有兴趣的理论提供基础，但它又非常之一般，能包括许多有实际重要意义的具体模型．事实上，泛函分析中大量的度量空间可以视为赋范空间，所以赋范空间也许是泛函分析中最重要的一种空间，起码从今天应用的观点可以这么说．以下是其定义：

2.2-1 定义(赋范空间，Banach 空间) 赋范空间[①]X是在

① 也称为赋范向量空间或赋范线性空间，这个定义由 S. Banach(1922)．H. Hahn (1922)与 N. Wiener(1922) 分别独立给出的．此理论得到飞速发展．可以阅读在此十年之后发表的 S. Banach(1932)的一个教程．

它上面定义了范数的向量空间。Banach 空间是完备的赋范空间（空间依范数导出的度量是完备的；见下面的(1)）。这里，向量空间X（实的或复的）上的范数是X上的实值函数它在点$x \in X$的值表作

$$\|x\| \qquad \text{（读作“}x\text{的范数”）}$$

且具有性质

(N1) $\|x\| \geqslant 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(N4) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ （三角不等式）；

这里x与y是X中任意向量而α是纯量。

X上的范数定义了X上的一度量，它由

$$(1) \qquad d(x, y) = \|x-y\| \qquad (x, y \in X)$$

给出，并称为由范数导出的度量。这样定义的赋范空间表作$(X, \|\cdot\|)$或者就简记为X. ▌

范数的性质$(N1)$至$(N4)$是由初等向量代数中向量x的长度$|x|$抽象出来的，所以回到这种情形时可以写成$\|x\| = |x|$。事实上，除零向量的长度为零外，$(N1)$与$(N2)$说明一切向量有正的长度。$(N3)$表示当一向量乘以纯量后，它的长度就是该向量的长度乘以纯量的绝对值。$(N4)$的说明见图 15. 它表示三角形一个边的长度不超过其它两个边长度之和。

很容易由$(N1)$至$(N4)$得出(1)确实定义了一个度量。因此，赋范空间与 Banach 空间都是度量空间。

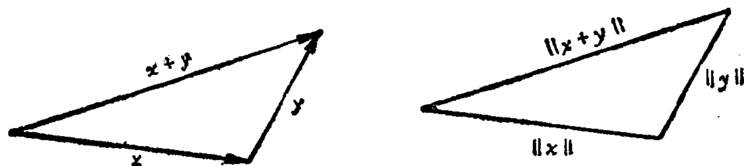


图15 $(N4)$三角不等式的图示

Banach 空间具有某些不完备的赋范空间所不具备的性质（将在 4 章讨论），所以它很重要。

为了今后的使用，我们注意$(N4)$蕴含

$$(2) \qquad \big|\|y\|-\|x\|\big| \leqslant \|y-x\|,$$

读者容易证明（见 3 题）。公式(2)蕴含一个关于范数的重要性质：

范数是连续的，即，$x \mapsto \|x\|$是$(X, \|\cdot\|)$映到$\mathbf{R}$（见1.3-3）内的连续映象。

赋范空间的原型是大家熟悉的平面及三维空间中一切向量所成的空间。进一步的例子由1.1节和1.2节给出。因这两节的一些度量空间可以自然地构成赋范空间。然而在本节的后面，我们将看到不是向量空间的每个度量都可以从范数得到。

例

2.2-2 Euclidean 空间$\mathbf{R}^n$和酉空间 $\mathbf{C}^n$ 这些空间在1.1-5已定义。现由

$$(3) \qquad \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$$

定义范数，它们是 Banach 空间。事实上，$\mathbf{R}^n$与$\mathbf{C}^n$是完备的（见1.5-1），而(3)产生1.1节(7)中的度量：

$$d(x, y) = \|x-y\| = \sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n-\eta_n|^2}.$$

特别，我们注意在$\mathbf{R}^3$里，我们有

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

这证实了我们前面的注释，范数推广了向量长度这个基本概念。

2.2-3 空间 l^p 此空间在1.2-3已定义。当范数由

(4) $$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{1/p}$$

定义时，它是 Banach 空间。事实上，这个范数导出 1.2-3 的度量

$$d(x,\ y)=\|x-y\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^p\right)^{1/p}.$$

1.5-4已证明过它的完备性。

2.2-4 空间 l^∞ 此空间在 1.1-6 已定义。它是Banach空间。因它的度量由下式定义的范数

(4) $$\|x\|=\sup_j|\xi_j|$$

导出，而完备性在 1.5-2 已证明过。

2.2-5 空间 C[a, b] 此空间在1.1-7已定义。它是 Banach 空间，范数由

(5) $$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|$$

定义，其中 $J=[a,\ b]$。完备性在 1.5-5 已证明过。

2.2-6 不完备赋范空间 从 1.5-7，1.5-8 与 1.5-9 的不完备度量空间，很容易得出不完备的赋范空间。例如，1.5-9 中的度量就是由下式定义的范数

(b) $$\|x\|=\int_0^1|x(t)|dt$$

所导出的。每个不完备的赋范空间是否都可以完备化呢？作为度量空间按1.6-2 当然可以。但是，向量空间的运算和范数都可以延拓到完备化空间上吗？在下节将看到延拓的确是可行的。

2.2-7 一个不完备的赋范空间和它的完备化$L^2[a,b]$ 闭区间$[a, b]$上一切实值连续函数所组成的向量空间构成一赋范空间，其范数定义为

$$(7)\qquad \|x\|=\left(\int_a^b x(t)^2dt\right)^{1/2}.$$

这个空间是不完备的，例如，如果$[a, b]=[0, 1]$，1.5-9内的序列在现在的空间X中也是 Cauchy 序列；这从1.5节图10清楚地看出，而且由以下积分正式推出。因为当$n>m$，我们有

$$\|x_n-x_m\|^2=\int_0^1[x_n(t)-x_m(t)]^2dt=\frac{(n-m)^2}{3mn^2}$$

$$<\frac{1}{3m}-\frac{1}{3n}.$$

这个Cauchy序列不收敛。其证明与1.5-9相同，只要将1.5-9中的度量换成现在的度量。对于一般的区间$[a,b]$，可以建立一个在X中不收敛的类似的Cauchy序列。

此空间X按定理1.6-2可以完备化。其完备化空间表为$L^2[a, b]$。这是一个 Banach 空间。事实上，X上的范数和向量空间上的算子可以延拓到X的完备化空间上。在下节的定理2.3-2我们将看到这个事实。

更一般地，对任意实数$p\geqslant 1$，Banach空间

$$L^p[a,b]$$

是$[a,b]$上一切实值连续函数所组成的赋范空间的完备化。和前面一样此范数定义为

$$(8)\qquad \|x\|_p=\left(\int_a^b |x(t)|^pdt\right)^{1/p}.$$

附标p提示我们这个范数依赖于p的选取，它是保持固定的。注意当$p=2$时这就成为(7)。

对于熟悉Lebesque积分的读者，我们要指出，利用$[a,b]$上的Lebesque可测函数x和Lebesque积分，x合于$|x|^p$在$[a,b]$的Lebesque积分存在并有限，则$L^p[a,b]$可以直接得出。$L^p[a,b]$是由那些函数的等价类所组成，当$|x-y|^p$在$[a,b]$上的Lebesque积分为零时x就与y等价。[注意这保证了公理$(N2)$为真]

读者如不具有这个背景知识也无妨，事实上，这个例子对今后本教材的学习不是必不可少的。但归根结底，此例说明这个完备化空间可以引出一类新元素，因而人们必需弄清它们的性质。

2.2-8 空间 s 是否向量空间上的每个度量都可以从范数得出？答案是否定的。1.2-1中给出了一个反例。事实上，s 是一个向量空间，但由下式定义的度量d

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}$$

就不能从范数得到。这立即可从下面的引理看出。该引理说明从范数引出的度量 d 有两条基本性质，第一条性质，如(9a) 所表示的，称为d的平移不变性。

2.2-9 引理（平移不变性） 赋范空间X上由范数导出的度量d满足

(9)
$$(a)\quad d(x+a,y+a)=d(x,y)$$
$$(b)\quad d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|d(x,y)$$

对一切$x,y,a\in X$与每个纯量α成立。

证明．我们有

$$d(x+a,y+a)=\|x+a-(y+a)\|=\|x-y\|=d(x,y)$$

和

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x - y\| = |\alpha| d(x, y).$$

习　　题

1. 证明x的范数$\|x\|$是x到0的距离。

2. 验证平面上和三维空间中向量按通常意义的长度具有范数的性质($N1$)至($N4$)。

3. 证明(2)。

4. 证明，可以用

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

代替($N2$)而不改变范数的概念。证明范数的非负性也可以从($N3$)与($N4$)得出。

5. 证明(3)定义一范数。

6. 设X为一切有序实数对$x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$所成的向量空间。证明以下都定义X上的范数：

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$$

$$\|x\|_2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}.$$

7. 验证(4)满足($N1$)到($N4$)。

8. 数的有序n元组所成的向量空间（见2.2-2）有几个范数有实际重要性，它们定义为

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| + \cdots + |\xi_n|$$

$$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{1/p} \qquad 1 < p < +\infty$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_1|, \cdots |\xi_n|\}.$$

对每种情形，验证($N1$)到($N4$)是满足的。

9. 验证(5)定义了范数。

10. （单位球面）赋范空间X中的球面

$$S(0; 1) = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$$

称为单位球面，试对6题中的范数以及如下定义的范数

$$\|x\|_4 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{1/4}$$

指出它们的单位球面，这些单位球面的图形如图16。

11. （凸集，线段）向量空间的子集A称为是凸的，如果$x, y \in A$蕴含

$$M = \{z \in X \mid z = \alpha x + (1 - \alpha) y, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\} \subset A$$

M称为有边界点x和y的闭线段，证明赋范空间X的闭单位球

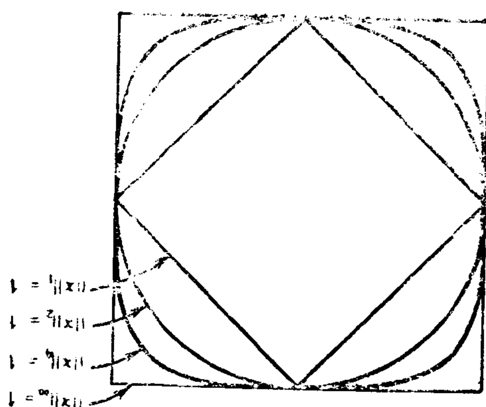


图 16

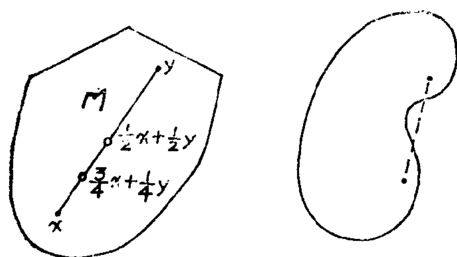


图17　凸集与非凸集的图示

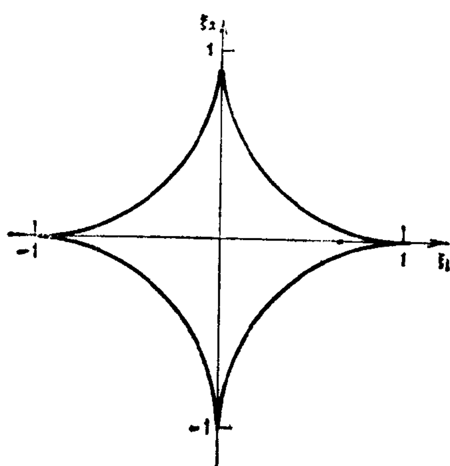


图18　12题中的曲线 $\varphi(x)=1$

$$\tilde{B}(0;1)=\{x\in X \mid \|x\|\leqslant 1\}$$

是凸的。

12．利用11题证明

$$\varphi(x)=(\sqrt{|\xi_1|}+\sqrt{|\xi_2|})^2$$

在一切有序实数对所成的向量空间X上不定义范数，这里$x\in X$，$x=(\xi_1, \xi_2)$。画出曲线$\varphi(x)=1$，将它与图18比较。

13．证明向量空间$X\neq\{0\}$的离散度量不可能由范数得出．（见1.1-8.）

14．如果d是向量空间$X\neq\{0\}$的度量，它是由一范数导出的，而$\tilde{d}$定义为

$$\tilde{d}(x,x)=0,\ \tilde{d}(x,y)=d(x,y)+1 \qquad (x\neq y),$$

证明$\tilde{d}$不可能由范数得出。

15．（有界集）证明赋范空间X的子集M是有界的，当且仅当存在一正数c合于$\|x\|\leqslant c$对一切$x\in M$成立。（有界集的定义见1.2节第6题）

2.3 赋范空间的进一步性质

根据定义，赋范空间X的子空间Y是将Y看作向量空间X的子空间，将X上的范数限制在子空间Y上而得到。Y上的这个范数称为是由X上的范数所导出的范数。如果Y在X中闭，则Y叫做X的闭子空间。

由此定义，一个Banach空间X的子空间Y是将X看作赋范空间时的子空间。因此不要求Y是完备的（但有的作者作这样的要求，因此读各有关的书时应当细心）。

就此而论，定理1.4-7很有用，因它立即产生以下定理。

2.3-1定理（Banach空间的子空间） Banach空间X的子空间Y是完备的当且仅当Y是X的闭子集。

以下的赋范空间的序列的**收敛性**及有关概念，很容易从关于度量空间的相应的定义1.4-1及1.4-3和现在的事实$d(x,y)=\|x-$

$y\|$推导出来：

(i) 赋范空间X的序列(x_n)是收敛的如果X含有一x使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0.$$

这时我们写成$x_n\to x$并称x是(x_n)的极限。

(ii) 赋范空间中的序列(x_n)是Cauchy序列如果对每个$\varepsilon>0$存在N使得

(1) $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$ 对一切$m,n>N$。

即使在一般的度量空间里，序列对我们也非常有用。在赋范空间中我们还可大进一步，用到如下的级数。

和在微积分中的方法相似，现在可以定义**无穷级数**。事实上，如果(x_k)是赋范空间X的序列，对于(x_k)我们有一部分和的序列(s_n)

$$s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

其中$n=1,2,\cdots$。如果(s_n)是收敛的，比如说

$$s_n\to s, \text{ 即，} \|s_n-s\|\to 0,$$

则此无穷级数（简称级数）

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty}x_k=x_1+x_2+\cdots$$

叫做收敛级数或叫做是收敛的，s称为级数的和并记为

$$s=\sum_{k=1}^{\infty}x_k=x_1+x_2+\cdots.$$

如果$\|x_1\|+\|x_2\|+\cdots$收敛．级数(2)称为**绝对收敛**．然而请读者当心，在赋范空间X中，绝对收敛蕴含收敛的充要条件是X完备．（见7至9题）

级数的收敛性概念可用以定义如下的基．如果赋范空间X含

有一序列(e_n)，对每个$x\in X$存在唯一的纯量序列(α_n)使得

$$(3)\qquad \|x-(\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n)\|\to 0\qquad(当n\to\infty)$$

则(e_n)叫做X的Schauder基（或基）。这种以x为其和的级数叫做x关于e_n的展式。记成

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_ke_k.$$

例如，2.2-3中的l^p有Schauder基，就是(e_n)，这里$e_n=(\delta_{nj})$，它是第n项为1其它的项为零的序列，具体写出来就是

$$(4)\qquad \begin{aligned} e_1&=(1,0,0,0,\cdots)\\ e_2&=(0,1,0,0,\cdots)\\ e_3&=(0,0,1,0,\cdots)\end{aligned}$$

等等。

如果赋范空间X有Schauder基，则X是可分的（见定义1.3-5）。证明很容易，留给读者去作。（第10题）。反过来，是否每个可分Banach空间有Schauder基？这是Banach本人在四十年前提出的著名问题。几乎一切已知的Banach空间都有Schauder基。然而，令人惊奇的是此问题的答案是否定的，这个问题由P.Enflo（1973）在最近才解决。他作出了一个没有Schauder基的可分Banach空间。

最后，我们回到赋范空间完备化这个问题，在上节已经概括地提到它。

2.3-2 定理（完备化） 设$X=(X,\|\cdot\|)$是一赋范空间。则存在一个Banach空间$\hat{X}=(\hat{X},d)$和一个等距映象A: $X\to W=A(X)$，这里W在$\hat{X}$中稠密，除等距不计外，空间$\hat{X}$是唯一的。

证明．定理1.6-2蕴含存在一个完备度量空间$\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$和一个等距映象$A: X\to W=A(X)$，这里$W$在$\hat{X}$中稠密．除等距不计外，此$\hat{X}$还是唯一的．（我们记成$A$而不用在1.6-2中的$T$，是为了在以后8.2节的定理中用$T$这个字母）．因此，要证明本定理，必须使$\hat{X}$成为一向量空间，然后引进合适的范数．

为了在$\hat{X}$上定义向量空间的两个代数运算，考察任意$\hat{x},\hat{y}\in\hat{X}$和任意的代表$(x_n)\in\hat{x}$与$(y_n)\in\hat{y}$．请回忆$\hat{x},\hat{y}$，都是表$X$中Cauchy序列的等价类．命$z_n=x_n+y_n$．则$(z_n)$是$X$中的Cauchy列，因为

$$\|z_n-z_m\|=\|x_n+y_n-(x_m+y_m)\|\leqslant\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|.$$

定义$\hat{x}$与$\hat{y}$的和$\hat{z}=\hat{x}+\hat{y}$是以(z_n)为代表的等价类，于是$(z_n)\in\hat{z}$．这个定义与$\hat{x},\hat{y}$中的Cauchy序列的选择无关，事实上，1.6中的(1)式证明了，如果$(x_n)\sim(x_n')$与$(y_n)\sim(y_n')$，则$(x_n+y_n)\sim(x_n'+y_n')$，因为

$$\|x_n+y_n-(x_n'+y_n')\|\leqslant\|x_n-x_n'\|+\|y_n-y_n'\|.$$

类似地，定义纯量α与$\hat{x}$的积$\alpha\hat{x}\in\hat{X}$为(αx_n)是其代表的等价类，这个定义仍与$\hat{x}$中的代表元的选择无关．又定义$\hat{X}$中的零元素是含收敛于零的一切Cauchy序列的等价类．不难看出，这两个代数运算具有使$\hat{X}$成为向量空间的所需的一切性质．所以$\hat{X}$是一向量空间．从定义得出，在W上由$\hat{X}$导出的向量空间的运算与按映象A，从X中导出的那些运算是一致的．

而且，A在W上导出一个范数$\|\cdot\|_1$，它在每一点$\hat{y}=Ax\in W$处的值是$\|\hat{y}\|_1=\|x\|$．因为A是等距的，所以W上相应的度量是$\hat{d}$在W上的限制．对每个$\hat{x}\in\hat{X}$按$\|\hat{x}\|_2=\hat{d}(\hat{0},\hat{x})$将范数$\|\cdot\|_1$延拓到$\hat{X}$上．显然$\|\cdot\|_2$满足2.2中的$(N1)$，$(N2)$．其余的$(N3)$与$(N4)$可以从$\|\cdot\|_1$取极限而得到．

习　　题

1. 证明$c\subset l^{\infty}$是l^{∞}的向量子空间（见1.5-3），同样地，c_0也是l^{∞}的向量子空间，它由一切收敛于零的纯量序列所组成。

2. 证明1题中的c_0是l^{∞}的闭子空间，于是由1.5-2与1.4-7，c_0是完备的。

3. 在l^{∞}中，设Y是由一切只有有限个非零的项的序列所成之集。证明Y是l^{∞}的子空间但不是闭子空间。

4. （**向量空间运算的连续性**）证明，在赋范空间X中，向量加法与乘以纯量对于范数来说是连续的；即，由$(x,y)\to x+y$与$(\alpha,x)\to\alpha x$定义的映象是连续的。

5. 证明，$x_n\to x$与$y_n\to y$蕴函$x_n+y_n\to x+y$，又$\alpha_n\to\alpha$与$x_n\to x$蕴含$\alpha_n x_n\to\alpha x$。

6. 证明，赋范空间X的子空间Y，其闭包$\bar{Y}$仍是一向量空间。

7. （**绝对收敛**）证明，$\|y_1\|+\|y_2\|+\|y_3\|+\cdots$收敛不必蕴含$y_1+y_2+y_3+\cdots$收敛。提示，考察3题的$Y$和$(y_n)$，这里$y_n=(\eta_j^{(n)})$，$\eta_n^{(n)}=\frac{1}{n^2}$，$\eta_j^{(n)}=0$对一切$j\neq n$。

8. 如果在赋范空间X中，任意级数如果绝对收敛则此级数收敛，证明X是完备的。

9. 证明在Banach空间中，绝对收敛级数是收敛级数。

10. （**Schauder基**）证明，如果赋范空间有一Schauder基，则它是可分的。

11. 证明，(e_n)，其中$e_n=(\delta_{nj})$，是l^p的Schauder基，$(1\leqslant p<+\infty)$。

12. （**半范数**）向量空间X上的半范数是一个映象p: $X\to R$满足2.2中的$(N1)$，$(N3)$，$(N4)$。（有些作者称此为伪范数。）证明

$$p(0)=0$$
$$|p(y)-p(x)|\leqslant p(y-x)$$

（因此，如果$p(x)=0$蕴含$x=0$，则p是范数）

13. 证明，在12题中，使$p(x)=0$的一切$x\in X$构成X的子空间N。且$\|\hat{x}\|_0=p(x)$（这里$x\in\hat{x}$而$\hat{x}\in X/N$）被定义为X/N上一个范数（X/N见2.1节14题）

14. （商空间）设Y是$(X,\|\cdot\|)$的闭子空间．证明由

$$\|\hat{x}\|_0=\inf_{x\in\hat{x}}\|x\|$$定义了X/Y上的范数$\|\cdot\|_0$．

这里$\hat{x}\in X/Y$，即$\hat{x}$是Y的任一陪集．（关于X/Y见2.1节14题）

15. （赋范空间的积）如果$(X_1,\|\cdot\|_1)$与$(X_2,\|\cdot\|_2)$均为赋范空间，证明其乘积向量空间$X=X_1\times X_2$（见2.1节13题）是赋范空间，如果定义范数

$$\|x\|=\max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2) \qquad [x=(x_1,x_2)].$$

2.4 有限维赋范空间及子空间

有限维赋范空间比无限维的赋范空间要简单些吗？在那些方面要简单些？这是颇为自然的问题．这些问题又很重要，因为有限维空间及子空间在许多场合很起作用（例如在逼近理论和谱理论）．因此，探讨一些事实，就这些事实本身以及作为今后工作的工具都是值得的，这就是本节与下一节的纲要．

下面讲的事实都来源于以下引理．它的大意是：对于一组线性无关的向量，不可能求出包含大纯量的线性组合，它表示一个小向量．

2.4-1 引理（线性组合） 设$\{x_1,x_2\cdots,x_n\}$是赋范空间X（任意维）中的一线性无关向量组，则存在数$c>0$使得对每一组纯量$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$我们有

(1) $\|\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\|\geqslant c(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|) \qquad (c>0)$

证明．记$s=|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|$．如果$s=0$，则一切$\alpha_j$是0，于是(1)对任意$c$成立．现令$s>0$，则(1)等价于不等式

(2) $\|\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n\|\geqslant c \qquad \left(\sum_{j=1}^{n}|\beta_j|=1\right)$

其中$\beta_j=\alpha_j/s$，它由(1)除以s得出．因而，只须证明存在$c>0$，使(2)对每一组$\beta_1,\cdots,\beta_n$成立．其中β_j合于$\Sigma|\beta_j|=1$．

设(2)不真，则存在一向量序列(y_m)

$$y_m=\beta_1^{(m)}x_1+\cdots+\beta_n^{(m)}x_n \qquad \left(\sum_{j=1}^{n}|\beta_j^{(m)}|=1\right)$$

使得

$$\|y_m\|\to 0 \qquad 当 m\to\infty.$$

因为，$\Sigma|\beta_j^{(m)}|=1$，则$|\beta_j^{(m)}|\leqslant 1$，因此，对每个固定的$j$，序列

$$(\beta_j^{(m)})=(\beta_j^{(1)}\beta_j^{(2)},\ \cdots)$$

是有界的，因而，按 Bolzano-Weierstrass 定理，$(\beta_1^{(m)})$有收敛子序列，令β_1表此子序列的极限，$(y_{1,m})$表(y_m)的相应的子序列，按同样的推理，$(y_{1,m})$有子序列$(y_{2,m})$，相应的数值子序列$\beta_2^{(m)}$收敛，令β_2表其极限。继续作下去，经过n次之后得(y_m)的一子序列$(y_{n,m})=(y_{n,1},y_{n,2},\cdots)$。

$$y_{n,m}=\sum_{j=1}^{n}r_j^{(m)}x_j \qquad \left(\sum_{j=1}^{n}|r_j^{(m)}|\right)=1$$

其中$r_j^{(m)}\to\beta_j(m\to\infty)$。因此

$$y_{n,m}\to y=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_jx_j \qquad (m\to\infty)$$

这里，$\Sigma|\beta_j|=1$，于是β_j不全为0。因$\{x_1,\cdots,x_n\}$线性无关，于是$y\neq 0$。另一方面，$y_{n,m}\to y$蕴含$\|y_{n,m}\|\to\|y\|$（范数的连续性）。但按假设$\|y_m\|\to 0$，而$(y_{n,m})$是(y_m)的子序列，故必有$\|y_{n,m}\|\to 0$，因此，$\|y\|=0$，于是$y=0$（由 2.2 之 (N2)）。这与$y\neq 0$矛盾。引理得证。▌

作为引理的第一个应用。现证明

2.4-2 定理（完备性） 赋范空间X的每个有限维子空间Y

是完备的。特别，一切有限维赋范空间是完备的。

证明．考虑Y中任意Cauchy 序列（y_m），并证明它在Y中收敛；其极限用y表示．设$\dim Y=n$且$\{e_1,\cdots,e_n\}$是Y的任一个基．则每个y_m有如下之表示式

$$y_m=\alpha_1^{(m)}e_1+\cdots+\alpha_n^{(m)}e_n.$$

由于(y_m)是Cauchy序列，对每个$\varepsilon>0$存在N，使得当$m,r>N$，则$\|y_m-y_r\|<\varepsilon$．据此以及引理2.4-1，有$c>0$，使

$$\varepsilon>\|y_m-y_r\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^{(m)}-\alpha_j^{(r)})e_j\right\|$$

$$\geqslant c\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j^{(m)}-\alpha_j^{(r)}|$$

其中$m,r>N$．除以c得

$$|\alpha_j^{(m)}-\alpha_j^{(r)}|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j^{(m)}-\alpha_j^{(r)}|<\frac{\varepsilon}{c}\qquad(m,r>N)$$

这就证明了n个序列中的每一个

$$(\alpha_j^{(m)})=(\alpha_j^{(1)},\ \alpha_j^{(2)},\cdots)\qquad j=1,\cdots,n$$

是**R**或**C**中的Cauchy序列．因此它收敛；让α_j表其极限．用这n个极限$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$定义

$$y=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n.$$

显然，$y\in Y$．而且

$$\|y_m-y\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^{(m)}-\alpha_j)e_j\right\|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j^{(m)}-\alpha_j|\,\|e_j\|.$$

在右端，$\alpha_j^{(m)}\to\alpha_j$．因此$\|y_m-y\|\to0$，即$y_m\to y$.因为$(y_m)$是$Y$中任意Cauchy序列，这就证明了$Y$是完备的。

从这个定理和定理1.4-7，我们有

2.4-3 定理（闭性） 赋范空间X的每个有限维子空间Y是X中的闭集.

这个定理在今后有好几处要用到.

注意无限维的子空间不必是闭的.

例. 设$X=C[0,1]$而$Y=\text{span}(x_0,x_1,\cdots)$，其中 $x_j(t)=t^j$，所以Y是一切多项式所成之集. Y在X中不闭.（为什么？）

有限维向量空间的另一有趣性质是，X上一切范数引出X上的同一拓扑（见1.3）. 即是，X的开子集是相同的，无论怎样在X上选定特别的范数。具体地说有如下结果.

2.4-4 定义（等价范数） 向量空间X上的范数$\|\cdot\|$叫做等价于X上的范数$\|\cdot\|_0$，如果存在正数a，b使得对一切$x\in X$

$$a\|x\|_0\leqslant\|x\|\leqslant b\|x\|_0. \tag{3}$$

这个概念是由以下事实引出的.

X上的等价范数定义X上的同一拓扑.

事实上，这可由(3)及每个开集是开球的并（见1.3第4题）得出. 正式的证明留给读者（第4题）. 还可以证明，在$(X,\|\cdot\|)$与$(X,\|\cdot\|_0)$中的Cauchy序列是相同的.（第5题）

用引理2.4-1，可证以下定理（无限维空间不成立）.

2.4-5 定理（等价范数）. 有限维向量空间X上的任一范数$\|\cdot\|$都等价于另一范数$\|\cdot\|$。

证明. 设$\dim X=n$，且$\{e_1,\cdots,e_n\}$是X的任一基. 则每个$x\in X$有唯一的表示式

$$x=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n.$$

由引理2.4-1，存在正常数c使得

$$\|x\| \geqslant c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

另一方面，由三角不等式得

$$\|x\|_0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \|e_j\|_0 \leqslant k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|, \qquad k = \max_j \|e_j\|_0,$$

结合此两式，得$a\|x\|_0 \leqslant \|x\|$，其中$a = c/k > 0$. (3) 中的另一不等式可在上面的推证中交换$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_0$的作用而得到. ▌

这个定理相当重要。例如，它证明有限维空间的序列的收敛性或发散性不依赖于该空间范数的特殊选择。

习　　题

1. 给出在l^∞和l^2中不是闭的子空间的例。
2. (1)式中最大的c是什么？如果：$X = \mathbf{R}^2$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$. 如果：$X = \mathbf{R}^3$, $x_1 = (1,0,0)$ $x_2 = (0,1,0)$, $x_3 = (0,0,1)$.
3. 证明在定义2.4-4中，等价关系的公理成立. (见附录 1之$A1.4$)
4. 证明在向量空间X上的等价范数导出X上相同的拓扑。
5. 如果$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_0$是X上的等价范数，证明在空间 $(X, \|\cdot\|)$ 与 $(X, \|\cdot\|_0)$上的Cauchy序列是相同的。

6. 定理2.4-5蕴含，2.2之8 题中$\|\cdot\|_2$与$\|\cdot\|_\infty$是等价的。给出此事实的直接证明。

7. 设$\|\cdot\|_2$如2.2中第8 题所规定，又设$\|\cdot\|$为该向量空间X之任一范数，直接证明（不用2.4-5）存在$b > 0$，使得$\|x\| \leqslant b\|x\|_2$对一切x成立。

8. 证明2.2中第8题之范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$满足

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$$

9. 如果向量空间X的范数$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_0$是等价的，证明(i)$\|x_n - x\| \to 0$蕴涵$\|x_n - x\|_0 \to 0$（倒过来也一样，这是当然的）.

10. 证明 一切复$m \times n$矩阵$A = (\alpha_{jk})$，m与n固定时，构成一mn维向量空间Z。证明Z上一切范数等价。对于现在的空间Z、类似于2.2之第8题的范数$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$与$\|\cdot\|_\infty$应该是什么？

2.5 紧性和有限维

有限维赋范空间和子空间的另一些基本性质同紧性概念有关。

2.5-1 定义(紧性) 度量空间X叫做紧的①，如果对X中每一序列有收敛子序列。X的子集M叫做紧的，如果M作为X的子空间是紧的，即是，对M中每一序列有收敛子序列，它的极限是M中的元。∎

紧集的一般性质是

2.5-2 引理(紧性) 度量空间的紧子集M是闭集且有界。

证明。对每个$x\in\overline{M}$，存在M中一序列(x_n)使得$x_n\to x$，（见1.4-6(a)）因M是紧的，$x\in M$。因此，由于$x\in\overline{M}$的任意性M是闭的，现证M有界，如果M无界，它必含无界序列(y_n)使$d(y_n,b)>n$。这里b是任意固定的元素。这个序列不可能有收敛子序列，因为，据引理1.4-2知收敛序列必有界。∎

该引理的逆一般说来不真。

证明。为证明这个重要事实，考察l^2中的序列(e_n)，其中$e_n=(\delta_{nj})$，其第n项为1而其余的项都是零。（见2.3(4)）这个序列是有界的，因为$\|e_n\|=1$。它的项所成之集是闭的，因为它没有聚点。同理，此点集不是紧的。∎ 离散空间

然而，对有限维赋范空间有

①更确切地说，称为列紧的；这是泛函分析中最重要的一种紧性。我们指出还有别的两种紧性。但在度量空间中，这三个概念是完全等价的，所以我们不加区分。(有兴趣的读者可以参考附录1.A1.5)。

2.5-3 定理（紧性） 在有限维赋范空间X中，任意子集$M\subset X$是紧的当且仅当M闭且有界。

证明．由引理2.5-2，紧性蕴含闭性和有界性．现证其逆．设M闭，有界，$\dim X=n$，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是X的基．考察M中任一序列(x_m)，每个x_m可表作

$$x_m=\xi_1^{(m)}e_1+\cdots+\xi_n^{(m)}e_n,$$

由于M有界，于是(x_m)有界．设$\|x_m\|\leqslant k$，对一切m，由引理2.4-1

$$k\geqslant\|x_m\|=\Big\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{(m)}e_j\Big\|\geqslant c\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(m)}|\quad(c>0)$$

因此数列$(\xi_j^{(m)})$（j固定）是有界的，由Bolzano-Weierstrass定理，有聚点ξ_j，$1\leqslant j\leqslant n$，如同在引理2.4-1那样，我们断定(x_m)有子序列(z_m)收敛于$z=\sum\xi_je_j$．因为M闭，故$z\in M$．这表明M中的任一序列有子序列在M中收敛，因此M紧．∎

上述讨论说明，在$\mathbf{R}^n$中（或其它的有限维赋范空间中）紧子集与闭的有界子集是一回事．所以闭性和有界性可以用来定义紧性．但在无限维赋范空间中不可以这样做．

另外一些有趣的结果，来源于下述的F．Riesz（1918，PP．75-76）引理．

2.5-4 F.Riesz引理 设Y和Z是赋范空间X（任意维）的子空间，又设Y是闭的且是Z的真子空间，则对区间$(0,1)$的每个实数θ，存在$z\in Z$使得

$$\|z\|=1,\quad\|z-y\|\geqslant\theta\ \text{对一切}\ y\in Y.$$

证明．考察任意$v\in Z-Y$，用a表v到Y的距离，即是，（图19），

$$a=\inf_{y\in Y}\|v-y\|.$$

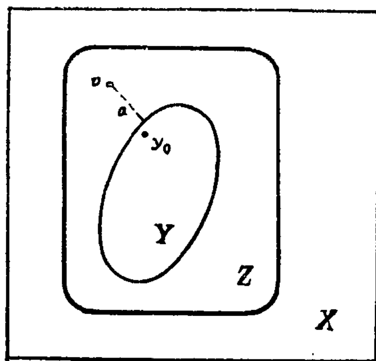


图19 Riesz 引理证明中记号的图示

显然，$a>0$，因为Y闭．现取任意$\theta\in(0,1)$．由下确界的定义，存在 $y_0\in Y$ 它使得

$$(1)\ a\leqslant\|v-y_0\|\leqslant\frac{a}{\theta}$$

（注意$a/\theta>a$，因$0<\theta<1$）．令

$$z=c(v-y_0),$$

其中$c=\dfrac{1}{\|v-y_0\|}$．

则$\|z\|=1$，下证对每个$y\in Y$，$\|z-y\|\geqslant\theta$．事实上我们有

$$\begin{aligned}\|z-y\|&=\|c(v-y_0)-y\|\\&=c\|v-y_0-c^{-1}y\|\\&=c\|v-y_1\|,\end{aligned}$$

这里 $y_1=y_0+c^{-1}y$.

从y_1的表示式可知$y_1\in Y$．因此$\|v-y_1\|\geqslant a$，（由a的定义）．利用(1)得

$$\|z-y\|=c\|v-y_1\|\geqslant ca=\frac{a}{\|v-y_0\|}\geqslant\frac{a}{a/\theta}=\theta.$$

由于$y\in Y$是任意的，引理得证．▌

由定理 2.5-3，在有限维赋范空间中的闭单位球是紧的．反过来，Riesz引理给出以下值得重视和有用的结果．

2.5-5 定理（有限维） 如果赋范空间X的闭单位球$M=\{x\mid\|x\|\leqslant1\}$是紧的，则$X$是有限维的．

证明．设M紧但$\dim X=\infty$，下证这将引出矛盾．任取范数为1的x_1，x_1产生一个X的一维子空间X_1，X_1是闭的(见2.4-3)，且是X的真子空间，因为$\dim X=\infty$．由Riesz引理，存在一个范数为1的$x_2\in X$，使得

$$\|x_2-x_1\|\geqslant\theta=\frac{1}{2}.$$

元素x_1,x_2产生一个X的二维真闭子空间X_2．由Riesz引理，存在一个范数为1的x_3，使得对一切$x\in X_2$有

$$\|x_3-x\|\geqslant\frac{1}{2}.$$

特别，

$$\|x_3-x_1\|\geqslant\frac{1}{2},$$

$$\|x_3-x_2\|\geqslant\frac{1}{2}.$$

按归纳法，得一序列(x_n)，$x_n\in M$使得

$$\|x_m-x_n\|\geqslant\frac{1}{2}\qquad(m\neq n)$$

显然，(x_n)无收敛子列．这与M的紧性矛盾．因此，$\dim X<\infty$．∎

这个定理有各种各样的应用．将在第八章中作为处理所谓紧算子的基本工具．

紧集很重要，因为它具有非常好的性质．它们有些基本性质类似于有限集，而是非紧集所没有的．与连续映象有关的基本性质是紧集有紧象．即

2.5-6 定理（连续映象） 设X与Y为度量空间．T：$X\to Y$是连续映象（见1.3-3）．则X的紧子集M在映象T下，它的象

是紧的。

证明。由紧性的定义只要证明象 $T(M)\subset Y$ 的每一序列在 $T(M)$ 中含收敛子列即可。因为$y_n\in T(M)$，则有某 $x_n\in M$，$y_n=Tx_n$。因为M紧，(x_n) 含在M中收敛的子列 (x_{n_k})，(x_{n_k}) 的象是(y_n)中的子列。因T连续，由1.4-8，(x_{n_k})的象在 $T(M)$ 中收敛。因此$T(M)$是紧的。∎

由此定理推断出以下性质。它是熟知的微积分中连续函数的性质搬到了度量空间的情形。

2.5-7 推论(极大值和极小值) 将度量空间的紧子集 M 映入R的连续映象T，在M的某些点处达到极大值和极小值。

证明. 由定理 2.5-6 知 $T(M)\subset \mathbf{R}$ 是紧的。又由引理 2.5-2 [应用于 $T(M)$] 知是闭的和有界的。所以，$\inf T(M)\in T(M)$，$\sup T(M)\in T(M)$。这两个点的在M中的那些逆象使Tx取极大值或极小值。

习 题

1. 证明$\mathbf{R}^n$与$\mathbf{C}^n$都是非紧的集。
2. 证明由无穷多个点组成的离散度量空间（见1.1-8）不是紧集。
3. 举出平面$\mathbf{R}^2$上紧的曲线与非紧曲线的例。
4. 证明s空间（见 2.2-8）中的无限子集 M是紧的，其必要条件是存在数γ_1，γ_2，…使得对一切$x=(\xi_k(x))\in M$，有$|\xi_k(x)|\leqslant\gamma_k$.（也可以证明，对$M$的紧性，此条件是充分的）
5. （局部紧性） 度量空间X叫做局部紧的，如果X的每个点有一紧邻域。证明$\mathbf{R}$与$\mathbf{C}$，或者更一般地，$\mathbf{R}^n$与$\mathbf{C}^n$是局部紧的。
6. 证明紧度量空间X是局部紧的。

7. 在2.5-4 Riesz 引理中，如果 $\dim Y<\infty$，证明其中的 θ 甚至可以取1.

8. 在2.4节7题，直接证明(不用2.4-5) 存在一个 $a>0$ 使得 $a\|x\|_2\leqslant\|x\|$.（用2.5-7）

9. 如果 X 是紧度量空间且 $M\subset X$ 是闭的，证明 M 是紧的.

10. 设 X 与 Y 是度量空间，X 是紧的，而 $T: X\to Y$ 是双射和连续的. 证明 T 是同胚（见1.6节5题）.

2.6 线性算子

在微积分学中考察的是实直线**R**及**R**上的（或者**R**的子集上的）实值函数. 显然任何这种函数是它的定义域到**R**中的映象①. 在泛函分析中，考察的是更一般的空间，诸如度量空间与赋范空间，和这些空间中的映象.

在向量空间，特别是，在赋范空间，映象通常叫做**算子**.

特别有兴趣的算子是具有向量空间两个代数运算的算子. 其定义如下

2.6-1 定义(线性算子) 线性算子是这样一种算子，合于

(i) T 的定义域 $\mathscr{D}(T)$ 是一个向量空间，其值域 $\mathscr{R}(T)$ 是在同一域上的一向量空间内.

(ii) 对任意 $x,y\in\mathscr{D}(T)$ 及纯量 α，

$$(1)\qquad \begin{aligned} T(x+y)&=Tx+Ty\\ T(\alpha x)&=\alpha Tx \end{aligned}$$

注意，用 Tx 代替 $T(x)$，这种简化在泛函分析中是标准记法. 且以后本书将采用以下记号

$\mathscr{D}(T)$ 表 T 的定义域

$\mathscr{R}(T)$ 表 T 的值域

---

① 假定读者已熟悉映象及有关基本概念. 但在附录1.A1.2中仍列有复习材料.

$\mathscr{N}(T)$表T的零空间。

按定义，T的零空间是一切$x\in\mathscr{D}(T)$使$Tx=0$的元x所成之集（也有称零空间为“核”，我们不采用这种称呼，将核一词留在积分方程理论里用）。

还要讲一下关于表算子时如何使用箭头。设$\mathscr{D}(T)\subset X$与$\mathscr{R}(T)\subset Y$．X,Y为向量空间，两者同为实的或者同为复的。则从（或映）$\mathscr{D}(T)$到$\mathscr{R}(T)$上的算子T，记为

$$T:\mathscr{D}(T)\to\mathscr{R}(T),$$

从$\mathscr{D}(T)$到Y中的算子T，记为

$$T:\mathscr{D}(T)\to Y.$$

如果$\mathscr{D}(T)$是全空间X，这时，也只有这时记为

$$T:X\to Y.$$

显然，(1)等价于

(2) $\qquad T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty.$

在(1)式中取$\alpha=0$则得今后常常用到的

(3) $\qquad T0=0.$

公式(1)表示线性算子T是一个向量空间（它的定义域）到另一个向量空间中的同态，即T按下述意义保持向量空间的两种运算．在(1)中左边首先应用向量空间的运算(加法及乘以纯量)。再将其结果映到Y中；而在右端，首先将x与y映入Y中然后施行Y中的向量运算，其结果相同．这个性质使得线性算子很重要。又泛函分析中向量空间之所以重要，主要因为在它上面可定义线性算子。

现在考察某些基本的线性算子的例子，并请读者验证这些算子的线性性。

例

2.6-2 恒等算子 恒等算子 I_X: $X\to X$定义为$I_X x=x$对一切 $x\in X$. 或简记为I代替I_X; 于是$Ix=x$

2.6-3 零算子 零算子O: $X\to Y$定义为$Ox=O$对一切$x\in X$.

2.6-4 微分算子 设X是$[a, b]$上一切多项式组成的向量空间，在X上定义线性算子T

$$Tx(t)=x'(t) \qquad \text{对一切 } x\in X,$$

其中的一撇表关于t的导数.这个算子T将X映成它自身.

2.6-5 积分算子 线性算子T是从$C[a,b]$到它自身的算子，定义为:

$$Tx(t)=\int_a^t x(\tau)\,d\tau, \qquad t\in[a, b].$$

2.6-6 乘法算子 从$C[a,b]$到自身的另一算子:

$$Tx(t)=tx(t).$$

T在物理学（量子理论）中起很大作用.(在11章将见到)

2.6-7 初等向量代数 两向量的“叉”乘，其中一个因子固定时定义了一个线性算子T_1: $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$. 类似地，向量的“点”乘其中一个因子固定时定义了一个线性算子T_2: $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$, 比如说,

$$T_2x=x\cdot a=\xi_1a_1+\xi_2a_2+\xi_3a_3,$$

其中$a=(a_j)\in\mathbf{R}^3$是固定的.

2.6-8 矩阵 r 行 n 列实矩阵 $A=(\alpha_{jk})$ 定义一个算子 T: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^r$ 表示为

$$y=Ax$$

其中，$x=(\xi_j)$ 有 n 个分量而 $y=(\eta_j)$ 有 r 个分量，将二向量写成列向量，这是通常矩阵乘法的惯例；将 $y=Ax$ 具体写出来，有

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_{n-1}\\ \xi_n\end{bmatrix}$$

T 是线性的因为矩阵乘法是一个线性运算。如果 A 是复的，它定义了一个由 $\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^r$ 的线性算子。详细讨论矩阵在线性算子中的作用放在 2.9 中。

在这些例子中，容易验证它们的值域和零空间都是向量空间。这个事实是典型的。现在进行证明，由此观察在一些简单证明中如何利用线性性质。此定理今后常用到。

2.6-9 定理（值域和零空间） 设 T 是线性算子，则：

(a) 值域 $\mathscr{R}(T)$ 是向量空间。

(b) 如果 $\dim\mathscr{D}(T)=n<\infty$，则 $\dim\mathscr{R}(T)\leqq n$.

(c) 零空间 $\mathscr{N}(T)$ 是向量空间。

证明。(a) 任取 $y_1, y_2\in\mathscr{R}(T)$，下证对任意纯量 α, β, $\alpha y_1+\beta y_2\in\mathscr{R}(T)$。因为 $y_1, y_2\in\mathscr{R}(T)$，则 $y_1=Tx_1$, $y_2=Tx_2$ 对某个 $x_1, x_2\in\mathscr{D}(T)$。因为 $\mathscr{D}(T)$ 是线性空间，故 $\alpha x_1+\beta x_2\in\mathscr{D}(T)$。由 T 的线性性得

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=\alpha y_1+\beta y_2$$

因此，$\alpha y_1+\beta y_2\in\mathscr{R}(T)$。由于 $y_1,y_2\in\mathscr{R}(T)$ 是任意的，纯量α，β 也是任意的，即知 $\mathscr{R}(T)$ 是向量空间。

(b) 任取 $n+1$ 个元 y_1，…，$y_{n+1}\in\mathscr{R}(T)$，则$y_1=Tx_1$，…，$y_{n+1}=Tx_{n+1}$ 对于某组 $x_1,\cdots,x_{n+1}\in\mathscr{D}(T)$。因$\dim\mathscr{D}(T)=n$，则集 $\{x_1,\cdots,x_{n+1}\}$ 必线性相关，因此

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1}=0,$$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}$ 是某组不全为零的数。由于T是线性的 与 $T0=0$。用T作用于上式两端得

$$T(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1})=\alpha_1y_1+\cdots+\alpha_{n+1}y_{n+1}=0.$$

因不是所有的 α_j 都是零，这就证明了 $\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}$ 是线性相关的集。由 $y_1,\cdots,y_{n+1}$ 的任意性，故 $\mathscr{R}(T)$ 设有由 $n+1$ 个或者更多的元素组成的线性无关子集。按定义，这就是$\dim\mathscr{R}(T)\leq n$

(c) 任取 $x_1,x_2\in\mathscr{N}(T)$，则 $Tx_1=Tx_2=0$。因 T 是线性的，对任意纯量 α，β，有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=0.$$

这就证明 $\alpha x_1+\beta x_2\in\mathscr{N}(T)$。因此 $\mathscr{N}(T)$ 是向量空间。∎

由 (b) 之证明直接得出：

线性算子保持线性相关性。

现转而讨论线性算子的逆算子。首先回忆，映象T：$\mathscr{D}(T)\to Y$ 叫内射或一对一的。如果定义域中不同的点有不同的象，即是，如果对任意 $x_1,x_2\in\mathscr{D}(T)$，

$$(4)\qquad x_1\neq x_2\quad\Rightarrow\quad Tx_1\neq Tx_2;$$

等价地

$$(4^*)\qquad Tx_1=Tx_2\quad\Rightarrow\quad x_1=x_2.$$

在这种情况下，存在映象

$$(5)\qquad T^{-1}:\ \mathscr{R}(T)\to\mathscr{D}(T)$$

$$y_0\mapsto x_0\qquad\qquad (y_0=Tx_0).$$

T^{-1} 映每个 $y_0\in\mathscr{R}(T)$ 到 $x_0\in\mathscr{D}(T)$ 上，$Tx_0=y_0$。如图 20，映

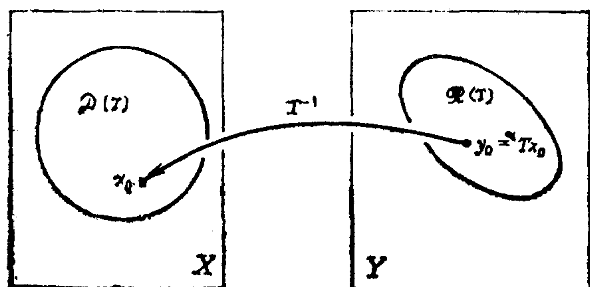


图20 逆映象的图示；见(5)

象T^{-1}叫做T的逆①。

由(5)，显然有

$$T^{-1}Tx=x \qquad \text{对一切 } x\in\mathscr{D}(T)$$

$$TT^{-1}y=y \qquad \text{对一切 } y\in\mathscr{R}(T)$$

在向量空间上关于线性算子有以下事实。线性算子的逆存在当且仅当此算子的零空间只由零元素组成。更确切地描述此事实，有以下常用准则。

2.6-10 定理（逆算子） 设X，Y同时是实或复向量空间。令T：$\mathscr{D}(T)\to Y$是线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，$\mathscr{R}(T)\subset Y$。则

(a) 逆T^{-1}：$\mathscr{R}(T)\to\mathscr{D}(T)$存在当且仅当

$$Tx=0 \quad \Rightarrow \quad x=0.$$

(b) 若T^{-1}存在，则T^{-1}为线性算子。

(c) 如果$\dim\mathscr{D}(T)=n<\infty$，$T^{-1}$存在，则

$$\dim\mathscr{R}(T)=\dim\mathscr{D}(T).$$

证明. (a)设$Tx=0$蕴含$x=0$. 命$Tx_1=Tx_2$，因T是线性的，

$$T(x_1-x_2)=Tx_1-Tx_2=0,$$

所以$x_1-x_2=0$（由假设）. 因此$Tx_1=Tx_2$蕴含$x_1=x_2$，于是，由(4*)知T^{-1}存在。反之，如果T^{-1}存在，则(4*)成立，从(4*)

① 读者想要复习名词"满映象"与"双射"，见附录1A1.2，那里也有名词"逆"的注解.

中让 $x=0$，再应用(3)得

$$Tx_1=T0=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0.$$

(a) 证毕。

(b) 假定 T^{-1} 存在，现证 T^{-1} 是线性的。T^{-1} 的定义域是 $\mathscr{R}(T)$，并且由定理 2.6-9 它是一个线性空间。考察任意 $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$，其象为

$$y_1=Tx_1 \text{ 与 } y_2=Tx_2,$$

则

$$x_1=T^{-1}y_1 \text{ 与 } x_2=T^{-1}y_2,$$

T 是线性的，所以，对任意纯量 α, β 我们有

$$\alpha y_1+\beta y_2=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=T(\alpha x_1+\beta x_2).$$

因为 $x_j=T^{-1}y_j$，则

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha x_1+\beta x_2=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2.$$

即证得 T^{-1} 是线性的。

(c) 由定理 2.6-9(b)，知 $\dim\mathscr{R}(T)\leqq\dim\mathscr{D}(T)$，又将此定理用于 T^{-1}，则 $\dim\mathscr{D}(T)\leqq\dim\mathscr{R}(T)$。∎

最后，叙述一个关于复合算子的逆算子的有用公式。(读者也许在方阵的情形已经知道这个公式了。)

2.6-11 引理(积的逆) 设 $T: X\to Y$; $S: Y\to Z$ 是双射线性算子，X, Y, Z 是向量空间，(见图21)。则积(复合) ST 的逆 $(ST)^{-1}$ 存在，且

(6) $\quad (ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}.$

证明。算子 $ST: X\to Z$ 是双射的，于是 $(ST)^{-1}$ 存在。因而有

$$ST(ST)^{-1}=I_Z$$

I_Z 是 Z 上的恒等算子。应用 S^{-1} 与 $S^{-1}S=I_Y$ (Y 上的恒等算子)。

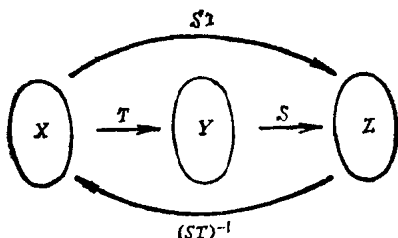


图21　引理 2.6-11 的图示

得

$$S^{-1}ST(ST)^{-1}=T(ST)^{-1}=S^{-1}I_Z=S^{-1}.$$

应用 T^{-1} 与 $T^{-1}T=I_X$ 得

$$T^{-1}T(ST)^{-1}=(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$$

证明完。∎

习　　题

1. 证明 2.6-2 与 2.6-3 中的算子是线性的。

2. 证明从 $\mathbf{R}^2$ 映到 $\mathbf{R}^2$ 中的算子 $T_1,\cdots,T_4$，分别定义为

$$(\xi_1,\xi_2)\mapsto(\xi_1,0)\qquad(\xi_1,\xi_2)\mapsto(0,\xi_2)$$

$$(\xi_1,\xi_2)\mapsto(\xi_2,\xi_1)\qquad(\xi_1,\xi_2)\mapsto(\gamma\xi_1,\gamma\xi_2),$$

是线性的。并作几何解释。

3. 什么是 2 题中算子 T_1，T_2，T_3 的定义域，值域，和零空间？

4. 2 题中算子 T_4 的零空间是什么？又 2.6-7 中的 T_1，T_2 以及 2.6-4 中的 T，它们的零空间是什么？

5. 设 T：$X\to Y$ 是线性算子。证明 X 的子空间 V 的象是向量空间。又 Y 的子空间 W 的逆象也是向量空间。

6. 如果两个线性算子的积（复合）存在，证明它是线性的。

7. （交换性）。设 X 为向量空间，S：$X\to X$ 与 T：$X\to X$ 是任意两算子。S 与 T 称为是交换的如果 $ST=TS$，即，$(ST)x=(TS)x$ 对一切 $x\in X$、问 2 题中的 T_1 和 T_3 是交换的吗？

8. 用 2×2 阶矩阵表示 2 题的算子.

9. 将 2.6-8 中的 $y=Ax$ 以向量的分量形式写出来，证明那个 T 是线

性的并举例说明。

10. 用T的零空间这一术语表示2.6-10(a)之条件。

11. 设X是一切复2×2矩阵所组成的向量空间，定义T: $X\to X$, $Tx=bx$. 这里$b\in X$是固定的而bx表通常矩阵乘积. 证明T是线性的。在什么条件下T^{-1}存在?

12. 2.6-4 中的T其逆存在吗?

13. 设T: $\mathscr{D}(T)\to Y$是线性算子，它的逆存在。如果$\{x_1,\cdots,x_n\}$是$\mathscr{D}(T)$中的线性无关集，证明集$\{Tx_1,\cdots,Tx_n\}$是线性无关的。

14. 设T: $X\to Y$是线性算子，又$\dim X=\dim Y=n<\infty$, 证明$\mathscr{R}(T)=Y$当且仅当T^{-1}存在。

15. 考察定义在R上并在R上处处有一切阶导数的实函数所成的向量空间。定义T: $X\to X$, $y(t)=Tx(t)=x'(t)$。证明$\mathscr{R}(T)=X$, 但T^{-1}不存在。与14题作比较并作评述。

2.7 有界线性算子与连续线性算子

读者可能注意到在整个上节中都没有用到范数。现在，在下面的基本定义中又涉及到它。

2.7-1 定义 (有界线性算子) 设X与Y为赋范空间，T: $\mathscr{D}(T)\to Y$是线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$。称算子T为有界的，如果存在实数c，使得对一切$x\in\mathscr{D}(T)$,

(1) $\|Tx\|\leq c\|x\|$. ∎

注意，(1)中左端的范数是Y上的，而右端的范数是在X上的。为简化起见，我们用相同的记号$\|\cdot\|$,这不会引起混淆，虽然，这里似乎需要用附标($\|x\|_0$, $\|Tx\|_1$, 等等)来加以区别。(1)式表明有界线性算子将$\mathscr{D}(T)$中的有界集映成为Y中的有界集。这就引出了"有界算子"这个名词。

当心！现在我们用"有界"二字与在微积分中的意义是不同的。在那里，有界函数指该函数的值域是有界集。不幸地是，这两处都是标准的用法。但是这不会引起多大混淆。

使 (1) 对一切非零的 $x\in\mathscr{D}(T)$ 都成立的最小数 c 是什么？[我们可以除去 $x=0$，因为，由 2.6(3) 当 $x=0$，$Tx=0$]。用 $\|x\|$ 去除(1)之两端得

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqq c \qquad (\|x\|\neq 0)$$

这表明 c 至少应该与左端式子在 $\mathscr{D}(T)-\{0\}$ 上的上确界一样大。于是使 (1) 成立的最小的 c 就是这个上确界。这个量以 $\|T\|$ 表示；即

$$(2)\qquad \|T\|=\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ x\neq 0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

$\|T\|$ 称为算子 T 的**范数**。如果 $\mathscr{D}(T)=\{0\}$，就定义 $\|T\|=0$；这时(这种情况较少兴趣) $T=0$，因为，由 2.6(3) 知 $T0=0$。

注意，在 (1) 中让 $c=\|T\|$，则有

$$(3)\qquad \|Tx\|\leqq\|T\|\|x\|$$

这个公式使用极为频繁。

当然，此处使用“范数”这个词，应该加以验证符合范数定义。为此，有以下引理

2.7-2 引理(范数) 设 T 是按2.7-1定义的有界线性算子，则

(a) T 的范数的另一公式是

$$(4)\qquad \|T\|=\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|=1}}\|Tx\|.$$

(b) (2)中定义的范数满足2.2节中 $(N1)$ 至 $(N4)$。

证明. (a) 表 $\|x\|=a$，令 $y=\left(\frac{1}{a}\right)x$，$x\neq0$，则 $\|y\|=\|x\|/a=1$。因 T 线性，由(2)得

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\x\neq 0}} \frac{1}{a}\|Tx\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\x\neq 0}} \left\| T\left(\frac{1}{a}x\right)\right\| = \sup_{\substack{y\in\mathscr{D}(T)\\\|y\|=1}} \|Ty\|.$$

现在将右端的 y 改写为 x，即得 (4)

(b) ($N1$) 是显然的。$\|0\|=0$ 也明显。从 $\|T\|=0$ 得 $Tx=0$，对每个 $x\in\mathscr{D}(T)$。于是 $T=0$。因此 ($N2$) 成立。关于 ($N3$)，可以从

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha|\,\|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \quad x\in\mathscr{D}(T)$$

得出。最后，($N4$) 可从

$$\begin{aligned}\sup_{\|x\|=1} \|(T_1+T_2)x\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T_1x+T_2x\| \\ &\leqslant \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\|\end{aligned}$$

得到。这里，$x\in\mathscr{D}(T)$。▌

现在，先看一些典型实例，使我们对有界线性算子多一些实感，再讨论有界线性算子一般性质。

例

2.7-3 恒等算子 赋范空间 $X\neq\{0\}$ 上的恒等算子 I：$X\to X$ 是有界线性算子，且 $\|I\|=1$。(见2.6-2)

2.7-4 零算子 赋范空间 X 上的零算子 O：$X\to Y$ 是有界线性算子，且 $\|0\|=0$ (见 2.6-3)

2.7-5 微分算子 设 X 是 $[0,1]$ 上的，范数为 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$ 的一切多项式所组成的赋范空间。X 上的微分算子定义为

$$Tx(t)=x'(t)$$

这里，一撇表示对 t 的微分。这个算子是线性的但无界。事实上，令 $x_n(t)=t^n$，$n\in\mathbf{N}$。则 $\|x\|=1$ 且

$$Tx_n(t)=x_n'(t)=nt^{n-1},$$

所以，$\|Tx_n\|=n$ 且 $\|Tx_n\|/\|x_n\|=n$。因为 $n\in\mathbf{N}$ 是任意的，这说明没有定数 c 使得 $\|Tx_n\|/\|x_n\|\leqq c$。据此与 (1) 可断定T无界。

因为微分是一重要运算，此结果似乎说明无界算子也有实际重要意义。在十章和十一章里，我们会看到，情况的确是如此。把无界算子放在对有界算子的理论和应用作详细研究之后，是因有界算子比无界算子要简单些。

2.7-6 积分算子 定义积分算子 T：$C[0,1]\to C[0,1]$ 如下 $y=Tx$，这里 $y(t)=\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau$。

其中的 k 是一给定的函数，它叫做 T 的核，并设它在闭正方形 $G=J\times J$ 上（在 $t\tau$ 平面上）是连续的，这里 $J=[0,1]$。这个算子是线性的。

T 又是有界的。

要证明这一点，首先注意，k 在闭正方形上的连续性蕴含 k 有界，比方说，$|k(t,\tau)|\leqq k_0$ 对一切的 $(t,\tau)\in G$，其中 k_0 是一个实数。因为

$$|x(t)|\leqq\max_{t\in J}|x(t)|=\|x\|.$$

于是

$$\begin{aligned}\|y\|=\|Tx\|&=\max_{t\in J}\left|\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right|\\&\leqq\max_{t\in J}\int_0^1|k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau\\&\leqq k_0\|x\|.\end{aligned}$$

结果得$\|Tx\| \leq k_0\|x\|$。这是 (1) 中 $c=k_0$ 的情形。因此T有界。

2.7-7 矩阵 r 行 n 列实矩阵$A=(\alpha_{jk})$ 借助于下面的公式定义了一个算子T：$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^r$：

(5) $y=Ax$,

其中，$x=(\xi_j)$ 与 $y=(\eta_j)$ 分别为 n 及 r 个分量的列向量，并按2.6-8中的矩阵乘法。写成分量的形式，则(5)成为

$$(5') \qquad \eta_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k \qquad (j=1,\cdots,r).$$

T 是线性的，因为矩阵乘法是线性运算。

T 是有界的。

要证明这一点，首先回忆，由2.2-2，$\mathbf{R}^n$ 上的范数是由

$$\|x\|=\left(\sum_{m=1}^{n}\xi_m^2\right)^{1/2}$$

给出。类似地，也得到 $y\in\mathbf{R}^r$ 上的范数。由 (5′) 与 1.2节(11)之Cauchy-Schwarz 不等式，得

$$\|Tx\|^2=\sum_{j=1}^{r}\eta_j^2=\sum_{j=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k\right]^2$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{r}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{n}\xi_m^2\right)^{1/2}\right]^2$$

$$=\|x\|^2\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2.$$

注意到最后一行的二重和不依赖于 x，于是可以写成

$$\|Tx\|^2 \leq c^2\|x\|^2 \qquad 其中\ c^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2.$$

这就是(1)，得证T有界。∎

矩阵在线性算子中的作用将单独在一节里进行研究，(2.9节)。有界性是典型的性质，它在有限维空间中显得特别简单，见下面定理。

2.7-8 定理（有限维） 如果赋范空间X是有限维的，则X上的每个线性算子是有界的。

证明。设$\dim X=n$，$\{e_1,\cdots e_n\}$是X的基。任取$x=\Sigma\xi_j e_j$。考察X上任一线性算子T。因为T是线性的，

$$\|Tx\|=\|\Sigma\xi_j Te_j\|\leqq\Sigma|\xi_j|\,\|Te_j\|\leqq\max\|Te_k\|\Sigma|\xi_j|$$

(从1到n求和)。对于最后一个和数应用引理2.4-1(让那里的$\alpha_j=\xi_j$，与$x_j=e_j$)。则得

$$\Sigma|\xi_j|\leqq\frac{1}{c}\|\Sigma\xi_j e_j\|=\frac{1}{c}\|x\|.$$

结合此两式得

$$\|Tx\|\leqq\gamma\|x\|\quad 其中\ \gamma=\frac{1}{c}\max_k\|Te_k\|.$$

由此及(1)知T有界 ∎

我们现在考察有界线性算子重要的一般性质。

算子是映象，连续性（见1.3-3）也适用于它。一个重要基本事实，对于线性算子，连续性与有界性是等价的概念。详情如下。

设T：$\mathscr{D}(T)\rightarrow Y$是任一算子，不必是线性的，其中$\mathscr{D}(T)\subset X$又$X$与$Y$都是赋范空间，按定义1.3-3，称算子$T$在点$x_0\in\mathscr{D}(T)$连续，如果对每个$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对一切满足

$\|x-x_0\|<\delta$ 的 $x\in\mathscr{D}(T)$ 有

$$\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon.$$

称T是连续的，如果T在每个 $x\in\mathscr{D}(T)$ 连续。

现在当T是线性算子时，有以下重要定理

2.7-9 定理（连续性与有界性） 设T：$\mathscr{D}(T)\to Y$为线性[①]算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，X，Y都是赋范空间。则

(a) T是连续的当且仅当T是有界的。

(b) T在一点处连续，T就是连续的。

证明。(a)当$T=0$时结果是平凡的。设$T\neq 0$，则$\|T\|\neq 0$。假定T有界，考虑任意$x_0\in\mathscr{D}(T)$。任意给定$\varepsilon>0$，则因T是线性的，对每个使

$$\|x-x_0\|<\delta,\quad \delta=\frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

的点 $x\in\mathscr{D}(T)$，有

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\|\leqq\|T\|\|x-x_0\|<\|T\|\delta=\varepsilon$$

由于$x_0\in\mathscr{D}(T)$ 是任意的，得证T是连续的。

反之，假如T在任意点 $x_0\in\mathscr{D}(T)$ 连续，则任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对一切满足 $\|x-x_0\|<\delta$的$x\in\mathscr{D}(T)$ 有。

(6) $\|Tx-Tx_0\|\leqq\varepsilon$ 现在在 $\mathscr{D}(T)$ 中任取 $y\neq 0$，并置

---

① 当心！不幸地是有些作者称连续线性算子为"线性算子"。我们不采用这个术语。事实上，存在着重要的不连续的线性算子。这样的例子在2.7-5中第一次会遇到。其它的这种例子放在10章和11章里。

$$x=x_0+\frac{\delta}{\|y\|}y. \qquad 则 x-x_0=\frac{\delta}{\|y\|}y.$$

因此 $\|x-x_0\|=\delta$，所以可以应用 (6)。由于 T 是线性的，我们有

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\|=\left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\|=\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|.$$

而 (6) 蕴含 $\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|\leqq\varepsilon$，于是 $\|Ty\|\leqq\frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|$。

这可以写成 $\|Ty\|\leqq c\|y\|$ 这里 $c=\varepsilon/\delta$。T 的有界性得证。

(b) 从 (a) 的第二部分的证明知，T 在一点的连续性蕴含 T 的有界性，再由此（根据 (a)）蕴含 T 连续性。▌

2.7-10 推论（连续性，零空间） 设 T 为有界线性算子，则：

(a) $x_n\to x$ [这里 $x_n,x\in\mathscr{D}(T)$] 蕴含 $Tx_n\to Tx$。

(b) 零空间 $\mathcal{N}(T)$ 是闭的。

证明。(a) 可由定理 2.7-9(a) 和1.4-8得到；或者直接由(3)得到，因为，当 $n\to\infty$ 时

$$\|Tx_n-Tx\|=\|T(x_n-x)\|\leqq\|T\|\|x_n-x\|\to 0.$$

(b) 对每个 $x\in\overline{\mathcal{N}(T)}$，存在 $\mathcal{N}(T)$ 中的序列 (x_n) 合于 $x_n\to x$；见 1.4-6(a)。因此由本推论之 (a) 知 $Tx_n\to Tx$。又因为 $Tx_n=0$，所以 $Tx=0$。从而 $x\in\mathcal{N}(T)$。由于 $x\in\overline{\mathcal{N}(T)}$ 是任意的，于是 $\mathcal{N}(T)$ 是闭的。▌

请注意有界线性算子的值域不必闭。（见 6 题）

读者可以给出以下有用公式的简单证明。

(7) $\|T_1T_2\|\leqslant\|T_1\|\|T_2\| \qquad \|T^n\|\leqslant\|T\|^n \qquad (n\in\mathbf{N})$

这里，线性算子 T_2: $X\to Y$，T_1: $Y\to Z$，T: $X\to X$ 是有界的，X，Y，Z 是赋范空间。

算子是映象，一些与映象[①]有关的概念已经作过讨论，如算子的定义域，值域和零空间，现在还要加上两个进一步的概念（限制与延拓）．早一点讲这些也可以，但宁可放在这里来讲，因为可以立即在这里给出有趣的应用（以下的定理 2.7-11）．我们首先定义算子相等．

两个算子 T_1，T_2 叫做相等的，并记为

$$T_1 = T_2,$$

如果 $\mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T_2)$ 且 $T_1 x = T_2 x$ 对一切 $x \in \mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T_2)$．

算子 $T: \mathscr{D}(T) \to Y$ 关于子集 $B \subset \mathscr{D}(T)$ 的**限制**表作

$$T|_B,$$

它是一个算子，定义为

$$T|_B: B \to Y, \quad T|_B x = Tx, \quad 对一切\ x \in B$$

算子 T 关于集 $M \supset \mathscr{D}(T)$ 的**延拓**（或**扩张**）是一个算子

$$\tilde{T}: M \to Y \text{ 使得 } \tilde{T}|_{\mathscr{D}(T)} = T,$$

即是，$\tilde{T}x = Tx$ 对一切 $x \in \mathscr{D}(T)$．[因此 T 就是 $\tilde{T}$ 关于 $\mathscr{D}(T)$ 的限制]．

如果 $\mathscr{D}(T)$ 是 M 的真子集，则给定的 T 有许多延拓．而特别有兴趣地是那些保持了 T 的某些基本性质的延拓，例如，线性性（如果 T 是线性的）或有界性（如果 $\mathscr{D}(T)$ 是在赋范空间中而 T 是有界的）．下面这个重要定理就是这方面的一个典型，即将线性有界算子在保持线性与有界性不变的情况下从 $\mathscr{D}(T)$ 延拓到 $\overline{\mathscr{D}(T)}$ 上．这个延拓甚至还可保持范数相同．定理包括定义于赋范空间 X 的稠集上的算子，可以延拓到全空间 X 上去．于是，也包括定义于赋范空间上的算子可以延拓到其完备化空间上去．（见 2.3-2）．

① 这些概念的复习材料见附录 1 中 A1.2.

2.7-11 定理（有界线性延拓） 设

$$T: \mathscr{D}(T) \to Y$$

是有界线性算子，$\mathscr{D}(T)$ 是在赋范空间 X 中而 Y 为 Banach 空间，则 T 有延拓

$$\tilde{T}: \overline{\mathscr{D}(T)} \to Y.$$

$\tilde{T}$ 是有界线性算子，其范数为

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

证明. 考虑任意 $x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$，由定理 1.4-6(a)，存在 $\mathscr{D}(T)$ 中的序列 (x_n) 合于 $x_n \to x$. 因 T 是线性有界的，我们有

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

因为 (x_n) 收敛，这表明 (Tx_n) 是 Cauchy 序列. 由假设，Y 是完备的，所以 (Tx_n) 收敛，比方说

$$Tx_n \to y \in Y.$$

我们定义 $\tilde{T}$，

$$\tilde{T}x = y.$$

现证明此定义与 $\mathscr{D}(T)$ 中收敛于 x 的序列的选取无关. 假如 $x_n \to x$ 又 $z_n \to x$. 则 $v_m \to x$，这里 (v_m) 是序列

$$(x_1, z_1, x_2, z_2, \cdots).$$

由 2.7-10(a) 知 (Tv_m) 收敛，于是其两个子序列 (Tx_n) 与 (Tz_n) 必收敛于同一极限. 这证明在每个 $x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$ 处，$\tilde{T}$ 是唯一决定的.

显然，$\tilde{T}$ 是线性的，又 $\tilde{T}x = Tx$ 对一切 $x \in \mathscr{D}(T)$ 成立. 所以 $\tilde{T}$ 是 T 的延拓. 现利用

$$\|Tx_n\| \leqslant \|T\| \|x_n\|$$

让 $n \to \infty$. 则 $Tx_n \to y = \tilde{T}x$. 由于 $x \mapsto \|x\|$ 定义一个连续映象（见 2.2）于是得到

$$\|\tilde{T}x\| \leqslant \|T\| \|x\|.$$

从而 $\tilde{T}$ 有界并且 $\|\tilde{T}\| \leqslant \|T\|$. 当然，$\|\tilde{T}\| \geqslant \|T\|$，这因为范数是由

上确界定义的，在延拓里不可能减小。综合以上可得$\|\tilde{T}\|=\|T\|$。

习　　题

1．证明(7)。

2．设X，Y为赋范空间。证明线性算子T：$X\to Y$是有界的当且仅当T映X中的有界集为Y中的有界集。

3．如果$T\neq 0$是有界线性算子，证明对任一$x\in\mathscr{D}(T)$，且$\|x\|<1$，有严格不等式$\|Tx\|<\|T\|$。

4．不用2.7-9(a)，给出2.7-9(b)的直接证明。

5．证明，由$y=(\eta_j)=Tx$，$\eta_j=\xi_j/j$，$x=(\xi_j)$给出的算子T：$l^\infty\to l^\infty$是有界线性算子。

6．(值域) 证明，有界线性算子T：$X\to Y$的值域$\mathscr{R}(T)$在Y中不必闭。(提示。用5题的T)。

7．(逆算子) 设T是把赋范空间X映成赋范空间Y的有界线性算子。如果存在正数b使得

$$\|Tx\|\geqslant b\|x\| \qquad \text{对一切 } x\in X.$$

证明T^{-1}存在且有界。

8．证明，有界线性算子T：$X\to Y$的逆算子T^{-1}：$\mathscr{R}(T)\to X$不必是有界的。(提示。用5题的T)

9．设T：$C[0,1]\to C[0,1]$定义为

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau.$$

求$\mathscr{R}(T)$与T^{-1}：$\mathscr{R}(T)\to C[0,1]$。T^{-1}是线性有界的吗？

10．若在$C[0,1]$上分别由下面的式子定义S与T，

$$y(s)=s\int_0^1 x(t)dt, \qquad y(s)=sx(s).$$

问S与T是否可换？求出$\|S\|$，$\|T\|$，$\|ST\|$，与$\|TS\|$。

11．设X是$\mathbf{R}$上一切有界实值函数所成的赋范空间，其范数是

$$\|x\|=\sup_{t\in\mathbf{R}}|x(t)|.$$

又设T：$X\to Y$定义为

$$y(t)=Tx(t)=x(t-\Delta) \qquad (\Delta>0，是常数)$$

(这是一个延迟线路模型，它是一个电子器件，其输出y是输入x的延迟形式，其延迟的时间为Δ；见图22)。问T是否线性？是否有界？

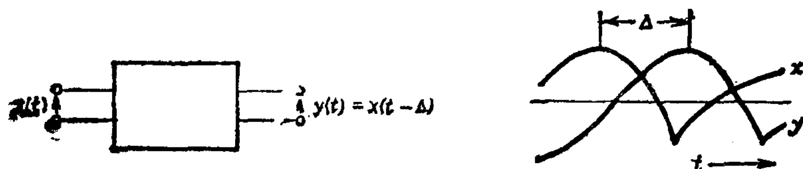


图22　电的延迟线

12. （矩阵） 由 2.7-7 知一个 $r\times n$ 矩阵 $A=(\alpha_{jk})$ 定义了从一切有序 n 元数组所成的向量空间 X 到一切有序 r 元数组所成的向量空间 Y 内的线性算子。假定 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数而 $\|\cdot\|$ 是在 Y 上给出的。回顾 2.4 节10题，在一切这样的矩阵所成的空间 Z 上（r 与 n 固定）可以有各种范数。定义在 Z 上的范数 $\|\cdot\|$ 称为与 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是相容的，如果

$$\|Ax\|_2\leqslant\|A\|\|x\|_1.$$

证明，由

$$\|A\|=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$$

定义的范数与 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是相容的，此范数通常叫做由 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 定义的**自然范数**。如果选取 $\|x\|_1=\max\limits_j|\xi_j|$，$\|y\|_2=\max\limits_j|\eta_j|$，证明，其自然范数为

$$\|A\|=\max_j\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|.$$

13. 证明，在 2.7-7 中让 $r=n$，则

$$\|A\|=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2\right)^{1/2}$$

定义一相容范数。但对 $n>1$ 它不是 $\mathbf{R}^n$ 上 Euclidean 范数定义的自然范数。

14. 如果在12题中选取

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|,\qquad \|y\|_2=\sum_{j=1}^{r}|\eta_j|.$$

证明，$\|A\|=\max\limits_k\sum\limits_{j=1}^{r}|\alpha_{jk}|$ 定义一个相容的范数。

15. 证明，当$r=n$，14题中的范数是对应于该题的$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$的自然范数。

2.8 线性泛函

泛函 是一个其值域在实直线**R**或复平面**C**中的算子。泛函分析起源于函数的分析，泛函出现十分频繁因而用些特别记号来表示它们。通常用小写字母$f, g, h, \cdots$表泛函，$\mathscr{D}(f)$表f的定义域而$\mathscr{R}(f)$表其值域，f在$x \in \mathscr{D}(f)$的值表为$f(x)$，这里要用括号。

泛函是算子，所以前面的定义对它都适用。因为考察的泛函绝大多数都是线性和有界的，所以特别需要以下两个定义。

2.8-1 定义（线性泛函） 线性泛函是一个线性算子，它的定义域在一向量空间X中而值域在X的纯量域K中；于是

$$f: \mathscr{D}(f) \to K,$$

当X是实向量空间时，$K=\mathbf{R}$，当X是复的时，$K=\mathbf{C}$ ▮

2.8-2 定义（有界线性泛函） 有界线性泛函是定义域在赋范空间X中，值域在X的纯量域中的有界线性算子.（见定义2.7-1）。于是存在一实数c，使得，对一切$x \in \mathscr{D}(f)$有

$$(1) \qquad |f(x)| \leqq c|x|.$$

此外，f的范数是[见2.7的(2)]

$$(2a) \qquad \|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

或者

$$(2b) \qquad \|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(T) \\ \|x\|=1}} |f(x)|.$$

2.7节中的公式 (3) 在现在成为

$$(3) \qquad |f(x)| \leq \|f\| \|x\|.$$

而定理 2.7-9 的特殊情况是

2.8-3 定理（连续性与有界性） 定义域 $\mathscr{D}(f)$ 在赋范空间中的线性泛函是连续的当且仅当 f 是有界的。

例。

2.8-4 范数 范数$\|\cdot\|: X \to \mathbf{R}$，$[X=(X, \|\cdot\|)]$ 是X上的泛函但不是线性的。

2.8-5 点积 固定一个因子的点积定义一个泛函f：$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$，其由

$$f(x)=x \cdot a=\xi_1 \alpha_1+\xi_2 \alpha_2+\xi_3 \alpha_3$$

给出，其中 $a=(\alpha_j) \in \mathbf{R}^3$ 是固定的。f 是线性的且f 是有界的。事实上

$$|f(x)|=|x \cdot a| \leqslant\|x\| \cdot\|a\|,$$

所以由，(2b) $\|f\| \leqslant \|a\|$. 另一方面，取 $x=a$，利用 (3) 得

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(a)|}{\|a\|}=\frac{\|a\|^2}{\|a\|}=\|a\|.$$

因此，f 的范数 $\|f\|=\|a\|$.

2.8-6 定积分 当我们对单独一个函数来考虑时，定积分是一个数，在微积分中总是这样作的。然而，当我们在某个函数空间对其一切函数考虑定积分时。情况就完全不同了。这时此积分成了该空间上的泛函，称为 f。我们取 $C[a, b]$ 为空间；见2.2-5. 则 f 由

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,dt \qquad x\in C[a,b],$$

定义。f 是线性的。现证 f 是有界的且有范数 $\|f\|=b-a$。
事实上，记 $J=[a,b]$，请回忆 $C[a,b]$ 上的范数，我们得到

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)\,dt\right|\leqslant(b-a)\max_{t\in J}|x(t)|=(b-a)\|x\|.$$

故得

$$\|f\|\leqslant(b-a).$$

特别取 $x=x_0=1$，则 $\|x_0\|=1$，由(3)得

$$\|f\|\geqslant\frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|}=|f(x_0)|=\int_a^b dt=b-a.$$

2.8-7 空间 C[a, b] 取一固定的 $t_0\in J=[a,b]$，置

$$f_1(x)=x(t_0) \qquad x\in C[a,b]$$

则得 $C[a,b]$ 上另一重要泛函 f_1。f_1 是线性的。现证 f_1 是有界的其范数 $\|f_1\|=1$。事实上，由

$$|f_1(x)|=|x(t_0)|\leqslant\|x\|$$

则得 $\|f_1\|\leqslant 1$。另一方面，对 $x_0=1$，则 $\|x_0\|=1$，由(3)得

$$\|f_1\|\geqslant|f_1(x_0)|=1.$$

2.8-8 空间 l^2 在 Hilbert 空间 l^2 中取一固定 $a=(\alpha_j)\in l^2$ 并置

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j, \qquad x=(\xi_j)\in l^2.$$

则可得 l^2 上的线性泛函 f。(见 1.2-3) 这个级数是绝对收敛的且 f 是有界的。事实上，由 1.2 节 Cauchy-Schwarz 不等式(11)可得（从 1 到 ∞ 求和）

$$|f(x)|=\left|\sum\xi_j\alpha_j\right|\leqslant\sum|\xi_j\alpha_j|\leqslant\sqrt{\sum|\xi_j|^2}\sqrt{\sum|\alpha_j|^2}$$

$$=\|x\|\|a\|. \quad \blacksquare$$

定义在向量空间 X 上一切线性泛函所成之集可以构成一向量空间，这有基本的重要意义．此空间表作 X^* 并叫做 X 的**代数**① **对偶(或共轭)空间**．其关于向量空间的代数运算按自然方法定义如下：泛函 f_1 与 f_2 的和 f_1+f_2 是泛函 s，它在每一 $x\in X$ 的值是

$$s(x)=(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x);$$

纯量 α 与泛函 f 的积 αf 是泛函 p，它在 $x\in X$ 的值是

$$p(x)=(\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

注意，这与通常的函数相加，函数乘以常数是一致的．

我们可以进一步考察 X^* 的代数对偶空间 $(X^*)^*$，其中的元素是定义在 X^* 上的线性泛函．并表 $(X^*)^*$ 为 X^{**}，叫 X^{**} 为 X 的第二代数对偶空间．

为什么我们要考虑 X^{**}？关键在于可以得到 X 与 X^{**} 间的有兴趣和重要关系如下：我们采用记号：

空　　间	一　般　元　素	在 一 点 的 值
X	x	——
X^*	f	$f(x)$
X^{**}	g	$g(f)$

可得一个 $g\in X^{**}$，它是 X^* 上的线性泛函，由以下之关系式(4)决定．取一固定 $x\in X$，置

(4) $\qquad g(f)=g_x(f)=f(x)$. ($x\in X$ 是固定的，$f\in X^*$ 是变的)

附标 x 表明我们用某个 $x\in X$ 来得出 g．读者应仔细观察，在这里 f 是变的而 x 是不变的．记住这一点，理解所作的考虑就不应有困难。

由(4)定义之 g_x 是线性的，这可由

① 注意此定义与范数无关．由 X 上一切有界线性泛函组成的所谓对偶空间 X' 将在2.10节讨论．

$$g_x(\alpha f_1+\beta f_2)=(\alpha f_1+\beta f_2)(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$$
$$=\alpha g_x(f_1)+\beta g_x(f_2)$$
看到。根据 X^{**}的定义，知 g_x 是 X^{**} 的一元。

对每一 $x\in X$，这里对应一$g_x\in X^{**}$。这就定义了一个映象

$$C: X\to X^{**}$$
$$x\mapsto g_x.$$

C 叫做从 X 到 X^{**} 中的典则映象。

C 是线性的，因为它的定义域是向量空间并且有

$$(C(\alpha x+\beta y))(f)=g_{\alpha x+\beta y}(f)$$
$$=f(\alpha x+\beta y)$$
$$=\alpha f(x)+\beta f(y)$$
$$=\alpha g_x(f)+\beta g_y(f)$$
$$=\alpha(C_x)(f)+\beta(C_y)(f).$$

C 也叫从 X 到 X^{**} 的典则嵌入。为了理解并知道这个名词怎么来的，首先解释一个有普遍意义的名词"同构"。

在我们的工作中要处理各种空间。它们的共同之处是有一个集 X，与定义在 X 上的一"结构"。对度量空间，它就是度量。对向量空间，就是两个代数运算。而对赋范空间，这个结构由两个代数运算和范数组成。

给了两个同类型的空间 X 与 $\tilde{X}$ (例如，两个向量空间)，知道 X 与 $\tilde{X}$ 是否在"本质上"完全一样是有兴趣的，即是，是否它们不同之处至多是它们的点的属性不同而已。当结构是所研究的基本对象而与点的属性不相干时，则我们可以视 X 与 $\tilde{X}$ 为相同的，即看作同一抽象空间的两个复制品。这种情况常常出现。它提出了同构这个概念。按定义，它是映 X 到 $\tilde{X}$ 上的保持结构不变的双射映象。

因此，度量空间 $X=(X,d)$ 到度量空间 $\tilde{X}=(\tilde{X},\tilde{d})$ 上的同构 T 是一个保距的双射映象，即对任意的 x，$y\in X$，

$$\tilde{d}(Tx,\ Ty)=d(x,y).$$

这时称 $\tilde{X}$ 与 X 同构。对我们来说这没有任何新内容，仅是定义1.6-1 中谈的双射等距的另一名称。下面介绍的却有新的内容。

同一域上的向量空间 X 到向量空间 $\tilde{X}$ 上的同构 T 是一个保持向量空间两个代数运算的双射映象；于是，对一切 $x,y\in X$ 与纯量 α,

$$T(x+y)=Tx+Ty \qquad T(\alpha x)=\alpha Tx,$$

即是，$T:X\to\tilde{X}$ 是双射线性算子。这时 $\tilde{X}$ 叫做与 X 同构，又 X 与 $\tilde{X}$ 叫做同构向量空间。

赋范空间的同构是保持范数的向量空间的同构，详情见2.10节，那里需要这样的同构。

现在，可以对向量空间同构作如下应用。

可以证明，典则映象 C 是一个内射。于是因为 C 是线性的（见前面），它就是从 X 到 C 的值域 $\mathscr{R}(C)\subset X^{**}$ 上的同构。

如果 X 同构于向量空间 Y 的子空间，则称 X 是 Y 中的**嵌入**。因此，X 是可以嵌入到 X^{**} 的，而 C 也叫做 X 到 X^{**} 的典则嵌入。

如果 C 又是满的（因此是双射），于是 $\mathscr{R}(C)=X^{**}$，则 X 说成是代数自反的，下节将证明，如果 X 是有限维的，则 X 是**代数自反的**。

类似地讨论当涉及范数时引出赋范空间自反性的概念，这要等建立起一些适当的工具以后，（特别是著名的 Hahn—Banach 定理）于 4.6 节给出。

习　　题

1. 证明，2.8-7 与 2.8-8 中的泛函都是线性的。
2. 证明，在 $C[a,b]$ 上由

$$f_1(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)dt \qquad (y_0\in C[a,b])$$

$$f_2(x)=\alpha x(a)+\beta x(b) \qquad (\alpha,\beta\text{ 固定})$$

定义的泛函是线性有界的。

3． 求出，在$C[-1,1]$上由

$$f(x)=\int_{-1}^0 x(t)dt-\int_0^1 x(t)dt$$

定义的线性泛函 f 的范数。

4． 证明。

$$f_1(x)=\max_{t\in J}x(t)$$

$$f_2(x)=\min_{t\in J}x(t) \qquad J=[a,b]$$

定义 $C[a,b]$上的泛函。它们是线性的吗？有界的吗？

5． 证明在任意序列空间 X 上，置 $f(x)=\xi_n$(n 固定)，其中 $x=(\xi_j)$，可以定义线性泛函 f。如果 $X=l^\infty$，f 是否有界？

6． (Space C′ [a,b]) 空间 $C^1[a,b]$或$C'[a,b]$是 $J=[a,b]$上一切连续可微函数所成之集，其范数是

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|+\max_{t\in J}|x'(t)|.$$

证明它满足范数公理，证明 $f(x)=x'(c)$，$c=\dfrac{a+b}{2}$,定义了 $C'[a,b]$上的一个有界线性泛函。证明作为 $C[a,b]$中一切连续可微函数的子空间的泛函 f，它不是有界的。

7． 如果 f 是复赋范空间上的有界线性泛函，$\bar f$ 是否有界？（横杠表示复共轭）

8． (零空间) 集 $M^*\subset X^*$的零空间 $N(M^*)$定义为这样的一切 $x\in X$ 的集合，使得对一切 $f\in M^*$有 $f(x)=0$ 成立。证明$N(M^*)$是向量空间。

9． 设 $f\neq 0$ 是向量空间X上的任意线性泛函，而 x_0 是 $X-\mathcal{N}(f)$ 的任一元素，这里 $\mathcal{N}(f)$是 f 的零空间。证明，任意 $x\in X$ 有唯一的表示式 $x=\alpha x_0+y$，$y\in\mathcal{N}(f)$。

10． 证明，在 9 题中，x_1，$x_2\in X$属于商空间 $X/\mathcal{N}(f)$ 中同一元素当且仅当 $f(x_1)=f(x_2)$。证明 $\operatorname{Codim}\mathcal{N}(f)=1$。（见2.1节14题）

11． 证明，定义在同一向量空间上，并有相同的零空间的两个线性泛函 $f_1\neq 0$ 与 $f_2\neq 0$ 是成比例的。

12． (超平面)如果Y是向量空间X的子空间且 $\operatorname{Codim}Y=1$（见2.1节14题），则X/Y中的每个元素叫做平行于Y的超平面。试证明，X 上的任意

非零线性泛函$f(f\neq 0)$，集$H_1=\{x\in X|f(x)=1\}$是平行于f的零空间$\mathcal{N}(f)$的超平面。

13. 如果Y是向量空间X的子空间，而f是X上的线性泛函合于$f(Y)$不是X的整个纯量域。证明，对一切$y\in Y$，$f(y)=0$。

14. 证明，赋范空间X上有界线性泛函$f\neq 0$的范数$\|f\|$，可以几何地说成是从原点到超平面$H_1=\{x\in X|f(x)=1\}$的距离$\tilde{d}=\inf\{\|x\||f(x)=1\}$的倒数。

15. (半空间) 设$f\neq 0$是实赋范空间X上的有界线性泛函。则对任意纯量c有超平面$H_c=\{x\in X|f(x)=c\}$，而H_c决定了两个半空间

$$X_{c1}=\{x|f(x)\leqslant c\}\ 与\ X_{c2}=\{x|f(x)\geqslant c\}.$$

证明，闭单位球在X_{c1}中，这里，$c=\|f\|$，但不存在$\varepsilon>0$，当$c=\|f\|-\varepsilon$时，X_{c1}包含此球。

2.9 有限维空间上的线性算子与泛函

有限维向量空间比无限维的要简单些，自然要问，对定义在这样的空间上的线性算子与线性泛函，会有什么简化。这是应当考虑的问题。而答案将澄清（有限）矩阵与有限维向量空间X上的线性算子，以及其代数对偶空间X^*的结构（见2.8）的联系。

有限维空间上的线性算子，按下面的解释，可以用矩阵表示。用这种方法，矩阵成了在有限维空间中研究线性算子的最重要的工具。为充分了解现在所考虑的事实的全部意义还应回忆定理2.7-8，详情如下。

设X与Y都是同一域上的有限维向量空间，而$T: X\to Y$是线性算子，选择$E=\{e_1,\cdots e_n\}$作为X的基而$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$为Y的基，这些向量按保持固定的顺序排列。则每个$x\in X$有唯一的表示式

$$(1)\qquad x=\xi_1 e_1+\cdots+\xi_n e_n.$$

由于T是线性的，x有象

$$(2)\qquad y=Tx=T\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k Te_k.$$

因为表示式(1)是唯一的，故有以下第一个结果：

如果 n 个基向量 $e_1,\cdots,e_n$ 的象 $y_k=Te_k$ 预先确定，则T唯一确定。

因 y 与 $y_k=Te_k$ 都在 Y 中，它们有下形的唯一的表示

$$(3)\quad \begin{aligned}&(a)\qquad y=\sum_{j=1}^{r}\eta_j b_j\\ &(b)\qquad Te_k=\sum_{j=1}^{r}\tau_{jk}b_j\end{aligned}$$

代入(2)得

$$y=\sum_{j=1}^{r}\eta_j b_j=\sum_{k=1}^{n}\xi_k Te_k=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\sum_{j=1}^{r}\tau_{jk}b_j=\sum_{j=1}^{r}\Big(\sum_{k=1}^{n}\tau_{jk}\xi_k\Big)b_j$$

由于这些 b_j 构成一个线性无关集，每个 b_j 在等式左边的系数必与其在右边的相同，即是

$$(4)\qquad \eta_j=\sum_{k=1}^{n}\tau_{jk}\xi_k\qquad j=1,\cdots,r.$$

这就得出我们的下一个结果：

$x=\sum\xi_k e_k$ 的象 $y=Tx=\sum\eta_j b_j$ 可以由(4)得到。

注意，在(3b)中 τ_{jk} 的求和指标 j 的位置不是通常的位置。为了能表(4)中求和指标为通常的位置，这样作是必需的。

(4)中的系数形成一个矩阵

$$T_{EB}=(\tau_{jk})$$

它是 r 行 n 列的阵。如果 X 的基 E 与 Y 的基 B 已给出，E与B

的元素又排成某种确定的顺序（它是任意的但是固定的），则 T_{EB} 由线性算子T 唯一决定。我们称 T_{EB}关于这些基**表示**算子T。

引入列向量 $\tilde{x}=(\xi_k)$ 与 $\tilde{y}=(\eta_j)$，我们可以将(4) 用矩阵记号写成

(4′) $$\tilde{y}=T_{EB}\tilde{x}.$$

类似地，(3b) 也可用矩阵记号写成

(3b′) $$T_e=T_{EB}^{\mathrm{T}}b$$

这里 T_e 是分量为 $Te_1,\cdots,Te_n$（它们自身都是向量）的列向量，而 b 是分量为 $b_1,\cdots,b_n$ 的列向量，我们还必须用 T_{EB} 的转置 T_{EB}^{T}，因在(3b)，我们对第一个附标 j 求和，而在(4)，我们对 k 求和，而 k 是第二个附标。

我们的考察表明。关于X 给定的基与Y给定的基，线性算子 T 决定一个唯一表示T 的矩阵，这里假定这些基中的向量是排成一固定的顺序。反过来，任意 r 行 n 列的矩阵，对于给定的X及Y的基，它决定一个由它表示的线性算子 T。（也可参看 2.6-8 与 2.7-7）。

现在转到X上的**线性泛函**，$\dim X=n$，$\{e_1,\cdots,e_n\}$和前面一样是 X 的一个基。从前节知道，这些泛函构成 X 的代数对偶空间 X^*。对每个这样的泛函与每个 $x\in X$，$x=\sum\xi_j e_j$，我们有

(5a) $$f(x)=f\Big(\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\Big)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j f(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\alpha_j,$$

这里

(5b) $$\alpha_j=f(e_j) \qquad j=1,\cdots,n,$$

因而 f 由它在 X的 n 个基向量的值 α_j 唯一决定。

反之，每 n 个有序纯量，按(5)，确定X上的一线性泛函。特别，取 n 个如下的有序 n 元组

$$(1,0,0,\cdots 0,0)$$

$$(0,1\ 0,\cdots 0,0)$$
$$(\cdots,\cdots\cdots)$$
$$(0,0,0,\cdots 0,1)$$

根据(5)，这给出了n个泛函，表它们为$f_1,\cdots,f_n$，且具有值

$$(6)\qquad f_k(e_j)=\delta_{jk}=\begin{cases}0, & 如\ j\neq k\\ 1, & 如\ j=k\end{cases}$$

即是，f_k在第k个基向量处值为1，而在其它$n-1$个基向量处值为零。δ_{jk}叫做Kronecker delta。$\{f_1,\cdots,f_n\}$叫做X的基$\{e_1,\cdots,e_n\}$的**对偶基**。这个称呼基于以下定理。

2.9-1 定理(X^*的维数) 设X为n维向量空间而$E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是X的一个基。则由(6)式给出的$F=\{f_1,\cdots f_n\}$是X的代数对偶空间X^*的一个基。且$\dim X^*=\dim X=n$。

证明。F是一线性无关集，因为

$$(7)\qquad \sum_{k=1}^{n}\beta_k f_k(x)=0\qquad (x\in X)$$

取$x=e_j$得

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k f_k(e_j)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\delta_{jk}=\beta_j=0,$$

所以(7)中的一切β_k皆为零。现证每个$f\in X^*$可以由F中的元素的线性组合唯一地表示出来。如(5b)，记$f(e_j)=\alpha_j$。由(5a)，

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\alpha_j\qquad 对每个x\in X.$$

另一方面，由(6)得

$$f_j(x)=f_j(\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n)=\xi_j\ .$$

联合这些等式，有

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j(x).$$

因此，X上任意线性泛函由$f_1,\cdots,f_n$唯一表为

$$f=\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n \text{ .} \quad \blacksquare$$

为给这个定理的一有趣应用作准备，首先证明以下引理.(对于任意赋范空间的一个类似引理在后面 4.3-4 给出)

2.9-2 引理（零向量） 设X为有限维向量空间.如果$x_0\in X$具有这样性质,对一切$f\in X^*$，$f(x_0)=0$。则$x_0=0$。

证明.设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是X的一个基，且$x_0=\sum\xi_{0j}e_j$,则(5)成为

$$f(x_0)=\sum_{j=1}^{n}\xi_{0j}\alpha_j.$$

根据假设，对一切$f\in X^*$它都是零．即是，对每一组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$它都是零。因此，一切ξ_{0j}必为零。$\blacksquare$

利用这个引理可得

2.9-3 定理（代数自反性） 有限维向量空间是代数自反的。

证明。典则映象$C:X\to X^{**}$（见前节）是线性的。按C的定义，$Cx_0=0$意思是，对一切$f\in X^*$有

$$(Cx_0)(f)=g_{x_0}(f)=f(x_0)=0$$

由引理 2.9-2 知$x_0=0$。因此，由定理 2.6-10 映象C有逆$C^{-1}:\mathscr{R}(C)\to X$，这里$\mathscr{R}(C)$是$C$的值域。由同一个定理又知$\dim\mathscr{R}(C)=\dim X$。于是由定理 2.9-1,

$$\dim X^{**}=\dim X^{*}=\dim X$$

联合这两个等式得，$\dim \mathscr{R}(C)=\dim X^{**}$。因此 $\mathscr{R}(C)=X^{**}$，这是因为$\mathscr{R}(C)$是一个向量空间．而 X^{**} 的真子空间的维数一定小于 $\dim X^{**}$（由定义 2.1-8）。根据定义，就证明了代数自反性。∎

习　题

1. 决定由

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所表示的算子 $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$的零空间。

2. 设 $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$，$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\mapsto(\xi_1,\xi_2,-\xi_1-\xi_2)$．求 $\mathscr{R}(T)$，$\mathscr{N}(T)$ 和T 的矩阵表示。

3. 求 $\mathbf{R}^3$ 的基$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$的对偶基。

4. 设$\{f_1,f_2,f_3\}$ 是$\mathbf{R}^3$ 的基 (e_1,e_2,e_3) 的对偶基，其中 $e_1=(1,1,1)$，$e_2=(1,1,-1)$，$e_3=(1,-1,-1)$。求 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，这里 $x=(1,0,0)$

5. 如果 f 是 n 维向量空间的线性泛函，f 的零空间 $\mathscr{N}(f)$可能有什么维数？

6. 求$\mathbf{R}^3$ 上的一线性泛函 f 的零空间的一个基，这里 f 由 $f(x)=\xi_1+\xi_2-\xi_3$，$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$定义。

7. 如果 $f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3$，其中 $\alpha_1\neq 0$。按 6 题中的问题求解。

8. 如果 Z 是 n 维向量空间 X 的 $n-1$ 维子空间。试证明，Z 是 X上的一个适当线性泛函f的零空间，除相差一个纯量倍数，此泛函是唯一决定的。

9. 设X为次数不超过定数n的一切实变量的实多项式以及多项式$x=0$所成的向量空间（在通常关于次数的讨论中 $x=0$ 的次数不作定义）．又设 $f(x)=x^{(k)}(a)$，（$x\in X$在定点 $a\in\mathbf{R}$ 的第 k 阶导数，k 固定)．证明，f 是 X 上的线性泛函。

10. 设 Z 是 n 维向量空间X的真子空间，又设 $x_0\in X-Z$。证明，存在X上的一个线性泛函 f，使得对一切 $x\in Z$，$f(x)=0$ 而 $f(x_0)=1$。

11. 如果 x,y 是有限维向量空间中的不同向量，证明存在X上的线性

泛函使得 $f(x)\neq f(y)$.

12. 如果 $f_1,\cdots,f_p$ 是 n 维向量空间 X 上的线性泛函, $p<n$, 证明,存在 X 中的向量 $x\neq 0$, 使得 $f_1(x)=0,\cdots,f_p(x)=0$.试问关于线性方程组这导致了什么结果.

13. (线性延拓) 设 Z 是 n 维向量空间 X 的真子空间, 又设 f 是 Z 上的线性泛函. 证明 f 可以线性地延拓到 X, 即是, 存在 X 上的线性泛函 $\tilde{f}$, 使得 $\tilde{f}|_Z=f$.

14. 设由 $f(x)=4\xi_1-3\xi_2, x=(\xi_1,\xi_2)$ 定义的 $\mathbf{R}^2$ 上的线性泛函.视 $\mathbf{R}^2$ 为 $\mathbf{R}^3$(由 $\xi_3=0$ 给出)的子空间. 试决定 f 从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^3$ 上的一切线性延拓.

15. 设 $Z\subset\mathbf{R}^3$ 是由 $\xi_2=0$ 表示的子空间,又设 Z 上由 $f(x)=(\xi_1-\xi_2)/2$ 定义了泛函 f. 求 f 从 Z 到 $\mathbf{R}^3$ 上的线性延拓 $\tilde{f}$, 使得 $\tilde{f}(x_0)=k$ (为给定常数), 这里 $x_0=(1,1,1)$. 问 $\tilde{f}$ 是唯一的吗?

2.10 算子的赋范空间. 对偶空间

在 2.7 节中我们定义了有界线性算子的概念, 并用一些基本例子说明这个概念, 使读者对基本例子中那些算子的重要性有初步印象. 本节的目的如下: 任取两赋范空间 X 与 Y (两个都是实的或复的). 考察由 X 映入 Y 中的一切有界线性算子组成之集

$$B(X,Y),$$

即是, 每个这样的算子是定义在整个 X 上而值域在 Y 中. 我们要证明, $B(X,Y)$ 可以成为一赋范空间①.

事情十分简单. 首先, $B(X,Y)$ 可以成为向量空间, 如果我们按自然方法定义两算子 T_1, $T_2\in B(X,Y)$ 的和 T_1+T_2 为

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x$$

而 $T\in B(X,Y)$ 与纯量 α 的积定义为

$$(\alpha T)x=\alpha Tx.$$

回忆引理 2.7-2(b) 立即有以下结果:

---

①字母 B 在 $B(X,Y)$ 中表示 Bounded(有界). $B(X,Y)$ 的另一记号是 $L(X,Y)$, L 表示线性. 两种记号都通用, 我们一直沿用 $B(X,Y)$.

2.10-1 定理(空间B(X,Y)) 从赋范空间 X 到赋范空间 Y 中一切有界线性算子所成的向量空间 $B(X,Y)$ 是赋范空间，其范数定义为

$$(1)\qquad \|T\|=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}\|Tx\|.$$

在什么情况下 $B(X,Y)$将是 Banach 空间？这是中心问题。下面的定理回答了这个问题。值得注意，定理的条件不涉及X的完备性；即是，X 是完备的或是不完备的均可。

2.10-2 定理（完备性） 如果Y是 Banach 空间，则$B(X,Y)$是 Banach 空间。

证明。考虑 $B(X,Y)$中的任意 Cauchy 序列(T_n)，以下证明(T_n)收敛于算子 $T\in B(X,Y)$。由于 (T_n)是 Cauchy 序列。对每个 $\varepsilon>0$，存在N使得

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon$$

对一切 $x\in X$与 $m,n>N$。于是得[见2.7节(3)]

$$(2)\qquad \|T_nx-T_mx\|=\|(T_n-T_m)x\|\leqslant\|T_n-T_m\|\|x\|<\varepsilon\|x\|.$$

现对任意固定的 x 与给定的 $\tilde{\varepsilon}$，可以选取 $\varepsilon=\varepsilon_x$，使得 $\varepsilon_x\|x\|<\tilde{\varepsilon}$。则由(2)我们有$\|T_nx-T_mx\|<\tilde{\varepsilon}$，因而$(T_nx)$是 Y 中的Cauchy序列。由于 Y 是完备的，(T_nx)收敛，比方说，$T_nx\to y$。显然，此极限 $y\in Y$ 是依赖于 $x\in X$的选取。这就定义了一算子 $T:X\to Y$，这里 $y=Tx$。算子T是线性的，因为

$$\lim T_n(\alpha x+\beta z)=\lim(\alpha T_nx+\beta T_nz)=\alpha\lim T_nx+\beta\lim T_nz.$$

以下证明T是有界的且 $T_n\to T$，即，$\|T_n-T\|\to 0$。

因为(2)对每个 $m>N$成立，且 $T_mx\to Tx(m\to\infty)$。利用范数的连续性，则由(2)得，对每个 $n>N$ 与一切 $x\in X$

$$(3)\qquad \|T_nx-Tx\|=\|T_nx-\lim_{m\to\infty}T_mx\|$$

$$=\lim_{m\to\infty}\|T_n x-T_m x\|\leqslant\varepsilon\|x\|.$$

这表明(T_n-T)，当$n>N$，是有界线性算子。因为T_n是有界的，则$T=T_n-(T_n-T)$是有界的，即$T\in B(X,Y)$。此外，如果在(3)中对范数为1的一切x取上确界，得

$$\|T_n-T\|\leqslant\varepsilon \qquad (n>N)$$

因此，$\|T_n-T\|\to 0$。▌

这个定理有一关于X的对偶空间X'的重要结果。X'的定义如下。

2.10-3 定义（对偶空间X′） 设X为赋范空间。则X上一切有界线性泛函构成一赋范空间，其范数定义为

$$(4)\qquad \|f\|=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|f(x)|$$

［见2.8节(2)］。称此空间为X的对偶（或共轭）空间①并记为X'。▌

因为X上的线性泛函映X到**R**或**C**中（X的纯量域）。由于在通常度量下，**R**或**C**是完备的，我们看到X'是$B(X,Y)$当Y是完备空间**R**或**C**的情形，因此定理2.10-2是适用的，于是有

2.10-4 定理(对偶空间) 赋范空间X的对偶空间X'是Banach空间（不管X是否完备）。

泛函分析中有一基本原则，研究一个空间常常是与其对偶空间相联系起来考虑，为此值得考虑一些经常出现的空间并弄清它们的对偶空间是什么。在这方面同构的概念很有帮助，回顾2.8节，我们给出以下定义。

---

① 有时称为对偶的，伴随空间或共轭空间．请回忆2.8节．X的代数对偶空间X^*是X上一切线性泛函的向量空间．

赋范空间 X 到赋范空间 $\tilde{X}$ 上的**同构**是一保持范数的双射线性算子 $T: X \to \tilde{X}$。即是，对一切 $x \in X$，

$$\|Tx\| = \|x\|。$$

(因此T是等距的)，这时 X 叫做与$\tilde{X}$ 同构，且X与$\tilde{X}$叫做同构的赋范空间。从抽象观点看，这时 X与$\tilde{X}$完全相同，同构只不过是对元素重新命名而已。（或看作将空间中的每个点附贴一个标签"T"上去）.

第一个例子表明 $\mathbf{R}^n$ 的对偶空间是同构于$\mathbf{R}^n$；我们就简单说成 $\mathbf{R}^n$ 的对偶空间是 $\mathbf{R}^n$，在其它的例子中也采用类似说法。

例

2.10-5 空间 $\mathbf{R}^n$ $\mathbf{R}^n$ 的对偶空间是 $\mathbf{R}^n$。

证明．由定理 2.7-8，$\mathbf{R}^{n\prime} = \mathbf{R}^{n*}$，且对每个 $f \in \mathbf{R}^{n*}$，由2.9节(5)有表达式

$$f(x) = \sum \xi_k \nu_k \qquad \nu_k = f(e_k)$$

（从 1 到 n 求和）．由 Cauchy-Schwarz 不等式(1.2节)

$$|f(x)| \leqslant \sum |\xi_k \nu_k| \leqslant \left(\sum \xi_j^2\right)^{1/2} \left(\sum \nu_k^2\right)^{1/2} = \|x\| \left(\sum \nu_k^2\right)^{1/2}.$$

对范数为 1 的一切 x 取上确界，得

$$\|f\| \leqslant \left(\sum \nu_k^2\right)^{1/2}.$$

但当 $x = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$时，Cauchy-Schwarz 不等式成为等式，故必有

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \nu_k^2\right)^{1/2}.$$

这就证明了 f 的范数是 Euclidean 范数，且 $\|f\| = \|c\|$，$c = (\nu_k) \in \mathbf{R}^n$ 因此，$\mathbf{R}^{n\prime}$到$\mathbf{R}^n$ 上的映象 $f \mapsto c = (\nu_k)$，$(\nu_k) = f(e_k)$ 保持范数，又因它是线性，双射，所以它是同构。 ∎

2.10-6 空间 l^1 空间 l^1 的对偶空间是 l^∞。

证明。l^1 的一个 Schauder 基(2.3 节)是 (e_k)，$e_k=(\delta_{kj})$，其第 k 项为 1，其余的项为零。则每个 $x\in l^1$ 有唯一的表达式

$$(5)\qquad x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k.$$

考察任一 $f\in l^{1\prime}$，$l^{1\prime}$ 是l^1的对偶空间。由于 f 是线性且有界，

$$(6)\qquad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\nu_k \qquad \nu_k=f(e_k)$$

这里，数 $\nu_k=f(e_k)$ 由 f 唯一确定。又 $\|e_k\|=1$ 且

$$(7)\qquad |\nu_k|=|f(e_k)|\leqslant\|f\|\|e_k\|=\|f\| \qquad \sup_k|\nu_k|\leqslant\|f\|.$$

因此 $(\nu_k)\in l^\infty$

另一方面，对每个 $b=(\beta_k)\in l^\infty$ 可以得到一个 l^1 上的对应的有界线性泛函 g。事实上，在 l^1 上，可以定义 g 为

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k\ ,$$

这里 $x=(\xi_k)\in l^1$。于是 g 是线性的，而 g 的有界性可以由

$$|g(x)|\leqslant\Sigma|\xi_k\beta_k|\leqslant\sup_j|\beta_j|\Sigma|\xi_k|=\|x\|\sup_j|\beta_j|$$

（从 1 到∞求和），得出。因此 $g\in l^{1\prime}$

最后证明 f 的范数是 l^∞ 上的范数。由(6)我们有

$$|f(x)|=|\Sigma\xi_k\nu_k|\leqslant\sup_j|\nu_j|\Sigma|\xi_k|=\|x\|\sup_j|\nu_j|$$

可见，

$$\|f\|\leqslant\sup_j|\nu_j|$$

由此式及(7)，得

$$(8)\qquad \|f\|=\sup_j|\nu_j|,$$

它是 l^∞ 上的范数，此式可记为 $\|f\|=\|c\|_\infty$，$c=(\nu_j)\in l^\infty$。这就证明了 $l^{1\prime}$ 到 l^∞ 上的双射，线性映象 $f\mapsto c=(\nu_j)$ 是一个同构。∎

2.10-7 空间 l^p l^p 的对偶空间是 l^q，$1<p<+\infty$，q 是 p 的共轭数，即是 $1/p+1/q=1$。

证明。l^p 的一个 Schander 基是 (e_k)，$e_k=(\delta_{kj})$ 与前例同。则每个 $x\in l^p$ 有唯一的表达式

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k. \tag{9}$$

考虑任一个 $f\in l^{p\prime}$，这里 $l^{p\prime}$ 是 l^p 的对偶空间，由于 f 是线性的且有界，则

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\nu_k, \qquad \nu_k=f(e_k). \tag{10}$$

设 q 是 p 的共轭数(见1.2-3)，考虑 $x_n=(\xi_k^{(n)})$，其中，

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}|\nu_k|^q/\nu_k & \text{如果 } k\leqslant n \text{ 且 } \nu_k\neq 0\\ 0 & \text{如果 } k>n \text{ 或 } \nu_k=0\end{cases} \tag{11}$$

将这代入(10)，得

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\nu_k=\sum_{k=1}^{n}|\nu_k|^q.$$

利用(11)与 $(q-1)p=q$，又得出

$$\begin{aligned}f(x_n)&\leqslant\|f\|\|x_n\|=\|f\|\left(\sum|\xi_k^{(n)}|^p\right)^{1/p}\\&=\|f\|\left(\sum|\nu_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p}\\&=\|f\|\left(\sum|\nu_k|^q\right)^{1/p}\end{aligned}$$

(从 1 到 n 求和)。综合上两式得

$$f(x_n)=\sum|\nu_k|^q\leqslant\|f\|\left(\sum|\nu_k|^q\right)^{1/p}.$$

用右端最后一个因子去除此式，并利用 $1-1/p=1/q$，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\nu_k|^q\right)^{1-1/p}=\left(\sum_{k=1}^{n}|\nu_k|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|.$$

由于 n 是任意的，让 $n\to\infty$，得

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\nu_k|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|. \tag{12}$$

因此 $(\nu_k)\in l^q$.

反之，对任意的 $b=(\beta_k)\in l^q$，可得 l^p 上的一个对应的有界线性泛函 g. 事实上，令

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k$$

这里 $x=(\xi_k)\in l^p$. 则 g 是线性的，而 g 的有界性可由 1.2 节(10) Hölder 不等式得出，因此 $g\in l^{p'}$.

最后，证明 f 的范数是空间 l^q 上的范数. 由(10) 与 Hölder 不等式我们有

$$|f(x)|=|\sum\xi_k\nu_k|\leqslant(\sum|\xi_k|^p)^{1/p}(\sum|\nu_k|^q)^{1/q}$$
$$=\|x\|(\sum|\nu|^q)^{1/q}$$

（从 1 到∞求和）；因此得

$$\|f\|\leqslant(\sum|\nu_k|^q)^{1/q}.$$

由(12). 可知

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\nu_k|^q\right)^{1/q}. \tag{13}$$

这可以写成 $\|f\|=\|c\|_q$，这里 $c=(\nu_k)\in l^q$ 而 $\nu_k=f(e_k)$. 从 $l^{p'}$ 到 l^q 上的映象 $f\mapsto c$ 是线性的又是双射，并由 (13) 知它是保持范数的，所以它是一个同构. ∎

这些以及类似的例子的意义是什么呢？在应用中，知道一

些重要空间上的有界性泛函的一般形式是十分有用的。在这方面对许多空间已作过研究。我们给出了 $\mathbf{R}^n$，l^1，与 $l^p(p>1)$ 上有界线性泛函的一般表达式。空间 $C[a,b]$ 将在以后 4.4 节中考虑，因为需要另外的工具（特别是 Hahn—Banach 定理）。

更进一步，回忆 2.8 节中讨论的第二代数对偶空间 X^{**}，可以提出，是否研究 X 的第二对偶空间 $X''=(X')'$ 也是有意义的呢？回答是肯定的，但要推迟到 4.6 节，在那里，为了得到这方面的本质性的结果，还需要引进适当的工具。现转到某些稍简单的课题，即是，内积空间与 Hilbert 空间。这些空间是特殊形式的赋范空间，在应用中极为重要。

习　　题

1. 向量空间 $B(X,Y)$ 的零元素是什么？按定义 2.1-1，$T\in B(X,Y)$ 的逆是什么？

2. 课文中的算子与泛函都是定义在整个空间 X 上。证明，没有这个假定。在泛函的情况仍有以下定理。如果 f 与 g 都是有界线性泛函其定义域在赋范空间 X 中，则对任意非零纯量 α 与 β，线性组合 $h=\alpha f+\beta g$ 是定义域为 $\mathscr{D}(h)=\mathscr{D}(f)\cap\mathscr{D}(g)$ 上的有界线性泛函。

3. 将定理 2 推广到有界线性算子 T_1 与 T_2。

4. 设 X 与 Y 为赋范空间，而 $T_n: X\to Y\ (n=1,2,\cdots)$ 为有界线性算子。证明，如果 $T_n\to T$，则对每个 $\varepsilon>0$，存在 N 使得对一切 $n>N$ 与一切任意给定的闭球中的 x，都有 $\|T_nx-Tx\|<\varepsilon$。

5. 证明 2.8-5 与 2.10-5 是一致的。

6. 如果 X 是一切有序 n 元实数组所成的空间其范数为 $\|x\|=\max_j|\xi_j|$，这里 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，问在 X 的对偶空间中对应的范数是什么？

7. 对于一切有序 n 元实数组所成的空间 X，从 2.10-6 可以引出什么结论？

8. 证明 c_0 空间的对偶空间是 l^1（见 2.3 节第一题）

9. 证明，向量空间 X 上的线性泛函由 f 在 X 上的 Hamel 基的值唯一决定。

10. 设X与$Y\neq\{0\}$为赋范空间，$\dim X=\infty$。证明，至少存在一个无界线性算子$T:X\to Y$。(用一 Hamel 基)

11. 如果X是一个赋范空间且$\dim X=\infty$，证明其对偶空间X'与代数对偶空间X^*不恒同。

12. (完备性)课文中的例可以证明某些空间的完备性，怎样证明？可以证明那些空间？

13. (零化子) 设$M\neq\phi$是赋范空间X的任一子集，M的零化子M^a定义为X上的一切有界线性泛函的集它在M上处处为零。于是M^a是X的对偶空间X'的子集。证明，M^a是X'的向量子空间且是闭的。X^a与$\{0\}^a$是什么。

14. 如果M是n维赋范空间X的m维子空间，证明M^a是X'的$(n-m)$维子空间。将此结果叙述为关于线性方程组的一个定理。

15. 设$M=\{(1,0,-1),(1,-1,0),(0,1,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$。求出$M^a$的一个基。

第 三 章

内积空间 • Hilbert 空间

在赋范空间，正如在初等向量代数里一样，可以把向量相加与乘向量以纯量．更进一步，此空间上的范数推广了向量长度这一初等概念．然而，在一般的赋范空间中还缺少的，也是我们希望可能有的是与熟悉的点积

$$a \cdot b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

相类似的概念，及由此导出的重要公式

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

和正交性（垂直性）条件

$$a \cdot b = 0 .$$

在许多应用中它们都是重要的工具．因此提出了这样的问题，是否点积和正交性可以推广到任意向量空间．事实上，这可以做到，且导致了内积空间和完备内积空间，也称后者为Hilbert空间．

我们将要看到，内积空间是特殊的赋范空间．从历史上看，内积空间与Hilbert空间早于赋范空间，它们的理论也更丰富而且保持许多Euclidean空间的特征，其中心概念是正交性．事实上，内积空间大概是Euclidean空间最自然的推广．读者应注意，这个领域的概念与证明是极其和谐和优美的．整个理论最初为D. Hilbert(1912) 在研究积分方程中给出．经常采用的几何

记号与术语与Euclidean几何的相类似，是E. Schmidt (1908)遵循G. Kowalewski的建议创造的（在他的论文第56页提到）。这些空间从过去到现在，在泛函分析的应用中一直是最有用的空间。

重要概念，主要内容方向摘要

内积空间X（定义3.1-1）是一向量空间，且在其上定义了内积$\langle x,y\rangle$，它是三维空间向量点积的推广。由此定义

(Ⅰ) 范数$\|\cdot\|$：$\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}$

(Ⅱ) 正交：$\langle x,y\rangle=0$。

Hilbert空间H是完备内积空间，内积空间和Hilbert空间的理论比一般赋范空间及Banach空间的理论更为丰富，表现在

(i) H可表为闭子空间及其正交补的直接和的形式(3.3-4)。

(ii) 正交集与正交序列与H中元素相应的表示式。(3.4节，3.5节)。

(iii) 用内积表有界线性泛函的Riesz表示(3.8-1)。

(iv) 有界线性算子T的Hilbert共轭算子T^*(3.9-1)。

正交集与正交序列仅当它们是完全集时才确有兴趣(见3.6)。Hibert共轭算子可以定义算子类（自伴算子，酉算子，正规算子；见3.10），它们在应用上很重要。

3.1 内积空间·Hilbert空间

本章考虑的空间定义如下

3.1-1 定义(内积空间，Hilbert空间) 内积空间（或Pre-Hilbert空间）是一个向量空间X，且在X上定义了一个内积。

Hilbert 空间是完备的内积空间（完备是在内积引出的度量的意义下，见下(2)），这里，X上的内积是$X\times X$到X的纯量域K中的一映象，即是，对每一对向量x与y，对应一纯量，记为

$$\langle x,y\rangle$$

叫做 x 与 y 的内积①，使得对任何向量x,y,z及纯量α有

(IP1) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$

(IP2) $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$

(IP3) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$

(IP4) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$

$\langle x,x\rangle=0 \iff x=0$

X上的内积引出X上的一个范数

$$(1)\qquad \|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\qquad (\geqslant 0)$$

和X上的一个度量

$$(2)\qquad d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}\ .\ \blacksquare$$

因此内积空间是赋范空间，Hilbert 空间是 Banach 空间。

在$(IP3)$中的一杠表复共轭，当X是实向量空间时，简化为

$$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle \qquad \text{(对称性)}$$

(1) 式满足范数公理$(N1)$到$(N4)$（见2.2），其证明在下节开始时给出。

从$(IP1)$到$(IP3)$得到公式

$$(3)\quad \begin{aligned}&(a)\quad \langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta(y,z)\\&(b)\quad \langle x,\alpha y\rangle=\bar{\alpha}\langle x,y\rangle\\&(c)\quad \langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\bar{\beta}\langle x,z\rangle\end{aligned}$$

这些公式常常用到。(3a)表内积对第一个因子是线性的，(3c)中

---

① 或称纯量积，但一定不要与向量空间中向量乘以纯量之积相混淆。

记号$\langle , \rangle$表内积是十分通用的。象本书那样的一本初等教材采用这个记号比采用另一个也通用的记号（,）好。后者可能与有序对记号相混（如向量分量表示，乘积空间的元素，二元函数的两个自变量等等）。

的右端出现共轭复数 $\bar{\alpha}$ 与 $\bar{\beta}$，我们说内积对第二个因子是共轭线性的。为了同时表述这两个性质，我们称内积是一个半线性的，即"$1\frac{1}{2}$线性。"因共轭线性通常叫半线性。这个称呼没有多大启示性，我们不用它。

读者通过直接计算可以证明，内积空间上的范数满足平行四边形等式

$$(4) \qquad \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

这个名称来自初等几何。如果注意到范数是向量长度的推广，从图23就可看出这个事实。值得注意的是，在现在如此一般的框架中这个等式仍然成立。

可以断定，如果一个范数不满足(4)，则不可能由一个内积按(1)来得出。这种范数的确存在，例子将在下面给出。于是可以有以下的明确的论断。

并非一切赋范空间都是内积空间。

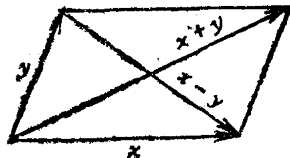


图23　平面上以x与y为边的平行四边形

在考察例子之前，先定义正交性概念，它是整个理论的基础。在三维空间中二向量的点积为零，这些向量是正交的，即是，它们是成垂直或者其中至少一个为零。这一启示就提出了以下定义。

3.1-2 (正交性)　内积空间X的元素x称为正交于$y\in X$，如果

$$\langle x,y\rangle=0,$$

这也说成x与y是正交的，且记为$x\perp y$。类似地，对子集$A,B\subset X$，如果对一切$a\in A$，都有$x\perp a$，则记$x\perp A$又当$a\perp b$对一切$a\in A$及$b\in B$成立，则记为$A\perp B$。▌

例

3.1-3 Euclidean 空间R^n 空间R^n是 Hilbert空间，其内积定义为

$$(5)\qquad \langle x,y\rangle=\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_n\eta_n,$$

其中 $x=(\xi_j)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 而 $y=(\eta_j)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$。

事实上，由(5)得

$$\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}=(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{1/2}.$$

由此，它的 Euclidean 度量定义为

$$d(x,y)=\|x-y\|=\langle x-y,x-y\rangle^{1/2}$$
$$=[(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2]^{1/2}$$

（见2.2-2）。完备性已在1.5-1中证明了。

如果 $n=3$，公式(5)给出通常的点积

$$\langle x,y\rangle=x\cdot y=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3,$$

这里 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$。而正交性

$$\langle x,y\rangle=x\cdot y=0$$

与垂直这个初等概念是一致地。

3.1-4 酉空间C^n 2.2-2 中定义的空间 C^n 是Hilbert空间，其内积定义为

$$(6)\qquad \langle x,y\rangle=\xi_1\bar{\eta}_1+\cdots+\xi_n\bar{\eta}_n.$$

事实上，由(6)得范数为

$$\|x\|=(\xi_1\bar{\xi}_1+\cdots+\xi_n\bar{\xi}_n)=(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2)^{1/2}$$

从这里也看出为什么在(6)式中必须取复共轭$\bar{\eta}_j$，这样就有$\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$，这就是$(IP3)$，因此$\langle x,x\rangle$是实的。

3.1-5 空间 $L^2[a,b]$。在例 2.2-7 中定义了范数

$$\|x\|=\left(\int_a^b x(t)^2dt\right)^{1/2}.$$

此范数可以从下式定义的内积

$$(7)\qquad \langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)y(t)\,dt$$

而得到。

在例2.2-7中，为了简单起见，假定函数是实的，而在应用中通常去掉这个限制，考虑的是复值函数（实变数$t\in[a,b]$）。这些复值函数构成一复向量空间，如果定义内积

$$(7^*)\qquad \langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

则成一内积空间，其中一杠表示复共轭，由此内积引出的范数为

$$\|x\|=\left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

相应于(7)的完备度量空间是实空间$L^2[a,b]$（2.2-7）。类似地，相应于(7^*)的完备度量空间是复空间$L^2[a,b]$。下节将看到，内积可以从内积空间延拓到它的一完备空间上，如果与现在的讨论相结合，这就暗示$L^2[a,b]$是Hilbert空间。

3.1-6 Hilbert序列空间 l^2 空间l^2(见2.2-3)是一个Hilbert空间，其内积定义为

$$(8)\qquad \langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\bar{\eta}_j.$$

此级数的收敛性由Cauchy-Schwarz不等式(11)(1.2节)以及$x,y\in l^2$得出。我们看到(8)是(6)的推广。其范数定义为

$$\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2\right)^{1/2}$$

完备性已于1.5-4中证明。

l^2是Hilbert空间的原型。它是D. Hilbert(1912)在积分方程研究中引进并加以研究的。而Hilbert空间公理化的定义他

并未给出，直到晚些时候，J. Von Neumann(1927)在他的论文论量子力学的数学基础 *pp*.15-17 才给了出来。也见于J. Von Neumann(1929-30)。*pp*.63-66，与M. H. Stone(1932) *pp*.3-4。当时定义中包含可分性条件。这个条件从定义中去掉是 H. Löwig(1934)，F. Rellich(1934)与F. Riesz(1934) 的工作。他们证明了对绝大部分理论，这个条件是不必要的限制。(这些论文都列在附录 3 中)

3.1-7 空间 l^p 空间 l^p，$p\neq 2$，不是内积空间，因此，更不是 Hilbert 空间。

证明。这个论断的意思是l^p 的范数，当$p\neq 2$ 时，不可能由内积得到。为此，我们证明这个范数不满足平行四边形等式(4)。事实上，取 $x=(1,1,0,0,\cdots)\in l^p$ 与 $y=(1,-1,0,0,\cdots)\in l^p$，经过计算得

$$\|x\|=\|y\|=2^{1/p},\qquad \|x+y\|=\|x-y\|=2.$$

可见，如果 $p\neq 2$ 则(4)不满足。

l^p 是完备的(见1.5-4)。因此 l^p 当其 $p\neq 2$ 时是一 Banach 空间，但不是 Hilbert 空间。对于下一例，同样的结论成立。

3.1-8 空间 C[a,b] 空间 $C[a,b]$ 不是内积空间，因此也不是 Hilbert 空间。

证明。下证由下式定义的范数

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|\qquad J=[a,\ b]$$

不可能由内积得出，因为这个范数不满足平行四边形等式(4)。事实上，如果 $x(t)=1$，$y=(t-a)/(b-a)$。则$\|x\|=1$，$\|y\|=1$ 且

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a}.$$

因此，$\|x+y\|=2$，$\|x-y\|=1$。因而

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5 \quad 但 \quad 2(\|x\|^2+\|y\|^2)=4$$

证毕。 ▮

最后，叙述下面之一有趣的事实。一个内积对应一个范数，此范数由(1)得出。值得注意，反之，从相应的范数可以"重新发现"该内积。事实上，读者可直接计算来验证，对实内积空间，有

$$(9) \qquad \langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2).$$

而对复向量空间

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),$$

$$(10) \qquad \mathrm{Im}\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2).$$

公式(10)有时称为极化恒等式。

习　　题

1. 证明(4)
2. (Pythagorean 定理) 如果在内积空间X中$x\perp y$，证明(图24)

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

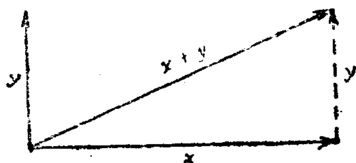


图24　平面上 Pythagorean 的图示

将此结果推广到m个相互正交的向量。

3. 如果2题中的X是实的，试证明，反过来，给定的这个关系蕴含$x\perp y$。证明，如果X是复空间时$x\perp y$不必成立。举例说明之。

4. 如果内积空间X是实的，证明条件$\|x\|=\|y\|$蕴含$\langle x+y, x-y\rangle=0$。如果$X=R^2$，其几何意义是什么？如果$X$是复的，这个条件蕴含什么？

5. (Appolonius恒等式)直接计算来验证，对内积空间任意元素有

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\|z-\frac{1}{2}(x+y)\|^2.$$

证明，这个恒等式也可以从平行四边形等式得出。

6. 设$x\neq 0$，$y\neq 0$。(a)如果$x\perp y$，证明$\{x,y\}$是一线性无关集。(b)推广此结果到相互正交的非零向量$x_1, \cdots, x_m$。

7. 如果在内积空间中，对一切x有$\langle x,u\rangle=\langle x,v\rangle$，试证明$u=v$。

8. 证明(9)。

9. 证明(10)。

10. 设z_1与z_2为复数。证明，$\langle z_1, z_2\rangle=z_1\bar{z}_2$表一内积，它产生复平面上通常的度量。问在什么条件下有正交性？

11. 设X是一切有序复数对所成的向量空间，我们能够从一个内积得出X上的范数吗？

$$\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2| \qquad [x=(\xi_1, \xi_2)].$$

12. 在3.1-6中，$\|x\|$是什么？设$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$，这里 (a) $\xi_n=2^{-n/2}$，(b) $\xi_n=\dfrac{1}{n}$。

13. 验证3.1-5中的内积对于连续函数满足条件($IP1$)到($IP4$)。

14. 证明$C[a,b]$中的范数在线性变换$t=\alpha\tau+\beta$下是不变的。利用这一结论来证明3.1-8的论断。(把$[a,b]$映成$[0,1]$然后考虑函数$\tilde{x}(\tau)=1$，$\tilde{y}(\tau)=\tau$，这里$\tau\in[0,1]$。)

15. 如果X是有限维向量空间而(e_j)是X的一个基。证明X上的一个内积由它的值$\gamma_{jk}=\langle e_j, e_k\rangle$完全决定。试问我们能用完全任意的方式选取这样的纯量γ_{jk}吗？

3.2 内积空间的进一步性质

首先，我们应当验证前节中的(1)式定义了一个范数：

2.2节中的$(N1)$与$(N2)$可以由$(IP4)$得出，$(N3)$根据$(IP2)$与$(IP3)$得到；事实上

$$\|\alpha x\|^2=\langle \alpha x,\alpha x\rangle=\alpha\bar{\alpha}\langle x,x\rangle=|\alpha|^2\|x\|^2$$

最后，$(N4)$包括在以下引理中。

3.2-1 引理（Schwarz 不等式，三角不等式） 内积与其相应的范数满足Schwarz 不等式及三角不等式：

(a)

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\| \qquad \text{(Schwarz 不等式)}, \tag{1}$$

这里等号成立当且仅当$\{x,y\}$是一线性无关集。

(b)

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \qquad \text{(三角不等式)} \tag{2}$$

这里等号成立当且仅当① $y=0$ 或 $x=cy$（c为实数且$\geqslant 0$）。

证明。(a)如果$y=0$，则(1)成立，因为$\langle x,0\rangle=0$。设$y\neq 0$，对每个纯量α，我们有

$$\begin{aligned}0\leqslant\|x-\alpha y\|^2&=\langle x-\alpha y,x-\alpha y\rangle\\&=\langle x,x\rangle-\bar{\alpha}\langle x,y\rangle-\alpha[\langle y,x\rangle-\bar{\alpha}\langle y,y\rangle].\end{aligned}$$

如果选择$\bar{\alpha}=\langle y,x\rangle/\langle y,y\rangle$。则上面方括号中的式子为零。于是得

$$0\leqslant\langle x,x\rangle-\frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle=\|x\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

其中用到$\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$。现在，乘以$\|y\|^2$，将最后一项移到左端并取平方根，我们得出(1)。

在这个推导中，等式成立的充要条件是$y=0$或

① 此条件对等式中的x与y是完全对称的，因为$x=0$包括在$x=cy$中（当$c=0$），$y=kx$ $k=\frac{1}{c}$也如此($c>0$)。

$0=\|x-ay\|^2$，因此 $x-ay=0$，所以$x=ay$。这表明了$\{x,y\}$是线性相关的。

(b) 现证(2)。由

$$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2.$$

及 Schwarz 不等式

$$|\langle x,y\rangle|=|\langle y,x\rangle|\leqslant\|x\|\|y\|.$$

再引用数的三角不等式得

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&\leqslant\|x\|^2+2|\langle x,y\rangle|+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

上式两端取平方根这就得出(2)。

在此推导中，等式成立的充要条件是

$$\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle=2\|x\|\|y\|.$$

等式的左端实为 $2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$，Re表示实部，由此与

(1) 得

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle=\|x\|\|y\|\geqslant|\langle x,y\rangle|. \tag{3}$$

由于复数的实部不能超过其绝对值。所以这必是等式，由 (a) 知这蕴含线性相关性，比方说，$y=0$ 或 $x=cy$。我们证明 c 是实的且$\geqslant0$。当(3)取等号时有 $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle=|\langle x,y\rangle|$。但如果一个复数等于其绝对值，其虚部必为零。因此，由 (3) 知 $\langle x,y\rangle=\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\geqslant0$，而 $c\geqslant0$ 可由下式得出

$$0\leqslant\langle x,y\rangle=\langle cy,y\rangle=c\|y\|^2.$$

Schwarz 不等式十分重要，今后要一再地在证明之中用到它。另一个常用的性质是内积的连续性。

3.2-2 引理（内积的连续性） 如果在内积空间中$x_n\to x$，$y_n\to y$，则 $\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$。

证明．利用数的三角不等式及 Schwarz 不等式，得出

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|$$
$$\leqslant |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle|$$
$$\leqslant \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \to 0$$
这是因为当 $n\to\infty$时 $y_n - y\to 0$ 与 $x_n - x\to 0$。∎

作为这个引理的第一个应用，我们证明每个内积空间可以完备化。此完备化空间是 Hilbert 空间，且除去同构不计之外是唯一的。现定义内积空间的同构如下（2.8节讨论中已涉及）。

同一数域上的内积空间X到内积空间$\tilde{X}$上的**同构**T是一个双射线性算子$T:X\to\tilde{X}$，它保持内积，即是，对一切 $x,y\in X$

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle.$$

这里，我们用同一记号表在X与$\tilde{X}$上的内积，为的是简化。X叫做与$\tilde{X}$同构，且X与$\tilde{X}$叫做同构的内积空间。注意，T 的双射及线性性质保证T是X到$\tilde{X}$上的向量空间同构，所以T保持内积空间的全部结构。T也是X到$\tilde{X}$上的等距，因为X与$\tilde{X}$中的距离由X与$\tilde{X}$上的内积定义的范数决定。

下面是内积空间完备化定理。

3.2-3 定理（完备化） 对任意内积空间X，存在一个 Hilbert 空间H，和X到稠子空间$W\subset H$上的同构（映象）A。除同构（空间）外，空间H是唯一的。

证明。由定理2.3-2，存在一个Banach空间H，和一个X到稠子空间$W\subset H$上的等距映象A，由于在这个等距映象下的连续性，X中的元素的和与纯量与元素的积对应于W中的相应元素的和及纯量与元素的积。于是X，W都视为赋范空间时，A是X到W上的同构。引理3.2-2表明，可以在H上定义内积为

$$\langle\hat{x}, \hat{y}\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle,$$

这里的记号同于定理2.3-2（也同于1.6-2），即是(x_n)和(y_n)分别是$\hat{x}\in H$和$\hat{y}\in H$的代表。由于3.1节之(9)与(10)，我们看到，当视X与W为内积空间时，A是X到W上的同构。

定理2.3-2也保证了H的唯一性，除等距的不计外，即，H与$\widetilde{H}$是X的完备化时，则H与$\widetilde{H}$之间有等距$T: H\to\widetilde{H}$。和对A的情形一样推证，我们断定T一定是Hilbert空间H到Hilbert空间$\widetilde{H}$上的同构。■

内积空间X的**子空间**Y定义为X的向量子空间（见2.1节），其中的内积是X上的内积限制到$Y\times Y$。

类似地，Hilbert空间H**的子空间**Y定义为H的子空间。（Y按H的内积是内积空间）。注意，Y不必是Hilbert空间，因为Y可能不是完备的。事实上，由定理2.3-1与2.4-2，我们立即有以下定理中的(a)与(b)

3.2-4 定理（子空间） 设Y是Hilbert空间H的子空间，则

(a) Y是完备的当且仅当Y在H中是闭的。

(b) 如果Y是有限维的，则Y是完备的。

(c) 如果H是可分的，则Y也是可分的，更一般地，可分内积空间的每个子集是可分的。

(c) 的简单证明留给读者。

习　题

1. R^2和R^3中的Schwarz不等式是什么？给出关于这两种情况的另一个证明。

2. 给出l^2的子空间的例子。

3. 设X是多项式$x=0$（见2.9节第9题之注）及次数不大于2的t的多项式，$t\in[a,b]$，所成的内积空间，其内积为3.1节(7)所定义。证明X是

完备的。设Y由合于$x(a)=0$之一切$x\in X$所组成。Y是X的子空间吗？一切次数为 2 的$x\in X$构成X的子空间吗？

4. 证明。条件$y\perp x_n$与$x_n\to x$一起蕴含$x\perp y$。

5. 证明，设(x_n)为一内积空间中之序列，则条件$\|x_n\|\to\|x\|$与$\langle x_n,x\rangle\to\langle x,x\rangle$蕴含$x_n\to x$。

6. 就复平面这个特殊情况证明 5 题之论断。

7. 证明，在内积空间中，$x\perp y$当且仅当对一切纯量α都有$\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$（见图25。）

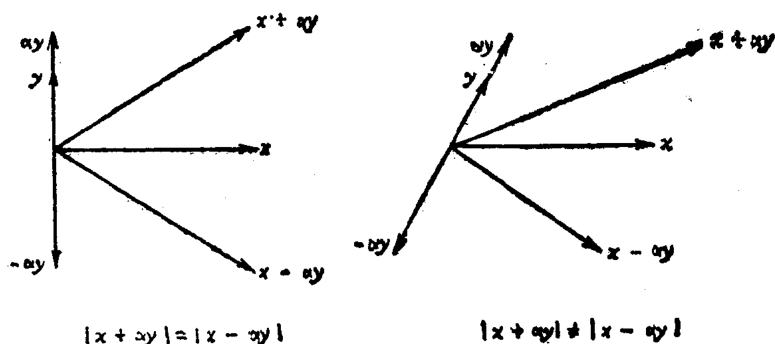


图25　在 Euclidean平面上第 7 题的图示

8. 证明，在内积空间中，$x\perp y$当且仅当$\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$对一切纯量$\alpha$成立。

9. 设V是$J=[a,b]$上一切连续复值函数的向量空间。又设$X_1=(V,\|\cdot\|_\infty)$，这里$\|x\|_\infty=\max\limits_{t\in J}|x(t)|$；并设$X_2=(V,\|\cdot\|_2)$，这里

$$\|x\|_2=\langle x,x\rangle^{1/2}\qquad \langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

证明，X_1到X_2上的恒等映射是连续的。（它不是一个同胚。X_2不是完备的。）

10. （零算子）设$T:X\to X$是复向量空间上的有界线性算子。如果对一切的$x\in X$，$\langle Tx,x\rangle=0$，证明$T=0$。

证明在实内积空间中此命题不真。提示，考察 Euclidean 平面上的一个旋转。

3.3 正交补与直接和

在度量空间X中，由元素$x\in X$到非空子集$M\subset X$的距离δ定义为

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in M} d(x,\tilde{y}) \qquad (M\neq\phi)$$

在赋范空间中，这个距离变成

$$(1)\qquad \delta=\inf_{\tilde{y}\in M}\|x-\tilde{y}\| \qquad (M\neq\phi)$$

一个简单的解释性例子，在图26中给出。

我们将看到。判定是否存在点$y\in M$使

$$(2)\qquad \delta=\|x-y\|$$

这件事是重要的。直观地讲，是否有点$y\in M$与给定的点x最接近。如果存在着这样的点，它是否是唯一的。这是一个存在和唯一性问题。它具有理论上和应用上基本的重要意义。例如，在函数逼近理论里。

图27说明，甚至在最简单的空间中，如象Euclidean平面R^2就可能没有满足(2)的y，也可能刚好有一个这样的y，也可能有一个以上的y. 可以想象，在别的空间特别是无限维空间，情况必定更为复杂。对一般赋范空间而言情况的确如此（在第六章中将会看到）。但是，对Hilbert空间而言，情况仍然相当地简单。这是出人意料的，而且它有各种理论和应用上的结果。这是Hilbert空间的理论较之一般Banach空间的理论简单的一个主要原因。

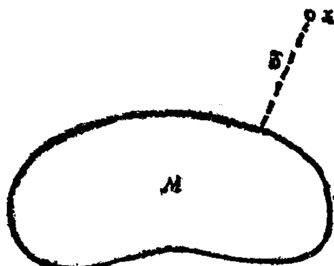


图26 在R^2平面上(1)的图示

为了考察在Hilbert空间中的这个存在唯一性问题，以及表

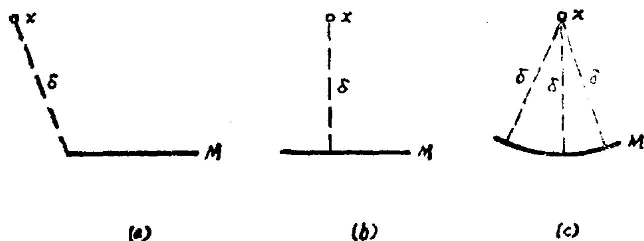


图27 (a)没有y. (b)有唯一的y. (c)有无限多y.满足 2的 $y\in M$ 的存在唯一性。这里$M\subset \mathbf{R}^2$是开线段[在(a),(b)],是一段圆弧[在(c)]

述关键性定理(下面的3.3-1),需要介绍两个有关的概念,这些概念的意义不局限于此。

联结向量空间X中给定两点x与y的**线段**定义为一切形如

$$z=\alpha x+(1-\alpha)y \qquad (\alpha\in \mathrm{R} \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

的$z\in X$所成之集。X的子集M叫做**凸的**,如果对一切$x,y\in M$,联结x与y的线段包含在M中。见图28。

例如,X的每个子空间Y是凸的。凸集的交是凸集。现在,可以提供本节中主要工具性结果。

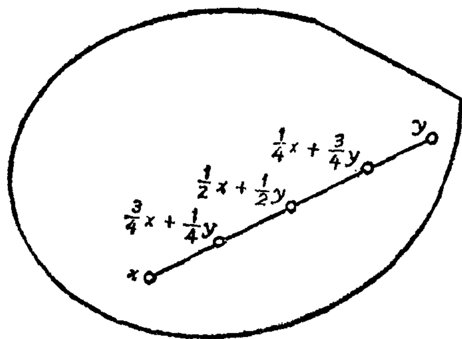


图28 凸集中的线段的图示

3.3-1 定理（极小化向量） 设 X 是内积空间，$M\neq\phi$ 是凸子集且完备（按内积导出的度量）．则对每个给定的 $x\in X$，存在唯一的 $y\in M$，使得

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in M}\|x-\tilde{y}\|=\|x-y\|. \tag{3}$$

证明．(a) 存在性．按下确界的定义，存在 M 中的序列 (y_n) 使得

$$\delta_n\to\delta,\quad 这里\quad \delta_n=\|x-y_n\|. \tag{4}$$

我们证明此 (y_n) 为 Cauchy 序列．记 $y_n-x=v_n$，则 $\|v_n\|=\delta_n$，且

$$\begin{aligned}\|v_n+v_m\|&=\|y_n+y_m-2x\|\\&=2\left\|\frac{1}{2}(y_n+y_m)-x\right\|\geqslant 2\delta.\end{aligned}$$

因为 M 是凸的，所以 $\frac{1}{2}(y_n+y_m)\in M$，又 $y_n-y_m=v_n-v_m$．因此，由平行四边形等式

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2=\|v_n-v_m\|^2&=-\|v_n+v_m\|^2+2(\|v_n\|^2+\|v_m\|^2)\\&\leqslant-(2\delta)^2+2(\delta_n^2+\delta_m^2).\end{aligned}$$

以及(4)，则 (y_n) 是 Cauchy 序列．由于 M 完备，则 (y_n) 收敛，比方说，$y_n\to y\in M$．既然 $y\in M$，我们有 $\|x-y\|\geqslant\delta$．由(4)式又有

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y_n\|+\|y_n-y\|=\delta_n+\|y_n-y\|\to\delta.$$

这表明 $\|x-y\|=\delta$．

(b) 唯一性．设 $y\in M$ 与 $y_0\in M$ 满足

$$\|x-y\|=\delta\quad 与\quad \|x-y_0\|=\delta.$$

下证 $y_0=y$．根据平行四边形等式

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2&=\|(y-x)-(y_0-x)\|^2\\&=2\|y-x\|^2+2\|y_0-x\|^2-\|(y-x)+(y_0-x)\|^2\\&=2\delta^2+2\delta^2+2^2\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2.\end{aligned}$$

在右端，$\frac{1}{2}(y+y_0)\in M$。所以

$$\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|\geqslant\delta.$$

得出右端不超过 $2\delta^2+2\delta^2-4\delta^2=0$。因此，$\|y-y_0\|\leqslant 0$。但显然有 $\|y-y_0\|\geqslant 0$。所以等式成立。因而有 $y_0=y$。 ▌

现在从任意凸集转到子空间，我们得到下面的引理，它是初等几何中一个熟知概念的推广。即对于给定的点 x，在给定的子空间 Y 中有唯一的一点 y 与 x 距离最小，此 y 即是 x 到 Y 的垂足。

3.3-2 引理（正交性） 在定理3.3-1中，设M是完备子空间Y，又 $x\in X$是固定的。则 $Z=x-y$ 与 Y正交。

证明。如果$z\perp Y$不真，则存在 $y_1\in Y$ 使

(5) $$\langle z,y_1\rangle=\beta\neq 0.$$

显然，$y_1\neq 0$，否则$\langle z,y_1\rangle=0$。此外，对任意纯量 α，

$$\begin{aligned}\|z-\alpha y_1\|^2&=\langle z-\alpha y_1,z-\alpha y_1\rangle\\&=\langle z,z\rangle-\bar{\alpha}\langle z,y_1\rangle-\alpha[\langle y_1,z\rangle-\bar{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle]\\&=\langle z,z\rangle-\bar{\alpha}\beta-\alpha[\bar{\beta}-\bar{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle]\end{aligned}$$

方框号[…]中的表示式是零，如果选取

$$\bar{\alpha}=\frac{\bar{\beta}}{\langle y_1,y_1\rangle}.$$

由(3)我们得 $\|z\|=\|x-y\|=\delta$，所以此等式成为

$$\|z-\alpha y_1\|^2=\|z\|^2-\frac{|\beta|^2}{\langle y_1,y_1\rangle}<\delta^2$$

但是这是不可能的因为有

$$z-\alpha y_1=x-y_2,\quad 这里\quad y_2=y+\alpha y_1\in Y,$$

所以$\|z-zy_1\|\geqslant\delta$（按$\delta$的定义）．因此(5)不可能成立．引理得证．▌

我们的目的是表Hilbert空间为直接和．它特别的简单而且适用，因为它利用到正交性．为此．首先引入直接和的概念，这个概念适用于任何向量空间，其定义如下．

3.3-3 定义（直接和） 向量空间X叫做X的两个子空间Y与Z的直接和，记为

$$X=Y\oplus Z,$$

如果每个$x\in X$有唯一的表示式

$$x=y+z \qquad y\in Y,\quad z\in Z.$$

这时Z叫做Y在X中的代数补．反之亦然．Y，Z称为X中一对互补的子空间．▌

例如，$Y=\mathbf{R}$是Euclidean平面$\mathbf{R}^2$的子空间．显然，在$\mathbf{R}^2$上Y有无限多个代数补，每一个都是实直线．但最方便的一个是与它成垂直的直线．我们选取笛卡尔坐标系就利用了这个事实．在$\mathbf{R}^3$中，情况是相同的．

类似地，在一般的Hilbert空间，上述的主要兴趣是关心表H为其闭子空间Y和Y的**正交补**$Y^\perp$的直接和

$$Y^\perp=\{z\in H\mid z\perp Y\},$$

它是一切正交于Y的向量所成之集．这就是本节的主要结果，常常叫做投影定理．为什么这样称呼的说明放在证明之后．

3.3-4 定理（直接和） 设Y是Hilbert空间H的任一闭子空间．则

(6) $$H=Y\oplus Z \qquad Z=Y^{\perp}.$$

证明．因H是完备的且Y是闭的，由定理1.4-7知Y是完备的．因为Y是凸的，定理3.3-1与引理3.3-2蕴含着对每$x\in H$，存在$y\in Y$，使得

(7) $$x=y+z \qquad z\in Z=Y^{\perp}.$$

为了证明唯一性，设

$$x=y+z=y_1+z_1$$

这里$y,y_1\in Y$，而$z,z_1\in Z$．则$y-y_1=z_1-z$．由于$y-y_1\in Y$而$z_1-z\in Z=Y^{\perp}$，我们看到$y-y_1\in Y\cap Y^{\perp}=\{0\}$．这表示$y=y_1$．因此也就有$z=z_1$．▌

(7)中之y叫做x在Y上的**正交投影**（或者简称为x在Y上的投影）．这个名词来自初等几何．[例如，取$H=\mathbf{R}^2$．将任意一点$x=(\xi_1,\xi_2)$投影到ξ_1—轴上，ξ_1轴起Y的作用。其投影是$y=(\xi_1,0)$]．

方程(7)定义了一个映象

$$P:H\to Y$$

$$x\mapsto y=Px.$$

P叫做H到Y上的（正交）**投影**（或投影算子）见图29．显然，

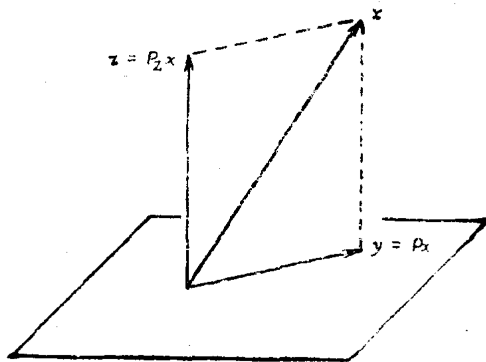


图29　定理3.3-4与(9)式的图示

P是有界线性算子.P映

H到Y上,

Y到它自身上,

$Z=Y^{\perp}$到$\{0\}$上,

且是幂等的，即是,

$$P^2=P;$$

于是对每个$x\in H$,

$$P^2x=P(Px)=Px$$

因此$P|_Y$是Y上的恒等算子，并且对$Z=Y^{\perp}$有下面的引理，它直接由以上讨论得出

3.3-5 引理（零空间） Hilbert空间的闭子空间Y的正交补$Y^{\perp}$是H到Y上的正交投影P的零空间$\mathcal{N}(P)$.

正交补是一个特殊的零化子，按此定义，这里，内积空间X中的集$M\neq\phi$的零化子$M^{\perp}$是集①

$$M^{\perp}=\{x\in X \mid x\perp M\}.$$

于是，$x\in M^{\perp}$当且仅当$\langle x,v\rangle=0$对一切$v\in M$. 这就说明为什么这样定名.

注意$M^{\perp}$是一个向量空间，因为，$x,y\in M^{\perp}$，则对一切$v\in M$与一切纯量α,β

$$\langle \alpha x+\beta y,v\rangle=\alpha\langle x,v\rangle+\beta\langle y,v\rangle=0,$$

因此$\alpha x+\beta y\in M^{\perp}$.

M是闭的. 读者可以自证（第8题）.

$(M^{\perp})^{\perp}$记为$M^{\perp\perp}$，如此等等，一般地，有

$$M\subset M^{\perp\perp} \tag{8*}$$

① 这不会与2.10节13题相冲突。以后将会见到（在3.8节）.

这是因为$x\in M\Rightarrow x\perp M^{\perp}\Rightarrow x\in(M^{\perp})^{\perp}$.

但是，对于闭子空间，我们甚至还有

3.3-6 引理（闭子空间） 如果Y是Hilbert空间H的闭子空间，则

$$Y=Y^{\perp\perp}. \tag{8}$$

证明.由(8*)，$Y\subset Y^{\perp\perp}$.下证$Y\supset Y^{\perp\perp}$.设$x\in Y^{\perp\perp}$.则由3.3-4知$x=y+z$，这里，$y\in Y\subset Y^{\perp\perp}$(由(8*)).因$Y^{\perp\perp}$是一个向量空间，又由假设$x\in Y^{\perp\perp}$，我们也有$z=x-y\in Y^{\perp\perp}$，因此$z\perp Y^{\perp}$.但$z\in Y^{\perp}$(由3.3-4)．结合两者得$z\perp z$，因此$z=0$，所以，$x=y$，即是$x\in Y$．由于$x\in Y^{\perp}$是任意的，这就证明了$Y\supset Y^{\perp\perp}$.■

(8)式是在本课文中用到闭子空间的主要原因．因为$Z^{\perp}=Y^{\perp\perp}=Y$故公式(6)又可写成

$$H=Z\oplus Z^{\perp}.$$

从而$x\mapsto z$定义了一个投影（图29）

$$P_Z:H\to Z \tag{9}$$

将H映到Z上，它的性质十分类似于前面考虑的投影P.

定理3.3-4很容易得出Hilbert空间中的子集的生成是稠集的特征性质如下

3.3-7 引理(稠密集) 对于Hilbert空间的任一子集$M\neq\phi$，M的生成在H中稠密当且仅当$M^{\perp}=\{0\}$.

证明．(a)设$x\in M^{\perp}$，又$V=\mathrm{Span}M$在H中稠密.则$x\in\bar{V}=H$.由定理1.4-6(a)，存在V中序列(x_n)使得$x_n\to x$．由于$x\in M^{\perp}$且$M^{\perp}\perp V$，我们有$\langle x_n,x\rangle=0$.内积的连续性（见引理3.2-2）蕴含$\langle x_n,x\rangle\to\langle x,x\rangle$.综合上面两式得$\langle x,x\rangle=\|x\|^2=0$，所以$x=0$．因

$x\in M^{\perp}$是任意的。得证$M^{\perp}=\{0\}$。

(*b*) 反之，假定$M^{\perp}=\{0\}$。如果$x\perp V$，则$x\perp M$，所以$x\in M^{\perp}$因而$x=0$。于是$V^{\perp}=\{0\}$。注意到V是H的子空间。因此，$\overline{V}=H$（由3.3-4，将Y换为$\overline{V}$即得）■

习　　题

1. 设H为一Hilbert空间，$M\subset H$ 是凸子集，(x_m) 是M中的序列合于$\|x_n\|\to d$，这里$d=\inf_{x\in M}\|x\|$。证明(x_m)在H中收敛．举出$\mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3$中的例子说明之．

2. 证明复空间C^n(见3.1-4)的子集 $M=\{y=(\eta_j)\mid\Sigma\eta_j=1\}$ 是完备的和凸的．求M中的极小范数向量．

3. (*a*)证明$[-1,1]$上的一切实值连续函数的向量空间X 是$[-1,1]$上一切连续实值偶函数与一切连续实值奇函数之集的直接和．(*b*) 举出表$\mathbf{R}^3$为直接和的实例：(i) 表成一个子空间与它的正交补的直接和．(ii) 表成子空间和它的任意互补子空间对的直接和．

4. (*a*)证明，如果X是一个 Hilbert空间而 $M\subset X$ 是闭子空间，定理3.3-1之结论也成立．(*b*)如何用Appolonius的恒等式（3.1节5 题）于定理3.3-1的证明中？

5. 设$X=\mathbf{R}^2$．求 $M^{\perp}$，如果M是：(*a*) $\{x\}$，这里 $x=(\xi_1,\xi_2)\neq 0$．(*b*)线性无关集$\{x_1,x_2\}\subset X$．

6. 证明$Y=\{x\mid x=(\xi_j)\in l^2,\ \xi_{2n}=0,\ n\in\mathbf{N}\}$是$l^2$的闭子空间并求$Y^{\perp}$．如果$Y=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}\subset l^2$，其中$e_j=(\delta_{jk})$，$Y^{\perp}$是什么？

7. 设A与$B\supset A$都是内积空间X的非空子集．证明

(a) $A\subset A^{\perp\perp}$，(b) $B^{\perp}\subset A^{\perp}$，(c) $A^{\perp\perp\perp}=A^{\perp}$．

8. 证明内积空间X的集M的零化子$M^{\perp}$是X的闭子空间．

9. 证明Hilbert空间H的子空间Y是H中的闭集当且仅当 $Y=Y^{\perp\perp}$．

10. 如果 $M\neq\phi$是Hilbert空间的任一子集，证明$M^{\perp\perp}$是含有M的H的最小闭子空间，即$M^{\perp\perp}$被包含在任意含有M的闭子空间$Y\subset H$ 内．

3.4 规格正交集与规格正交序列

在内积空间和Hilbert空间中，3.1节里所定义的元素之正交性起着基础性的作用。在前节里我们对此已有了初步印象。所有的元素都彼此正交的集特别有兴趣。为了了解这个事实，回忆一下熟知的Euclidean空间R^3中的情况。在R^3中，这种类型的集由指向按一直角坐标系的轴的正方向的三个单位向量组成。称这些向量为e_1,e_2,e_3，它们构成R^3的一个基，于是每个$x\in R^3$有唯一的表达式（图30）

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3.$$

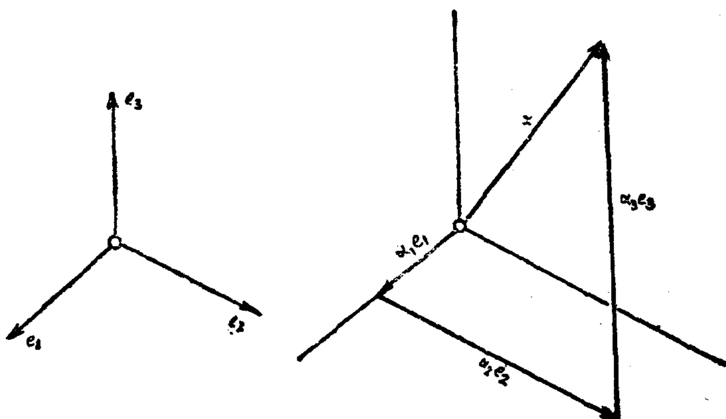


图30 R^3中的规格正交集$\{e_1,e_2,e_3\}$与x的表示$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$

现在我们可以看出正交性的一个极大优点。给定x，用取内积（点乘）的方法，可以很容易地确定未知的系数$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。事实上，为要得到$\alpha_1$，用$e_1$和$x$的这个表达式作内积，即

$$\langle x,e_1\rangle=\alpha_1\langle e_1,e_1\rangle+\alpha_2\langle e_2,e_1\rangle+\alpha_3\langle e_3,e_1\rangle=\alpha_1,$$

如此等等。在更一般的内积空间中，正如我们所要讲的，存在着

类似的采用正交集，规格正交集和序列的可能性。事实上，这样的集和序列的应用，构成内积空间和 Hilbert 空间全部理论的相当本质部分。以下引出一些必需的概念来开始这个方面的研究。

3.4-1 定义（规格正交集和序列） 内积空间 X 中的正交集 M 是这样的子集 $M\subset X$：M 中的元素彼此正交；规格正交集 $M\subset X$ 是 X 中的正交集，它的元素的范数是 1，即对一切 $x,y\in M$，

$$(1)\qquad \langle x,y\rangle=\begin{cases}0 & x\neq y,\\ 1 & x=y.\end{cases}$$

如果正交集或规格正交集 M 是可数的，则 M 可以排成一个序列 (x_n)，分别叫做正交序列或规格正交序列

更一般地，给了一个指标集 I，族 (x_α)，$\alpha\in I$，叫正交的，如果 $x_\alpha\perp x_\beta$，对一切 $\alpha,\beta\in I,\alpha\neq\beta$ 成立，族 (x_α) 叫规格正交的，如果 (x_α) 是正交的且一切 x_α 的范数为1，于是对一切 $\alpha,\beta\in I$ 有

$$(2)\qquad \langle x_\alpha,x_\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0 & \alpha\neq\beta,\\ 1 & \alpha=\beta.\end{cases}$$

这里，$\delta_{\alpha\beta}$ 是Kronecker符号。（见2.9节）▌

读者如需了解族及其有关概念，可查阅附录1中的 $A1.3$。现在定义中的概念是和那里密切相关的。原因在于：对 X 的任意子集 M，我们总可以获得一个 X 的元素族，使得族中的元素所成之集就是 M。特别，我们可以取由 M 到 X 中的自然内射来定义这个族，即是，X 上的恒等映射 $x\mapsto x$ 在 M 上的限制。

现在考察正交集与规格正交集的一些简单性质和例子。

设元素 x,y 是正交的，则 $\langle x,y\rangle=0$，所以容易得到 Pythagorean 公式

$$(3)\qquad \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$ 勾股定理

图31就举出一个熟知的例。更一般地，如果 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是一正交集，则有

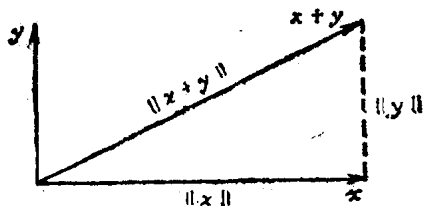


图31　$\mathbf{R}^2$中的Pythagorean 关系

$$(4)\qquad \|x_1+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2.$$

事实上，如果$j\neq k$，$\langle x_j,x_k\rangle=0$；因而

$$\|\sum_j x_j\|^2=\langle\sum_j x_j,\sum_k x_k\rangle=\sum_j\sum_k\langle x_j,x_k\rangle=\sum_j\langle x_j,x_j\rangle=\sum_j\|x_j\|^2$$

（从1到n求和）。再注意

3.4-2　引理（线性无关性）　规格正交集是线性无关的。

证明。设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是规格正交的，考虑等式

$$\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n=0.$$

以固定的e_j作内积，得

$$\langle\sum_k\alpha_ke_k,e_j\rangle=\sum_k\alpha_k\langle e_k,e_j\rangle=\alpha_j\langle e_j,e_j\rangle=\alpha_j=0.$$

这就证明了任何有限的规格正交集是线性无关的。根据2.1节线性无关性的定义，同时也证明了无限的规格正交集线性无关。▌

例

3.4-3　Euclidean空间$\mathbf{R}^3$。在空间$\mathbf{R}^3$中，指向按直角坐标系的正方向的三个单位向量$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$构成一个规格正交集。见图30。

3.4-4 空间l^2 在空间l^2中，(e_n)是一个规格正交序列，这里$e_n=(\delta_{nj})$，其第n个元素是1其余的都是零。(见3.1-6)

3.4-5 连续函数 设X是$[0,2\pi]$上一切实值连续函数所成的内积空间，其内积定义为

$$\langle x,y\rangle=\int_0^{2\pi}x(t)y(t)dt$$

(见3.1-5)。X中的一个正交序列是(u_n)，其中

$$u_n(t)=\cos nt \qquad n=0,1,\cdots.$$

X中的另一正交序列是(v_n)，其中

$$v_n(t)=\sin nt \qquad n=1,2,\cdots.$$

事实上，由积分

$$(5)\quad \langle u_m,u_n\rangle=\int_0^{2\pi}\cos mt\cos nt\,dt=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi & m=n=1,2\cdots\\ 2\pi & m=n=0\end{cases}$$

可知。对于(v_n)情形也类似。因此，规格正交序列是(e_n)，这里

$$e_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\qquad e_n(t)=\frac{u_n(t)}{\|u_n\|}=\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\qquad (n=1,2,\cdots).$$

从(v_n)我们得出规格正交序列$(\tilde{e}_n)$，这里

$$\tilde{e}_n(t)=\frac{v_n(t)}{\|v_n\|}=\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\qquad (n=1,2,\cdots).$$

注意，我们甚至还有$u_m\perp v_n$，对一切m和n。(证明？)这些序列出现在Fourier级数中。我们将在下节里讨论。我们的例子足以使我们对所要讲内容有初步印象。实际重要的更进一步的规格正交序列在以后的一节中讲（3.7节）。▌

规格正交序列比起任意线性无关序列的最大好处是，如果已知x可以表作一个规格正交序列的一些元素的线性组合，则由此规格正交性很容易确定其系数。事实上，如果$(e_1,e_2,\cdots)$是内积空间X中的规格正交序列，而$x\in\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$，这里$n$是固定的，

则按span的定义（见2.1节）

$$(6)\qquad x=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k,$$

且如果用固定的e_j作内积，得

$$\langle x,e_j\rangle=\langle\Sigma\alpha_k e_k,e_j\rangle=\Sigma\alpha_k\langle e_k,e_j\rangle=\alpha_j.$$

用这些系数，(6)成为

$$(7)\qquad x=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k.$$

这表明确定(6)中未知系数是简单的，规格正交性的另一优点也显而易见，如果在(6)与(7)我们要加上另一项 $\alpha_{n+1}e_{n+1}$，要处理

$$\tilde{x}=x+\alpha_{n+1}e_{n+1}\in\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_{n+1}\};$$

这时我们只须多计算一个系数，因为其它的系数仍然不改变。

更一般地，如果考虑任意$x\in X$，x不必在 $Y_n=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$中。我们可以由下式定义 $y\in Y_n$，

$$(8a)\qquad y=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k,$$

和前面一样，这里n是固定的，然后由下式定义z：

$$(8b)\qquad x=y+z,$$

即 $z=x-y$，我们证明$z\perp y$。要真正弄清下步做什么事，注意看下面即可得知。每个$y\in Y_n$是线性组合

$$y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$$

由于刚才前面的讨论，这里 $\alpha_k=\langle y,e_k\rangle$。我们的论断是对特别选择的$\alpha_k=\langle x,e_k\rangle$，$k=1,\cdots,n$，我们将得到一个$y$使得 $z=x-y\perp y$

要证明此事，首先注意，根据规格正交性，

$$(9)\qquad \|y\|^2=\langle\Sigma\langle x,e_k\rangle e_k,\Sigma\langle x,e_m\rangle e_m\rangle=\Sigma|\langle x,e_k\rangle|^2.$$

利用此结果，现在可以证明$z\perp y$：

$$\begin{aligned}\langle z,y\rangle&=\langle x-y,y\rangle=\langle x,y\rangle-\langle y,y\rangle\\&=\langle x,\Sigma\langle x,e_k\rangle e_k\rangle-\|y\|^2\\&=\Sigma\langle x,e_k\rangle\overline{\langle x,e_k\rangle}-\Sigma|\langle x,e_k\rangle|^2\\&=0.\end{aligned}$$

因此，由Pythagorean关系(3)给出

$$(10)\qquad \|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2.$$

由(9)得

$$(11)\qquad \|z\|^2=\|x\|^2-\|y\|^2=\|x\|^2-\Sigma|\langle x,e_k\rangle|^2.$$

因为$\|z\|\geqslant 0$，对一切$n=1,2,\cdots$我们有

$$(12^*)\qquad \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$$

这些和的各项非负，所以构成一个单调增加的序列。这个序列是收敛的，因为它以$\|x\|^2$为上界，而这是无穷级数的部分和的序列。于是此级数收敛。因此(12*)蕴含下面的

3.4-6 定理（Bessel不等式） 设(e_k)是内积空间X的规格正交序列，则对每个$x\in X$

$$(12)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2\qquad\text{(Bessel 不等式)}.$$

(12)中的内积$\langle x,e_k\rangle$称为x关于规格正交序列(e_k)的Fourier系数。

注意，如果X是有限维的，则X中的每个规格正交集必是有限维的，这是因为它是线性无关的（据3.4-2）。于是，在(12)中这时是有限和。

我们看到，规格正交序列使用起来很方便。留下来的问题是，

如果给定任意一线性无关序列，怎样得出规格正交序列。这可以由一构造性程序来完成，即关于内积空间中的任一线性无关序列规格正交化的 **Gram-Schmidt** 方法。设(e_n)是所得的规格正交序列，则对每一n，

$$\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\}。$$

此方法如下：

第一步　(e_k)的第一个元素是

$$e_1=\frac{1}{\|x_1\|}x_1。$$

第二步　x_2可以写成

$$x_2=\langle x_2,e_1\rangle e_1+v_2$$

于是（图32）

$$v_2=x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1$$

不是零向量，因为(x_j)是线性无关的，且$v_2\perp e_1$。因为$\langle v_2,e_1\rangle=0$，所以可以取

$$e_2=\frac{1}{\|v_2\|}v_2。$$

第三步　向量

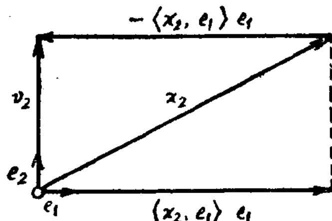


图32　Gram-Schmidt方法。第二步情形

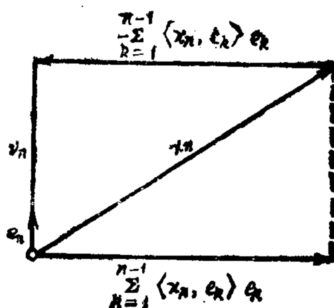


图33　Gram-Schmidt方法第n步情形

$$v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1\rangle e_1 - \langle x_3, e_2\rangle e_2$$

不是零向量，且$v_3 \perp e_1$ 和 $v_3 \perp e_2$。取

$$e_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3.$$

第n步 向量（见第148页图33）

$$v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k\rangle e_k \tag{13}$$

不是零向量，且与$e_1, \cdots, e_{n-1}$正交。由此得

$$e_n = \frac{1}{\|v_n\|} v_n. \tag{14}$$

这些就是 Gram-Schmidt 方法的一般公式，它是由 E. Schmidt(1907) 和 J. P. Gram(1883) 各自独立提出来的。注意(13)式右端减号后的和数是x_n在 span$\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$上的投影，换句话说，在每一步中，我们从x_n减去它在以前得出的$n-1$个正交化向量的方向上的那些“分向量”。这样得出 v_n，然后乘以$1/\|v_n\|$，为的是得到范数为1的向量，对任意n，v_n 不可能是零向量。事实上，如果n是v_n为零的最小脚标，则(13)表明 x_n 就会是$e_1, \cdots, e_n$的线性组合，因此也就是$x_1, \cdots, x_{n-1}$的线性组合，与假设$\{x_1, \cdots, x_n\}$是线性无关相矛盾。

习　　题

1. 证明n维内积空间一定有规格正交向量$\{b_1, \cdots, b_n\}$组成的基.（无限维空间的情形将在3.6节考虑）
2. 当$r \geqslant n$时，怎样在$\mathbf{R}^r$内给出(12*)的几何解释.
3. 从(12*)得出Schwarz不等式（3.2节）.
4. 给出$x \in l^2$的例使得(12)有严格的不等式.
5. 如果(e_k)是内积空间X中的规格正交序列，又$x \in X$，y是

$$y=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \qquad\qquad \alpha_k=\langle x, e_k\rangle.$$

证明．$x-y$与子空间$Y_n=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$正交．

6．（**Fourier系数的极小性质**）设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是内积空间X的规格正交集．n固定．又设$x\in X$是任一固定元素，而$y=\beta_1 e_1+\cdots+\beta_n e_n$．于是$\|x-y\|$依赖于$\beta_1,\cdots,\beta_n$．用直接计算来证明当且仅当$\beta_j=\langle x,e_j\rangle$，$j=1,2,\cdots,n$，时$\|x-y\|$最小．

7．设(e_k)是内积空间X的任一规格正交序列．证明，对任意的$x,y\in X$，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

8．证明内积空间X的元素不能有"太多"的Fourier系数$\langle x,e_k\rangle$取"大"的值；这里(e_k)是已知的规格正交序列．更确切地说，使得$|\langle x,e_k\rangle|>1/m$的$\langle x,e_k\rangle$的个数$n_m$必须满足$n_m<m^2\|x\|^2$．

9．将序列$(x_0,x_1,x_2,\cdots)$的前三项规格正交化，这里$x_j(t)=t^j$，$t\in[-1,1]$，定义

$$\langle x,y\rangle=\int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt.$$

10．假设$x_1(t)=t^2$，$x_2(t)=t$，且$x_3(t)=1$．$t\in[-1,1]$．将此三向量依现在的次序规格正交化（按9题所给的内积）．将结果与9题比较，并作评论．

3.5 关于规格正交序列与规格正交集的级数

若干结果和问题都牵涉到Bessel不等式．在本节中，首先考虑名词"Fourier系数"，然后是关于规格正交序列的无穷级数，最后对不可数的规格正交集作初步探讨．

3.5-1 例（Fourier 级数） 形如

$$(1^*) \qquad a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

的级数叫三角级数．**R** 上的实值函数叫周期函数，如果存在一个

正数p（叫做x的周期）使得$x(t+p)=x(t)$对一切$t\in R$成立。

设x是以2π为周期的连续函数。按定义，x 的Fourier级数是形如(1*)的三角级数，系数a_k和b_k由Euler公式给出

$$(2)\qquad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(t)dt,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos ktdt\qquad k=1,2,\cdots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin ktdt\qquad k=1,2,\cdots,$$

这些系数叫x的Fourier系数。

如果x的Fourier级数对每个t收敛且和为$x(t)$，则记为

$$(1)\qquad x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

因为x的周期为 2π，在(2) 式中可以用任意另一个长度为 2π 的积分区间代替$[0,2\pi]$，例如 $[-\pi,\pi]$。

Fourier 级数最先由 D. Bernoulli（弦振动，1753）与 J. Fourier（热传导，1882），在研究物理问题中提出来的。这些级数有助于将复杂的周期现象用一些简单的周期函数表示（sine和cosine）。在处理物理学中的一些微分方程时它们有各种各样的应用。（振动，热传导，位势问题，等等）

从(2)看出，定出Fourier系数需要用积分。为帮助以前未曾接触过Fourier级数的读者，举一例说明之（见图34）

$$x(t)=\begin{cases}t & -\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2\\ \pi-t & \pi/2\leqslant t\leqslant 3\pi/2\end{cases}$$

且 $x(t+2\pi)=x(t)$. 由(2)得 $a_k=0$, $k=0,1,\cdots$.为方便起见，选择$[-\pi/2,3\pi/2]$为积分区间进行积分

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}t\sin ktdt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi-t)\sin ktdt$$

$$= -\frac{1}{\pi k}[t\cos kt]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos kt dt$$

$$-\frac{1}{\pi k}[(\pi - t)\cos kt]\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} - \frac{1}{\pi k}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos kt dt$$

$$= \frac{4}{\pi k^2} \sin \frac{k\pi}{2}, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

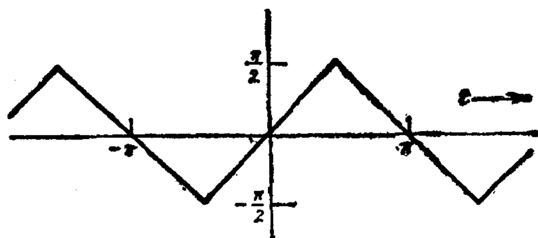


图34　周期为2π的函数x的图象，这里

$x(t) = t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，又$x(t) = \pi - t, t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

因此(1)取下之形式

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t - \frac{1}{3^2}\sin 3t + \frac{1}{5^2}\sin 5t - \cdots\right).$$

读者可以作出前三项的和的图形与图34中x的图形相比较。

现在回到一般的 Fourier 级数，我们要问它们怎样与前节介绍的术语与形式的规定相一致。显然，(1)的正弦与余弦函数是3.4-5中的序列(u_k)与(v_k)，即是

$$u_k(t) = \cos kt \qquad v_k(t) = \sin kt$$

因此，可以将(1)表为

$$(3) \qquad x(t) = a_0 u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k u_k(t) + b_k v_k(t)].$$

用固定的u_j乘(3)，关于t从0到2π作积分。这意味着按3.4-5

定义用u_j取内积．假定逐项积分是允许的（有一致收敛性就可保证）．利用(u_k)与(v_k)的正交性以及$u_j \perp v_k$对一切j,k成立这一事实，则得出

$$\begin{aligned}\langle x,u_j\rangle &= a_0\langle u_0,u_j\rangle+\sum[a_k\langle u_k,u_j\rangle+b_k\langle v_k,u_j\rangle]\\ &= a_j\langle u_j,u_j\rangle\\ &= a_j\|u_j\|^2=\begin{cases}2\pi a_0 & j=0\\ \pi a_j & j=1,2,\cdots,\end{cases}\end{aligned}$$

见3.4(5)．类似地，如果乘(3)以v_j，按上面的步骤进行，得出

$$\langle x,v_j\rangle=b_j\|v_j\|^2=\pi b_j \qquad j=1,2,\cdots.$$

解出a_j与b_j，并用规格正交序列(e_j)与$(\tilde{e}_j)$，这里$e_j=\|u_j\|^{-1}u_j$与$\tilde{e}_j=\|v_j\|^{-1}v_j$，我们得到

$$(4)\qquad \begin{aligned} a_j&=\frac{1}{\|u_j\|^2}\langle x,u_j\rangle=\frac{1}{\|u_j\|}\langle x,e_j\rangle,\\ b_j&=\frac{1}{\|v_j\|^2}\langle x,v_j\rangle=\frac{1}{\|v_j\|}\langle x,\tilde{e}_j\rangle.\end{aligned}$$

这与(2)是恒等的．它表明在(3)式

$$a_ku_k(t)=\frac{1}{\|u_k\|}\langle x,e_k\rangle u_k(t)=\langle x,e_k\rangle e_k(t).$$

对于$b_kv_k(t)$也有类似的结果．因此，我们可以将 Fourier 级数(1)表为如下形式

$$(5)\qquad x=\langle x,e_0\rangle e_0+\sum_{k=1}^{\infty}[\langle x,e_k\rangle e_k+\langle x,\tilde{e}_k\rangle\tilde{e}_k].$$

这表明前节中采用Fourier系数这个术语是适当的．

在结束本例时，我们指出，读者可以参阅 W. Rogosinski (1959) Fourier 级数引论以及有关文献；R. V. Churchill (1963)．77—112页与Kreyszig(1972)，377—407页．▌

我们的例子涉及无穷级数，因而要问，怎样将上述思想推广到另外的规格正交序列，且与其相应的级数的收敛性有什么结

果。

在Hilbert空间 H 中任给一个规格正交序列 (e_k)，考虑如下形式的级数

(6) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

这里 $a_1, a_2 \cdots$ 是任意纯量。如2.3节中的定义，称这样的级数收敛且其和为 s，如果存在 $s \in H$ 使得部分和序列 (s_n)

$$s_n = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

收敛到 s，即是，$\|s_n - s\| \to 0$ 当 $n \to \infty$。

3.5-2 定理（收敛性） 设 (e_k) 是 Hilbert空间 H 中的规格正交序列。则

(a) 级数(6)收敛（按 H 中的范数）当且仅当以下的级数收敛：

(7) $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

(b) 如果级数(6)收敛，则系数 a_k 都是 Fourier系数 $\langle x, e_k \rangle$，这里 x 表(6)之和。因此，在这种情形时，(6)可表示为

(8) $$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

(c) 对任意的 $x \in H$，系数为 $a_k = \langle x, e_k \rangle$ 的级数(6)收敛（按 H 的范数）。

证明 (a) 设

$$s_n = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \quad \sigma_n = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2.$$

则因为规格正交性，对任意的 m 及 $n > m$，

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|\alpha_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \alpha_n e_n\|^2$$
$$= |\alpha_{m+1}|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m.$$

因此 (s_n) 是 H 中的 Cauchy 序列当且仅当 (σ_n) 是R中的 Cauchy 序列。由于 H 与R都是完备的，(a) 得证。

(b) 作 s_n 与 e_j 的内积，并利用规格正交性，我们有

$$\langle s_n, e_j\rangle = \alpha_j \quad \text{对} j=1,\cdots,k \ (k\leqslant n\text{且是固定的})。$$

由假设 $s_n \to x$，因内积的连续性（见引理3.2-2），

$$\alpha_j = \langle s_n, e_j\rangle \to \langle x, e_j\rangle \qquad (j\leqslant k).$$

这里，因为 $n\to\infty$，k 可以是任意一个正整数 $(k\leqslant n)$。所以，$\alpha_j = \langle x, e_j\rangle$ 对每个 $j=1,2,\cdots$ 成立。

(c) 由定理3.4-6 的 Bessel 不等式知级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$$

收敛．据此以及 (a) 可以肯定 (c) 必成立。▌

在内积空间 X 中，如果它的规格正交族 (e_k)，$k\in I$ 是不可数的（由于指标集 I 不可数），我们仍能构造 $x\in X$ 的 Fourier 系数 $\langle x, e_k\rangle$，这里 $k\in I$。现在引用 3.4中 (12*)，断定，对每个固定的 $m=1,2,\cdots$ 使得 $|\langle x, e_k\rangle| > 1/m$ 的 Fourier 系数的个数一定是有限的。于是证得以下值得注意的引理.

3.5-3 引理（Fourier系数） 内积空间 X 的任一 x，对于 X 中的规格正交族 (e_k)，$k\in I$，至多只可能有可数多个非零的 Forier 系数.

因此，对任意固定的 $x\in H$，可以产生一个类似于 (8) 的级数

$$\sum_{k\in I} \langle x, e_k\rangle e_k \tag{9}$$

且可以将使$\langle x, e_k\rangle \neq 0$的$e_k$排成一个序列$(e_1, e_2, \cdots)$，于是(9)就成为(8)的形式。它的收敛性由定理3.5-2得出。我们证明其和不依赖于诸e_k在序列中排列的顺序。

证明。设(w_m)是(e_n)的一个排列。按定义这存在N到自身上的双射映象$n \mapsto m(n)$，使二序列对应的项是相同的，即$w_{m(n)} = e_n$。令

$$\alpha_n = \langle x, e_n\rangle, \qquad \beta_m = \langle x, w_m\rangle$$

和

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \qquad x_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m w_m.$$

则由定理3.5-2(b)

$$\alpha_n = \langle x, e_n\rangle = \langle x_1, e_n\rangle, \quad \beta_m = \langle x, w_m\rangle = \langle x_2, w_m\rangle.$$

由于$e_n = w_{m(n)}$，于是我们得到

$$\begin{aligned}\langle x_1 - x_2, e_n\rangle &= \langle x_1, e_n\rangle - \langle x_2, w_{m(n)}\rangle \\ &= \langle x, e_n\rangle - \langle x, w_{m(n)}\rangle = 0\end{aligned}$$

类似地，$\langle x_1 - x_2, w_m\rangle = 0$。这蕴含

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\|^2 &= \langle x_1 - x_2, \Sigma\alpha_n e_n - \Sigma\beta_m w_m\rangle \\ &= \Sigma\bar{\alpha}\langle x_1 - x_2, e_n\rangle - \Sigma\bar{\beta}_m\langle x_1 - x_2, w_m\rangle = 0\end{aligned}$$

因此$x_1 - x_2 = 0$，因而$x_1 = x_2$。由于(w_m)是(e_n)的任意一个排列。定理得证。∎

习　　题

1．如果(6)收敛其和为x，证明(7)的和为$\|x\|^2$。

2．从(1)与(2)导出任一以p为周期的函数$\tilde{x}$(τ的函数)的Fourier级数表示式.

3．举例说明收敛级数$\Sigma\langle x, e_k\rangle e_k$其和不必为$x$.

4. 如果(x_j)是内积空间 X 的序列使得级数 $\|x_1\|+\|x_2\|+\cdots$收敛. 证明(s_n)是一个Cauchy序列, 这里$s_n=x_1+\cdots+x_n$.

5. 证明, 在Hilbert空间H中, $\Sigma\|x_j\|$的收敛性蕴含Σx_j的收敛性.

6. 设(e_j)是Hilbert空间H中的规格正交序列. 证明, 如果

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j, \qquad y=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j e_j, \qquad \text{则 } \langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\beta}_j$$

是绝对收敛的.

7. 设(e_k)是Hilbert空间H的一个规格正交序列.证明, 对每个$x\in H$, 向量

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$$

在H中存在, 且$x-y$与每个e_k正交.

8. 设(e_k)是Hilbert空间 H 的一个规格正交序列, $M=\operatorname{span}(e_k)$. 证明,对任意$x\in H$都有$x\in\overline{M}$,当且仅当$x$能表成(6)的形式,其系数 $\alpha_k=\langle x,e_k\rangle$.

9. 设 (e_n) 与 $(\tilde{e}_n)$ 是 Hilbert空间的规格正交序列, $M_1=\operatorname{span}(e_n)$ 与 $M_2=\operatorname{span}(\tilde{e}_n)$. 利用8题, 证明$\overline{M}_1=\overline{M}_2$当且仅当

$$(a)\ \ e_n=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{nm}\tilde{e}_m \qquad (b)\tilde{e}_n=\Sigma\overline{\alpha}_{mn}e_m, \quad \alpha_{nm}=\langle e_n,\tilde{e}_m\rangle.$$

10. 写出引理3.5-3的详细证明.

3.6 完全规格正交集与序列

在内积空间和Hilbert空间中, 真正有兴趣的规格正交集由"充分多"的元素组成, 使得利用这样的规格正交集, 空间中的每个元素都可以由它表示, 或者得到与该元素充分精确的逼近. 在有限维空间, 情况很简单, 它就是 n 个元素的规格正交集. 问题是对于无限维空间我们该怎么办. 以下是有关的概念.

3.6-1 定义 (完全规格正交集) 在赋范空间X中的完

全集（基本集）是一子集$M \subset X$，M的生成（span M）在X中稠密（见1.3-5）。据此，在内积空间 X 中一规格正交集（或序列，或族）在X中是完全的，则称为X中的完全规格正交集①(或序列，或族）。▮

M在X中完全当且仅当

$$\overline{\operatorname{span} M} = X.$$

根据定义这是显然的。

X中的完全规格正交族有时也叫做X的规格正交基。应该注意，将X视为向量空间时，它不是代数意义的基（除非X是有限维的）。

在每个 Hilbert 空间$H \neq \{0\}$中都存在完全规格正交集。

对有限维空间 H 这是显然的。对无限维可分的 H （见1.3-5），由 Gram-Schmidt 的归纳过程（普通归纳）得出。对不可分的H，由 Zorn 引理可以得出一个（非构造性）证明。这在4.1节里将要见到。那里为了别的目的我们介绍并解释了这个引理。

给定的 Hilbert 空间 $H \neq \{0\}$ 中一切完全规格正交集有相同的基数。这个基数叫 H 的 Hilbert 维数或正交维数。（如果$H = \{0\}$，此维数定义为零）

H 是有限维时这个论断是显然的，因为这时的 Hilbert 维数就是代数意义的维数。对无限维可分的 H，此论断很容易从定理 3.6-4（见下面）得出，而对一般的 H，其证明需要集论的进一步的工具；见 E. Hewitt 与 K. Stromberg (1969)，246页。

下面的定理证明一个完全规格正交集不可能添加进新的元素而使此规格正交集进一步扩大。

3.6-2 定理(完全性) 设 M 是内积空间 X 的子集，则

① 有时也有人叫它为完备的规格正交集，但我们只在定义 1.4-3 的意义下用完备这一词，原因是避免用同一词表完全不同的两个概念。[此外，有的作者将定理3.6-2 (1)的性质说成是规格正交集M的“完备性”，我们也不采用这个说法。]

(a) 如果 M 在 X 中完全，则不存在非零的 $x\in X$，使 X 同 M 中的每个元直交。即是

(1) $$x\perp M \Rightarrow x=0,$$

(b) 如果 X 完备，对 M 在 X 中的完全性，此条件也是充分的。

证明，(a) 设 H 是 X 的完备化；见 3.2-3，则 X 视为 H 的子空间时在 H 中稠密，由假设，M 在 X 中完全，所以 M 的生成在 X 中稠密，因此也在 H 中稠密。现在，引理 3.3-7 蕴含 M 在 H 中的正交补是 $\{0\}$。更有，如果 $x\in X$ 且 $x\perp M$，则 $x=0$。

(b) 如果 X 是 Hilbert 空间，且 M 满足定理的条件，所以 $M^{\perp}=\{0\}$。则引理 3.3-7 蕴含 M 在 X 中完全。∎

在(b)中 X 的完备性是本质的。如果 X 不完备，可能不存在规格正交集 $M\subset X$ 使 M 在 X 中完全。J. Dixmier (1953) 给出过例子，也可参看 N. Bourbaki (1955) 155页。

判别完全性的另一个重要准则可以从 Bessel 不等式（见 3.4-6）得出。为此目的，我们考虑 Hilbert 空间 H 中任给的规格正交集 M。从引理 3.5-3 知，对每个固定的 $x\in H$ 至多有可数多个非零的 Fourier 系数，所以可以把它们排成一个序列，比方说，$\langle x,e_1\rangle$，$\langle x,e_2\rangle,\cdots$。Bessel 不等式（见3.4-6）是

(2) $$\sum_k |\langle x,e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2, \qquad \text{(Bessel 不等式)}$$

其左端是无穷级数或者是有限和。如果等号成立，就变成

(3) $$\sum_k |\langle x,e_k\rangle|^2=\|x\|^2 \qquad \text{(Parseval 公式)},$$

于是得出判别完全性的另一准则。

3.6-3 定理(完全性) Hilbert 空间 H 中的规格正交集 M 在 H 中完全当且仅当对一切 $x \in H$，有 Parseval 公式(3)成立（在 x 关于 M 的一切非零 Fourier 系数上求和）.

证明. (a)如果 M 不完全，由定理3.6-2，存在非零元素 $x \in H$，$x \perp M$. 既然 $x \perp M$，则(3)中，对一切 k 有 $\langle x, e_k \rangle = 0$，所以(3)式左端是零，但 $\|x\|^2 \neq 0$. 这表明(3)式不成立.因此，如果(3)对一切 $x \in H$ 成立，则 M 在 H 中必是完全的。

(b)反之，设 M 在 H 中是完全的，考虑任意的 $x \in H$ 和它的非零 Fourier 系数（见3.5-3）. 它们被排成序列 $\langle x, e_1 \rangle$，$\langle x, e_2 \rangle, \cdots$，如果只有有限项，则将其排成确定的顺序，现在定义 y 如下：

$$y = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k, \tag{4}$$

注意，在无穷级数的情形，收敛性由定理3.5-2得出. 现证明 $x - y \perp M$. 对每个出现在（4）中的 e_j，利用规格正交性

$$\langle x-y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle$$

$$= 0.$$

而对每个 $v \in M$，又 v 不在(4)中，我们有 $\langle x, v \rangle = 0$，所以

$$\langle x-y, v \rangle = \langle x, v \rangle - \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, v \rangle = 0 - 0 = 0.$$

因此，$x - y \perp M$，即 $x - y \in M^{\perp}$. 因 M 在 H 中完全，根据3.3-7知 $M^{\perp} = \{0\}$. 综合可得 $x - y = 0$. 即是，$x = y$. 利用(4)及规格正交性. 于是从

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_m \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum_k \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle}$$

得到(3)式．证毕．▌

现在回到可分 Hilbert 空间．按定义1.3-5，这一种空间有可数稠子集。可分 Hilbert 空间比不可分的简单些，因它不可能含不可数规格正交集．

3.6-4 定理（可分 Hilbert 空间） 设H是 Hilbert 空间，则

(a) 如果H是可分的，H中的每个规格正交集是可数的．

(b) 如果H含有完全规格正交序列，则H是可分的．

证明．(a)设H可分，B是M中任一稠集，M是任一规格正交集，则M中任意两不同的元x,y的距离是$\sqrt{2}$，因为

$$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle=2.$$

因此，x,y的半径为$\sqrt{2}/3$的球邻域N_x,N_y不相交，因B在H中稠密，故存在$b\in B$在N_x中，而$\tilde{b}\in B$在N_y中，且$b\neq\tilde{b}$（因为$N_x\cap N_y=\phi$）．因此，如果M不可数，则有不可数多个这样的互不相交的球邻域（对每个$x\in M$有一个这样的邻域），于是B不可数．因B是任意的稠集，这意味着H不含可数稠子集，这同H是可分的矛盾，由此断定M必可数。

(b) 设(e_k)是H中完全规格正交序列，A是一切线性组合

$$\gamma_1^{(n)}e_1+\cdots+\gamma_n^{(n)}e_n \quad n=1,2,\cdots$$

所成的集，这里$\gamma_k^{(n)}=a_k^{(n)}+ib_k^{(n)}$，且$a_k^{(n)}$与$b_k^{(n)}$是有理数（如果$H$是实的，$b_k^{(n)}=0$）．显然，$A$是可数的．我们通过证明对每个$x\in H$，及$\varepsilon>0$，存在$v\in A$使$\|x-v\|<\varepsilon$，来得出$A$在$H$中稠密．

因为序列(e_k)在H中完全，故存在n，使得$Y_n=\mathrm{span}\{e_1\cdots,e_n\}$含有这样的点，从$x$到此点的距离小于$\varepsilon/2$．特别，$\|x-y\|<\varepsilon/2$，这里$y$是$x$在$Y_n$上的正交投影，$y$由下式给出[见3.4之(8)

式]

$$y=\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k.$$

因此，有

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于有理数在R中稠，对每个$\langle x,e_k\rangle$，存在一个$\gamma_k^{(n)}$（具有有理实部和虚部）使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\left[\langle x, e_k\rangle-\gamma_k^{(n)}\right]e_k\right\|<\varepsilon/2.$$

因此，由

$$v=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k$$

所定义的$v\in A$，满足

$$\begin{aligned}\|x-v\|&=\left\|x-\sum\gamma_k^{(n)}e_k\right\|\\&\leqq\left\|x-\sum\langle x,e_k\rangle e_k\right\|+\left\|\sum\langle x,e_k\rangle e_k-\sum\gamma_k^{(n)}e_k\right\|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明A在H中稠密，由于A是可数的，所以H可分。▌

在应用中，使用Hilbert空间，人们必须知道在特定的场合下要选取什么样的完全规格正交集，以及如何去研究这种集的元素的性质。在下节里。对某些函数空间将考虑这个问题。它包括

有这里所提出的那种有实际兴趣的特殊函数，这些函数已经被研究得很详尽了。作为本节的结束，我们指出，由我们的讨论还能得出进一步的有基本意义的重要结果，它可以用 Hilbert 空间的同构这个术语来表述。为此，首先回忆 3.2 节如下概念。

同一域上的 Hilbert 空间 H 到 Hilbert 空间 $\tilde{H}$ 上的**同构**是一个双射线性算子 $T:H\to\tilde{H}$，使得对所有的 $x,y\in H$ 有

$$\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle. \tag{5}$$

这时 H 和 $\tilde{H}$ 叫同构的 Hilbert 空间。因为 T 是线性的，它保持其向量空间结构，又(5)表明 T 是等距的。据此及T的双射性，从而 H 和 $\tilde{H}$ 它们之上的代数结构以及它们之上的度量都没有区别。除去元素的性质而外，本质上它们是相同的，所以我们可将 $\tilde{H}$ 看作是 H 的每个元素贴上一个"标签" T 得来的，或者视 H 和 $\tilde{H}$ 是同一抽象空间的复印品，正如我们在 n 维 Euclidean 空间里常常做的那样。

使我们深受鼓舞的是，对每个 Hilbert 维数(见本节开头)只有一个抽象的实 Hilbert 空间和一个抽象的复 Hilbert 空间。换句话说，同一域上两个抽象的 Hilbert 空间只有 Hilbert 维数上的差别。这推广了 Euclidean 空间的情形，以下的定理就表明这个意思。

3.6-5 定理(同构与 Hilbert 维数) 同为实的或复的 Hilbert 空间 H 与 $\tilde{H}$ 是同构的当且仅当它们有相同的Hilbert维数。

证明. (a)如果 H 与 $\tilde{H}$ 是同构的且 $T:H\to H$ 是一个同构，则(5)表明 H 中的规格正交元素在 T 下的象是规格正交的。由于 T 是双射，于是我们断定 T 将 H 中的每个完全规格正交集映成 $\tilde{H}$ 中一个完全规格正交集。因此，H 与 $\tilde{H}$ 有相同的 Hilbert

维数。

(b) 反之，假设 H 与 $\tilde{H}$ 有相同的 Hilbert 维数。当 $H=\{0\}$ 与 $\tilde{H}=\{0\}$ 时是平凡的。设 $H\neq\{0\}$，则 $\tilde{H}\neq\{0\}$，且 H 中的任意完全规格正交集 M 和 $\tilde{H}$ 中的任意完全规格正交集 $\tilde{M}$ 有相同的基数，于是可以用相同的指标集 $\{k\}$ 来标记它们，记 $M=(e_k)$ 与 $\tilde{M}=(\tilde{e}_k)$

为了证明 H 与 $\tilde{H}$ 是同构的，我们构造 H 到 $\tilde{H}$ 上的一个同构。对每个 $x\in H$ 我们有

$$x=\sum_k \langle x,e_k\rangle e_k, \tag{6}$$

这里右端是有限项的和或是无穷级数(见3.5-3)，且由 Bessel 不等式知 $\sum_k |\langle x,e_k\rangle|^2<\infty$ 收敛。定义

$$\tilde{x}=Tx=\sum_k \langle x,e_k\rangle \tilde{e}_k. \tag{7}$$

由 3.5-2 知该级数收敛，于是 $\tilde{x}\in\tilde{H}$。算子 T 是线性的，因为内积关于第一个因子是线性的。T 是等距的，因为先由(7)再由(6)得出

$$\|\tilde{x}\|^2=\|Tx\|^2=\sum_k |\langle x,e_k\rangle|^2=\|x\|^2.$$

由此，及 3.1 节中的(9)，(10)看出，T 保持内积不变。而且等距蕴含内射。事实上，如果 $Tx=Ty$，则

$$\|x-y\|=\|T(x-y)\|=\|Tx-Ty\|=0.$$

所以 $x=y$，根据 2.6-10 知 T 是内射。

最后，我们证明 T 是满射。任意给出 $\tilde{H}$ 中之元

$$\tilde{x}=\sum_k \alpha_k\tilde{e}_k.$$

由 Bessel不等式，我们有 $\sum|\alpha_k|^2<\infty$。因此

$$\sum_k a_k e_k$$

是有限和，或是收敛于 $x\in H$ 的级数(由3.5-2)，且根据同一定理得 $a_k=\langle x,e_k\rangle$。于是由(7)得 $\tilde{x}=Tx$。由于 $\tilde{x}\in\tilde{H}$ 是任意的。这证明 T 是满射。▮

习　题

1．如果 F 是内积空间 X 的规格正交基，我们能否表每个 $x\in X$ 为 F 中的元素的线性组合（按定义，线性组合由有限项组成）。

2．证明，如果 Hilbert 空间 H 的正交维数是有限的，则它等于视其为向量空间时 H 的维数；反之，如果后者是有限时，证明前者也是有限的。

3．由初等几何的什么定理使(3)在 n 维 Euclidean 空间成立?

4．由(3)导出下面的公式（它通常叫做 Parseval 公式）

$$\langle x,y\rangle=\sum_k \langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}.$$

5．证明。Hilbert 空间 H 中的规格正交族(e_k),$k\in I$ 是完全的当且仅当对 H 中的一切 x,y，4 题中的关系成立。

6．设 H 是可分 Hilbert 空间，M 是 H 中的可数稠密子集。证明，利用 Gram-Schmidt 方法从 M 可以得出一个完全规格正交序列。

7．证明，如果一个 Hilbert 空间 H 是可分的，则 H 中的完全规格正交集的存在性可以不用 Zorn 引理证得。

8．证明，对可分 Hilbert 空间 H 中任意的规格正交序列 F，都存在完全规格正交序列 $\tilde{F}$ 它含有 F。

9．设 M 是内积空间 X 的完全集。如果对一切的 $x\in M$ 有$\langle v,x\rangle=\langle w,x\rangle$，则 $v=w$。

10．设 M 是 Hilbert 空间 H 的子集，$v,w\in H$。假定对一切 $x\in M$，由$\langle v,x\rangle=\langle w,x\rangle$就蕴含 $v=w$。如果对一切 $v,w\in H$ 此关系都成立，证明 M在 H 中是完全的。

3.7 Legendre 多项式，Hermite 多项式和 Laguerre 多项式

Hilbert 空间的理论在泛函分析的各种论题中得到应用。在本节里我们要讨论在实际问题中（例如在11章我们将见到的量子力学里）频频使用的一些完全规格正交序列与正交序列。这些序列的性质已经被研究得很详尽了。标准的参考材料被列在附录3的A. Erdèlyi et al. (1953-55)中。

本节是选读材料。

3.7-1 Legendre 多项式 在[−1,1]上的一切实值连续函数的内积空间 X 其内积定义为：

$$\langle x, y\rangle=\int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt.$$

根据定理3.2-3它可以完备化。这就给出了一个Hilbert 空间，记为 $L^2[-1,1]$（可以参看例3.1-5）。

我们希望得到$L^2[-1,1]$中的一个完全规格正交序列，要求组成此序列的函数我们容易处理。多项式就合乎这个要求。通过一个简单的办法这个愿望能够实现。我们从幂函数 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 入手，这里

(1) $\qquad x_0(t)=1,\ x_1(t)=t,\cdots,\ x_j(t)=t^j,\cdots \qquad t\in[-1,1]$

这个序列是线性无关的。(证明?) 应用 Gram-Schmidt 方法(3.4节)，我们得到一个规格正交序列(e_n)。每个 e_n 是一多项式，因为在作 e_n 的过程中取的是 x_j 的线性组合。e_n 的次数是 n。我们将看到

$$(e_n)\text{在 } L^2[-1,1]\text{中是完全的。}$$

证明．按定理3.2-3，集 $W=A(X)$ 在 $L^2[-1,1]$中稠密。因

此，对任意固定的$x\in L^2[-1,1]$与任意给定的$\varepsilon>0$，存在$[-1,1]$上的一个连续函数y使得

$$\|x-y\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对这个y，存在一多项式z使得，对一切$t\in[-1,1]$，

$$|y(t)-x(t)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}.$$

这个结果是根据在4.11节里我们要证明的Weierstrass逼近定理而得出，且由此有

$$\|y-z\|^2=\int_{-1}^{1}|y(t)-z(t)|^2dt<2\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\varepsilon^2}{4}.$$

再利用三角不等式．综合起来可得

$$\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|<\varepsilon.$$

Gram-Schmidt方法的定义表明，由(1)，对充分大的m，我们有$z\in\operatorname{Span}\{e_0,\cdots,e_m\}$．因$x\in L^2[-1,1]$，且$\varepsilon>0$是任意的，$(e_n)$的完全性得证．█

为了实际应用，要求各e_n用显式表示．我们给出

(2a) $$e_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t)\qquad n=0,1,\cdots$$

这里

(2b) $$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n].$$

P_n叫做n次Legendre多项式．公式(2b)叫做Rodrigues公式．(2a)中的平方根式其作用是使得$\|e_n\|=1$.*) 这个性质我们不作证明，因为不用它．

应用二项式定理于$(t^2-1)^n$，且逐项微分n次，从(2b)我们得

*) 译者注：原文此处有误。

$$(2c)\qquad P_n(t)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!}t^{n-2j}$$

这里，$N=n/2$，如果 n 是偶数；$N=(n-1)/2$，如果 n 是奇数。因此（图35），

$$P_0(t)=1,\qquad P_1(t)=t,$$

$$(2^*)\qquad P_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1),\qquad P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t),$$

$$P_4(t)=\frac{1}{8}(35t^4-30t^2+3),$$

$$P_5(t)=\frac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t).$$

等等。

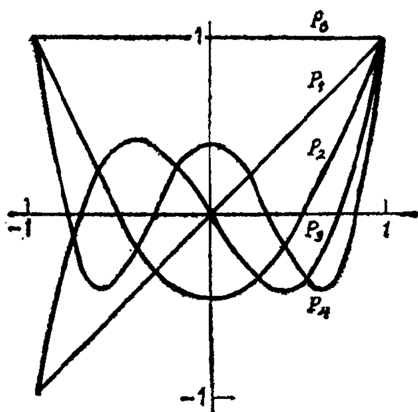


图35 Legendre 多项式

(2a)与(2b)的证明。证明分为(a)，(b)两部分。在(a)中我们证明(2b)蕴含

$$(3)\qquad \|P_n\|=\left[\int_{-1}^{1}P_n^2(t)\,dt\right]^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{2n+1}},$$

使得(2a)中的 e_n 其范数合于要求，范数为1。在(b)这部分我们证明(P_n)是空间 $L^2[-1,1]$中的一个正交序列。这就足以保证建立起(2a)，(2b)，其理由如下。首先用 $y_n(t)$ 表(2a)的右端，则 y_n 是一个 n 次多项式。于是由(a)与(b)得(y_n)是 $L^2[-1,1]$上的规格正交序列。设

$$Y_n=\mathrm{span}\{e_0,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_0,\cdots,x_n\}=\mathrm{span}\{y_0,\cdots,y_n\};$$

这里，第二个等号由Gram-Schmidt 方法的演算中得到，最后一个等号从 $\dim Y_n=n+1$ 连同$\{y_0,\cdots,y_n\}$的线性无关性（见3.4-2）得到。因此 y_n 有表示式

$$(4)\qquad y_n=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j e_j.$$

现根据正交性，

$$y_n\perp Y_{n-1}=\mathrm{span}\{y_0,\cdots,y_{n-1}\}=\mathrm{span}\{e_0,\cdots,e_{n-1}\}.$$

于是，对 $k=0,\cdots,n-1$ 我们有

$$0=\langle y_n,e_k\rangle=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\langle e_j,e_k\rangle=\alpha_k.$$

因此(4)化为 $y_n=\alpha_n e_n$。这里$|\alpha_n|=1$，因为$\|y_n\|=\|e_n\|=1$。实际上，$\alpha_n=+1$或-1，因为 y_n 与 e_n 都是实的。由于在(2c)中 t^n 的系数是正的，对充分大的 t，$y_n(t)>0$。从3.4节中的(13)，(14)以及 $x_n(t)=t^n$ 可以看出，对充分大的 t，也有 $e_n(t)>0$。因此 $\alpha=+1$，于是 $y_n=e_n$，它建立起(2a)，其中 P_n 由(2b)确定。

上述已表明只要将(a)与(b)明确用式子表出之后，证明就完成了。

(a) 由(2b)导出(3)。记 $u=t^2-1$。函数 u^n 及其导数 $(u^n)',\cdots(u^n)^{(n-1)}$在 $t=\pm1$ 处为0，而 $(u^n)^{(2n)}=(2n)!$ 按分部积分法积分 n 次，于是从(2b)得

$$(2^n n!)^2\|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}(u^n)^{(n)}(u^n)^{(n)}dt$$

$$=(u^n)^{(n-1)}(u^n)^{(n)}\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(u^n)^{(n-1)}(u^n)^{(n+1)}dt$$

$$=\cdots$$

$$=(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}u^n dt$$

$$=2(2n)!\int_0^1(1-t^2)^n dt$$

$$=2(2n)!\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\tau d\tau$$

$$=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

用$(2^n n!)^2$去除，即得(3)。

(b) 我们证明$\langle P_m,P_n\rangle=0$，这里$0\leqslant m<n$。因为P_m是一个多项式，只要证明当$m<n$时，$\langle x_m,P_n\rangle=0$就够了，其中x_m如(1)所定义。通过m次分部积分：

$$2^n n!\langle x_m,P_m\rangle=\int_{-1}^{1}t^m(u^n)^{(n)}dt$$

$$=t^m(u^n)^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1}-m\int_{-1}^{1}t^{m-1}(u^n)^{(n-1)}dt$$

$$=\cdots$$

$$=(-1)^m m!\int_{-1}^{1}(u^n)^{(n-m)}dt$$

$$=(-1)^m m!\,(u^n)^{(n-m-1)}\Big|_{-1}^{1}=0.$$

得$\langle x_m,P_m\rangle=0$。这就完成了(2a)与(2b)的证明。∎

Legendre 多项式是重要的 Legendre 微分方程

(5) $$(1-t^2)P_n''-2tP_n'+n(n+1)P_n=0,$$

的解：如果用幂级数方法解(5)，则可以得到(2c)。

其次，空间 $L^2[a,b]$中的一个完全规格正交序列是 (q_n)，这里

(6) $$q_n=\frac{1}{\|P_n\|}P_n, \qquad P_n(t)=P_n(s),$$

$$s=1+2\frac{t-a}{b-a}.$$

如果注意 $a\leqslant t\leqslant b$对应于$-1\leqslant s\leqslant 1$并注意正交性在线性变换$t\mapsto s$下保持不变，从而得到证明。

于是对任意的紧区间 $[a,b]$，$L^2[a,b]$ 中有完全规格正交序列。这样一来，定理3.6-4蕴含

实空间 $L^2[a,b]$是可分的。

3.7-2 Hermite 多项式 更有实际兴趣的空间是 $L^2(-\infty,+\infty)$，$L^2[a,+\infty)$与 $L^2(-\infty,b]$。这些空间是 3.7-1 所未能考虑的。因为积分区间是无穷的，3.7-1中的幂级数 x_0，x_1，…不再有用。但是如果对其中每一个用一个充分地迅速减小的简单函数去乘。可以期望得到一个有限的积分。适当指数的指数函数似乎是自然地可充当这个函数。

考虑实空间 $L^2(-\infty, +\infty)$，内积定义为

$$\langle x,y\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t)\,dt.$$

应用 Gram-Schmidt 方法于函数序列：

$$w(t)=e^{-t^2/2},\ tw(t),\ t^2w(t),\cdots.$$

指数中的因子 1/2 纯粹是为了方便，并无其他的意义。这些函数都是 $L^2(-\infty, +\infty)$中的元素。事实上，它们在 $\mathbf{R}$ 上是有界的，

比方说，$|t^n w(t)| \leqslant k_n$对所有的 t。于是

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2/2} t^n e^{-t^2/2} dt\right| \leqslant k_{m+n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

$$= k_{n+m}\sqrt{2\pi}.$$

Gram-Schmidt 方法给出一规格正交序列(e_n)，这里(图36)

$$\text{(7a)} \qquad e_n(t) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-t^2/2} H_n(t)$$

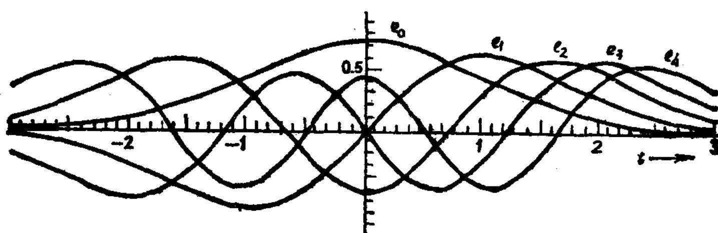


图36 (7a)中关于 Hermite 多项式的函数(e_n)

与

$$\text{(7b)} \qquad H_0(t) = 1, \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

H_n 叫做 n 次 Hermite 多项式。对(7b)式求微商，得出

$$\text{(7c)} \qquad H_n(t) = n! \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!} t^{n-2j},$$

这里，如果n是偶数，则$N = n/2$；如果n是奇数，则$N = (n-1)/2$。此式也可以写成

$$\text{(7c}') \quad H_n(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1)\cdots(n-2j+1)(2t)^{n-2j}$$

前几个 Hermite 多项式的显式表示式是

$$H_0(t) = 1, \qquad\qquad H_1(t) = 2t,$$

$$(7^*)\qquad H_2(t)=4t^2-2,\qquad\qquad H_3(t)=8t^3-12t,$$
$$H_4(t)=16t^4-48t^2+12,$$
$$H_5(t)=32t^5-160t^3+120t.$$

由(7a)与(7b)定义的序列(e_n)是规格正交的。

证明。由(7a)与(7b)表明我们必须证明

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}H_m(t)H_n(t)dt=\begin{cases}0 & m\neq n,\\ 2^n n!\sqrt{\pi} & m=n.\end{cases}$$

微分(7c′)，对 $n\geqslant 1$ 有

$$H_n'(t)=2n\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^j}{j!}(n-1)(n-2)\cdots(n-2j)(2t)^{n-1-2j}$$
$$=2nH_{n-1}(t)$$

这里 $M=(n-2)/2$，如果 n 是偶数；$M=(n-1)/2$，如果 n 是奇数。应用此公式于 H_m，设 $m\leqslant n$，为简单起见，用 v 表示(8)中的指数函数。并按分部积分法积分 m 次，则由(7b)得

$$(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}H_m(t)H_n(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(t)v^{(n)}dt$$
$$=H_m(t)v^{(n-1)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}2mH_{m-1}(t)v^{(n-1)}dt$$
$$=-2m\int_{-\infty}^{+\infty}H_{m-1}(t)v^{(n-1)}dt$$
$$=\cdots$$
$$=(-1)^m2^m m!\int_{-\infty}^{+\infty}H_0(t)v^{(n-m)}dt.$$

这里，$H_0(t)=1$。如果 $m<n$，一次又一次积分，我们得到零，这是因为 v 及其导数当 $t\to+\infty$ 或者 $t\to-\infty$ 时，它们趋近于零。这就证明了(e_n)的正交性。现对 $m=n$ 我们证明(8)。于是由(7a)得出 $\|e_n\|=1$。设 $m=n$，对最后一个积分，记为 J，则得

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

这是一个熟知的结果。为了验证它，考虑J^2，利用极坐标r,θ与$dsdt=rdrd\theta$，得出

$$J^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(s^2+t^2)}dsdt$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi.$$

这就证明了(8)。因此也证明了(e_n)的规格正交性。■

经典的说法，人们通常说(8)式表明H_n构成了关于权函数w^2的一个正交序列，这里w是开始时定义的函数。

可以证明，按(7a)，(7b)定义的(e_n)在实空间$L^2(-\infty,\infty)$中是完全的，因此，该空间是可分的。（见3.6-4）。

最后，我们指出，Hermite多项式H_n满足Hermite微分方程

(9) $$H_n''-2tH_n'+2nH_n=0.$$

当心！不幸地，在文献中这个术语用法不统一。事实上，由下式定义的函数He_n

$$He_0(t)=1,\ He_n(t)=(-1)^n e^{t^2/2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2/2})\quad n=1,2,\cdots$$

也叫"Hermite多项式"，更糟糕地是，有时也记为H_n。

Hermite多项式在量子力学中的应用将在11.3里介绍。

3.7-3 Laguerre多项式 在$L^2[-\infty,b]$或$L^2[a,+\infty]$中的完全规格正交序列可以分别通过变换$t=b-s$和$t=s+a$由

$L^2[0,+\infty]$中的完全规格正交序列而得出.

考虑 $L^2[0,+\infty)$，应用 Gram-Schmidt 程序于序列

$$e^{-t/2},\ te^{-t/2},\ t^2e^{-t/2},\cdots,$$

得到一个规格正交序列(e_n)，可以证明 (e_n) 在 $L^2[0,+\infty)$中是完全的且可表为（见图37）

(10a) $$e_n(t)=e^{-t/2}L_n(t),\ n=0,1,2,\cdots$$

这里，n 次 Laguerre 多项式定义为

(10b) $$L_0(t)=1,\qquad L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t}),$$

$$n=1,2,\cdots$$

即是

(10c) $$L_n(t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}\binom{n}{j}t^j.$$

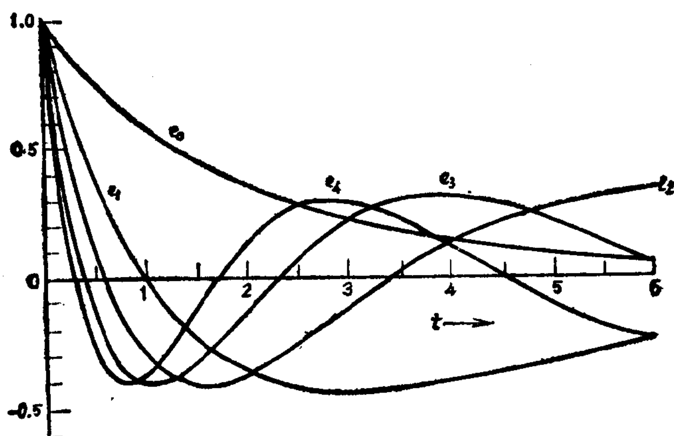


图37 (10a)中关于 Laguerre 多项式的函数e_n

前几个 Laguerre 多项式的显表达式是

$$L_0(t)=1,\qquad L_1(t)=1-t,$$

(10*) $L_2(t)=1-2t+\frac{1}{2}t^2,\quad L_3(t)=1-3t+\frac{2}{3}t^2-\frac{1}{6}t^3,$

$$L_4(t)=1-4t+3t^2-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{24}t^4.$$

Laguerre 多项式 L_n 是 Laguerre 微分方程

(11) $$tL_n''+(1-t)L_n'+nL_n=0$$

的解。

要进一步对这个方面有所了解，请参阅 A. Erdélyi et al. (1953-55)；也可参阅 R. Courant 与 D. Hilbert (1953-62)，卷1。

习　　题

1. 证明 Legendre 微分方程可以写成

$$[(1-t^2)P_n']'=-n(n+1)P_n.$$

将此式乘以 P_m。乘对应于 P_m 的微分方程以 $-P_n$ 并将两式相加。将所得结果从−1到1积分。证明(P_n)是空间$L^2[-1,\ 1]$的正交序列。

2. 从(2b)导出(2c)。

3. （生成函数）求证

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)w^n.$$

左端的函数叫做 Legendre 多项式生成的函数，关于各种特殊函数的生成函数很有用处：见R. Courant与D. Hilbert (1953—62)，A. Erdélyi et al. (1953—55)

4. 求证

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}=\frac{1}{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n,$$

这里r是R^3中给定点A_1与A_2间的距离，（图38）且$r_2>0$.（这个公式在位势理论中很有用.）

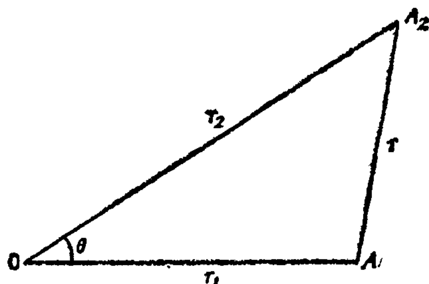


图38　第4题

5. 用幂级数方法按下面的作法得出 Legendre 多项式。将$x(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots$代入 Legendre 微分方程. 求证通过决定系数的方法可得出解$x=c_0x_1+c_1x_2$, 这里

$$x_1(t)=1-\frac{n(n+1)}{2!}t^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}t^4-+\cdots,$$

$$x_2(t)=t-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}t^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}t^5-+\cdots.$$

求证对$n\in N$, 这两个函数之1化成多项式, 如果取 $c_n=(2n)!/2^n(n!)^2$ 为t^n的系数, 则化成的多项式与P_n是一致的。

6. (生成函数) 求证

$$\exp(2wt-w^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(t)w^n.$$

左端的函数叫做 Hermite 多项式的生成函数。

7. 利用(7b), 求证

$$H_{n+1}(t)=2tH_n(t)-H_n'(t).$$

8. 对t微分6题中的生成函数, 求证

$$H_n'(t)=2nH_{n-1}(t)\qquad(n\geqslant1).$$

又利用7题, 证明H_n满足 Hermite 微分方程。

9. 求微分方程$y''+(2n+1-t^2)y=0$的 Hermite 多项式形式的解。

10. 利用8题来证明

$$(e^{-t^2}H_n')'=-2ne^{-t^2}H_n.$$

利用上式, 以及第1题所述方法, 证明(7a)定义的函数在$\mathbf{R}$上正交。

11. (生成函数) 利用(10c), 证明

$$\psi(t,w)=\frac{1}{1-w}\exp\left[-\frac{tw}{1-w}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(t)w^n.$$

12. 对 w 微分11题中的 ψ，求证

(a) $(n+1)L_{n+1}(t)-(2n+1-t)L_n(t)+nL_{n-1}(t)=0$.

对 t 微分 ψ，求证

(b) $L_{n-1}(t)=L_{n-1}'(t)-L_n'(t)$.

13. 利用12题证明

(c) $tL_n'(t)=nL_n(t)-nL_{n-1}(t)$.

利用上式，以及12题中之(b)，证明 L_n 满足 Laguerre 微分方程(11)。

14. 求证(10a)中的函数其范数为1.

15. 证明(10a)中的函数在空间 $L^2[0,+\infty)$ 中构成一个正交序列。

3.8 Hilbert 空间上的泛函的表示

在各种空间中，要知道定义在它们上面的有界线性泛函的一般形式是很重要的问题。这已经在2.10节指出过并作了解释。对一般的 Banach 空间而言，这种一般表示形式和其推导有时是很繁难的。但是，对 Hilbert 空间，情况却是惊人的简单。

3.8-1 Riesz 定理（Hilbert 空间上的泛函） 在 Hilbert 空间 H 上的每个有界线性泛函 f 都可表示为内积的形式，即

$$f(x)=\langle x,z\rangle, \tag{1}$$

这里 z 依赖于 f，且被 f 唯一确定，而且 f 的范数合于

$$\|z\|=\|f\|. \tag{2}$$

证明。我们证

(a) f 有表示式(1)，

(b) (1)中的 z 是唯一的，

(c) 公式(2)成立。

证明的详细过程如下：

(a) 如果 $f=0$，取 $z=0$，则(1)与(2)成立。现设 $f\neq 0$，

为了引出我们的证明思想，我们要问，如果说(1)式成立，那末 z 必须具备什么样的性质呢？首先，$z\neq 0$，因为，否则 $f=0$。第二，使 $f(x)=0$ 的一切 x 有 $\langle x,z\rangle=0$，即是，$\langle x,z\rangle=0$ 对 f 的零空间 $\mathcal{N}(f)$ 中的一切 x 成立。因此 $z\perp\mathcal{N}(f)$。这启示我们考察 $\mathcal{N}(f)$ 和它的正交补 $\mathcal{N}(f)^{\perp}$。

由2.6-9知 $\mathcal{N}(f)$ 是向量空间，又由2.7-10知 $N(f)$ 是闭的。而且，$f\neq 0$ 蕴含 $\mathcal{N}(f)\neq H$，于是 $\mathcal{N}(f)^{\perp}\neq\{0\}$（由投影定理 3.3-4）。因此，$\mathcal{N}(f)^{\perp}$ 含有 $z_0\neq 0$。设

$$v=f(x)z_0-f(z_0)x,$$

这里 $x\in H$ 是任意的。将 f 作用于 v，得出

$$f(v)=f(x)f(z_0)-f(z_0)f(x)=0.$$

这表明 $v\in\mathcal{N}(f)$。因 $z_0\perp\mathcal{N}(f)$，我们有

$$\begin{aligned}0&=\langle v,z_0\rangle=\langle f(x)z_0-f(z_0)x,z_0\rangle\\&=f(x)\langle z_0,z_0\rangle-f(z_0)\langle x,z_0\rangle.\end{aligned}$$

注意到 $\langle z_0,z_0\rangle=\|z_0\|^2\neq 0$，故可对 $f(x)$ 求解，得到

$$f(x)=\frac{f(z_0)}{\langle z_0,z_0\rangle}\langle x,z_0\rangle.$$

这就可以写成(1)的形式，其中

$$z=\frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0,z_0\rangle}z_0.$$

因为 $x\in H$ 是任意的，(1)得证。

(b) 我们证明(1)中的 z 是唯一的。设对一切 $x\in H$，

$$f(x)=\langle x,z_1\rangle=\langle x,z_2\rangle.$$

则 $\langle x,z_1-z_2\rangle=0$，对一切 $x\in H$。特别取 $x=z_1-z_2$，则

$$\langle x,z_1-z_2\rangle=\langle z_1-z_2,\ z_1-z_2\rangle=\|z_1-z_2\|^2=0.$$

因此，$z_1-z_2=0$，所以 $z_1=z_2$。得证唯一性。

(c) 最后证明(2)式成立。如果 $f=0$，则 $z=0$ 因而(2)式成立。设 $f\neq 0$，则 $z\neq 0$。由(1)（让其 $x=z$）及2.8节的(3)式，我们

得到

$$\|z\|^2=\langle z,z\rangle=f(z)\leqq\|f\|\|z\|.$$

用$\|z\|\neq 0$去除不等式两端，得$\|z\|\leqq\|f\|$. 尚须证明$\|f\|\leqslant z$. 由(1)和 Schwarz 不等式（3.2节），有

$$|f(x)|=|\langle x,z\rangle|\leqq\|x\|\|z\|,$$

这蕴含

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|\langle x,z\rangle|\leqq\|z\|. \qquad \blacksquare$$

(b)中证明唯一性的思想值得注意，后面要用到。

3.8-2 引理（等式） 如果$\langle v_1,w\rangle=\langle v_2,w\rangle$对内积空间$X$中的一切$w$成立，则$v_1=v_2$. 特别，$\langle v_1,w\rangle=0$对一切 $w\in X$ 成立，则$v_1=0$。

证明。由假设，对一切w，有

$$\langle v_1-v_2,w\rangle=\langle v_1,w\rangle-\langle v_2,w\rangle=0.$$

对 $w=v_1-v_2$，则得$\|v_1-v_2\|^2=0$，因此，$v_1-v_2=0$，所以 $v_1=v_2$。特别，如果$\langle v_1, w\rangle=0$，命$w=v_1$，则 $\|v_1\|^2=0$，于是$v_1=0$。 $\blacksquare$

Hilbert 空间上的有界线性泛函具有的实用意义在很大程度上是由于有这个简单的 Riesz 表示式(1)。

而且，在 Hilbert 空间算子理论中，(1)式十分重要，特别，它与有界线性算子T 的 Hilbert 伴随算子T^*相联系。关于T^*我们将在下节定义它。为此目的，我们需要一些予备知识，这些知识也不局限于在这里的应用而是有更深刻的意义。

3.8-3 定义（一个半线性型） 设X,Y是同一域K(=**R**或**C**) 上的向量空间，则在$X\times Y$ 上的一个半线性型（或一个半线性泛函）h是一映象

$$h: \quad X \times Y \to K$$

使得对一切x，$x_1, x_2 \in X$与$y, y_1, y_2 \in Y$及一切纯量α, β。

(3) (a) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$，

(b) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$，

(c) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$，

(d) $h(x, \beta y) = \bar{\beta} h(x, y)$。

因此，h对第一个变元是线性的，而对第二个变 元则 是共轭线性的，如果X与Y都是实的（即$K = \mathrm{R}$），则(3d)简化为

$$h(x, \beta y) = \beta h(x, y).$$

因为h对两个变元都是线性的，故h叫做双线性的。

如果X和Y是赋范空间，且如果存在正实数c使得对一切x, y

$$(4) \qquad |h(x, y)| \leqq c\|x\|\|y\|,$$

则h叫做有界的，且数

$$(5) \qquad \|h\| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|h(x, y)|}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\substack{\|x\| = 1 \\ \|y\| = 1}} |h(x, y)|$$

叫做h的范数。■

例如，内积是一个半线性的且有界。

注意，从(4)与(5)，我们有

$$(6) \qquad |h(x, y)| \leqq \|h\|\|x\|\|y\|.$$

术语“一个半线性”是3.1节提出的。在定义 3.8-3，两个词“型”与“泛函”都通用，使用这个或那个完全看个人的爱好。在两个变元情况下，用“型”似乎稍好一点，而将“泛函”一词保持用于一个变元的情形，这正如定理3.8-1里所作的那样。以后我们将这么办。

十分有趣地是，从定理3.8-1，可以得到在 Hilbert 空 间 上的半双线性型的一般表示式如下。

3.8-4 定理（Riesz表示） 设 H_1，H_2 是 Hilbert 空间且

$$h:\quad H_1\times H_2\to K$$

是有界的半双线性型，则 h 有表示式

$$h(x,y)=\langle Sx,y\rangle, \tag{7}$$

这里 $S:H_1\to H_2$ 是一个有界线性算子，S 被 h 唯一确定，且范数

$$\|S\|=\|h\|. \tag{8}$$

证明．考虑 $\overline{h(x,y)}$．它对 y 是线性的，因为有一横杠。为了能应用定理 3.8-1，我们保持 x 固定。于是得到以 y 为变元的表示式，比如说

$$\overline{h(x,y)}=\langle y,z\rangle,$$

因此

$$h(x,y)=\langle z,y\rangle, \tag{9}$$

这里，$z\in H_2$ 是唯一的，当然，它依赖于我们的固定点 $x\in H_1$。从这里，(9) 式关于变元 x，定义了一个算子

$$S:\ H_1\to H_2,\quad z=Sx.$$

将 $z=Sx$ 代入 (9) 式，则得 (7) 式

S 是线性的．事实上，它的定义域是向量空间 H_1，从 (7) 式及一个半线性型得

$$\begin{aligned}\langle S(\alpha x_1+\beta x_2),y\rangle&=h(\alpha x_1+\beta x_2,y)\\&=\alpha h(x_1,y)+\beta h(x_2,y)\\&=\alpha\langle Sx_1,y\rangle+\beta\langle Sx_2,y\rangle\\&=\langle \alpha Sx_1+\beta Sx_2,y\rangle\end{aligned}$$

对一切 $y\in H_2$ 成立，于是由引理 3.8-2

$$S(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Sx_1+\beta Sx_2.$$

S 是有界的。事实上，除 $S=0$ 是个平凡的情况外，从 (5) 与 (7)，有

$$\|h\|=\sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{|\langle Sx,y\rangle|}{\|x\|\|y\|}\geqq\sup_{\substack{x\neq 0\\ Sx\neq 0}}\frac{|\langle Sx,Sx\rangle|}{\|x\|\|Sx\|}=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Sx\|}{\|x\|}=\|S\|.$$

这证明了有界性，且$\|h\|\geqq\|S\|$。

注意到$\|h\|\leqq\|S\|$可以通过利用 Schwarz 不等式得出。即是

$$\|h\|=\sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{|\langle Sx,y\rangle|}{\|x\|\|y\|}\leqq\sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{\|Sx\|\|y\|}{\|x\|\|y\|}=\|S\|$$

(8)式即得。

S是唯一的。事实上，设存在线性算子$T:H_1\to H_2$使得对一切$x\in H_1$与$y\in H_2$，有

$$h(x,y)=\langle Sx,y\rangle=\langle Tx,y\rangle,$$

则由引理3.8-2，对一切$x\in H_1$有$Sx=Tx$。因此，按定义，$S=T$。∎

习　　题

1. (空间$\mathbf{R}^3$)求证$\mathbf{R}^3$上的任一线性泛函f可以表为点积

$$f(x)=x\cdot z=\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2+\xi_3\zeta_3.$$

2. (空间l^2)求证l^2上的每个有界线性泛函f可以表为

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\zeta_j\qquad [z=(\zeta_j)\in l^2].$$

3. 如果z是内积空间X的任一固定元素，证明$f(x)=\langle x,z\rangle$在X上定义了一个有界线性泛函，其范数为$\|z\|$。

4. 考虑3题，如果由$z\longmapsto f$给出的映象$X\to X'$是映上的，求证X一定是一个Hilbert 空间。

5. 证明实空间l^2的对偶空间是l^2(利用3.8-1)。

6. 证明定理 3.8-1 定义了一个等距双射映象$T:H\to H'$，$z\longmapsto f_z=\langle\cdot,z\rangle$，它不是线性的而是共轭线性的，即是$\alpha z+\beta v\longmapsto\bar{\alpha}f_z+\bar{\beta}f_v$。

7. 证明 Hilbert 空间H的对偶空间H'是一个内积空间其内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$定义为

$$\langle f_z, f_v\rangle_1 = \overline{\langle z, v\rangle} = \langle v, z\rangle,$$

这里 $f_z(x) = \langle x, z\rangle$，等等。

8. 证明任一Hilbert空间与它的第二对偶空间 $H'' = (H')'$ 是同构的(见3.6节)。(这个性质叫做H的自反性，将在4.6节对赋范空间的情形作详细讨论)

9. (零化子)设 $M \neq \phi$ 是Hilbert空间 H 的子集，试解释2.10节13题的 M^a 与3.3节中 $M^\perp$ 之间的关系。

10. 证明内积空间 X 上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是有界的一个半线性型 h。这里 h 的范数是什么？

11. 如果 X 是一个向量空间，而 h 是 $X\times X$ 上的半双线性型，证明 $f_1(x) = h(x, y_0)$ 对固定的 y_0 定义了 X 上的线性泛函 f_1，而 $f_2(y) = \overline{h(x_0, y)}$ 对于固定的 x_0 也如此。

12. 设 X 与 Y 都是赋范空间，证明 $X\times Y$ 上的有界一个半线性型是两个变元的二元连续函数。

13. (Hermite 型)设 X 是域 K 上的向量空间。$X\times X$ 上的Hermitian一个半线性型，或者简称为Hermitian型是一个映象 $h: X\times X\to K$ 使得对一切 $x, y, z\in X$ 与 $a\in K$，

$$h(x+y, z) = h(x, z) + h(y, z),$$
$$h(ax, y) = ah(x, y),$$
$$h(x, y) = \overline{h(y, x)}.$$

如果 $K = \mathbf{R}$，最后一个条件是什么？要成为 X 上的内积空间，h 还必须加上什么条件？

14. (Schwarz不等式)设 X 是一个向量空间，而 h 是 $X\times X$ 上的Hermitian型。如果 $h(x, x)\geqslant 0$ 对一切 $x\in X$ 成立，称此型为半正定的。证明 h 满足Schwarz不等式

$$|h(x, y)|^2 \leqslant h(x, x)h(y, y).$$

15. (半范数)如果 h 满足14题的条件，证明

$$p(x) = \sqrt{h(x, x)} \qquad (\geqslant 0)$$

定义了 X 上的半范数(见2.3节12题)。

3.9 Hilbert 伴随算子

前节的结果使我们可以引入Hilbert空间上有界线性算子的

Hilbert 伴随算子．这种算子是从矩阵的问题，线性微分方程与线性积分方程的问题提出来的，我们将要看到由它可以定义三类重要的算子（叫做自伴算子，酉算子和正规算子），对它们已作了广泛的研究，因为它们在各种不同的应用中起着关键的作用．

3.9-1 定义(Hilbert 伴随算子T*) 设$T: H_1 \to H_2$是一个有界线性算子，这里H_1与H_2都是Hilbert空间．则T的Hilbert伴随算子T^*是这样的算子

$$T^*: \quad H_2 \to H_1$$

使得①对一切$x \in H_1$，$y \in H_2$有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle. \tag{1}$$

当然，首先应证明这个定义有意义，即要证明对给定的T，这样的T^*的确存在．

3.9-2 定理（存在性） 在定义3.9-1中T的Hilbert伴随算子T^*存在唯一，且是有界线性算子，其范数为

$$\|T^*\| = \|T\|. \tag{2}$$

证明．公式

$$h(y,x) = \langle y, Tx\rangle \tag{3}$$

定义了$H_2 \times H_1$上的一个$1\frac{1}{2}$线性型，这是因为内积是$1\frac{1}{2}$线性，而T是线性的．事实上，此型的共轭线性从下面可以看出

$$\begin{aligned} h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle y, T(\alpha x_1 + \beta x_2)\rangle \\ &= \langle y, \alpha Tx_1 + \beta Tx_2\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle y, Tx_1\rangle + \bar{\beta}\langle y, Tx_2\rangle \\ &= \bar{\alpha}h(y, x_1) + \bar{\beta}h(y, x_2). \end{aligned}$$

---

① 我们可以用同一个记号表H_1与H_2的内积．因为它的因子就表明了内积是涉及那个空间的．

又h是有界的.事实上，这可由Schwarz不等式得出

$$|h(y,x)|=|\langle y,Tx\rangle|\leqq\|y\|\|Tx\|\leqq\|T\|\|x\|\|y\|.$$

这也蕴含了$\|h\|\leqq\|T\|$.此外，由

$$\|h\|=\sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{|\langle y,Tx\rangle|}{\|y\|\|x\|}\geqq\sup_{\substack{x\neq 0\\ Tx\neq 0}}\frac{|\langle Tx,Tx\rangle|}{\|Tx\|\|x\|}=\|T\|.$$

我们有$\|h\|\geqq\|T\|$.

综合起来可得

$$(4)\qquad \|h\|=\|T\|.$$

定理3.8-4给出了h的Riesz表示；将那里的S用T^*代替，我们有

$$(5)\qquad h(y,x)=\langle T^*y,x\rangle,$$

而且，从该定理知$T^*:H_2\to H_1$是唯一确定的有界线性算子，其范数[见(4)]为

$$\|T^*\|=\|h\|=\|T\|.$$

这就证明了(2).比较(3)与(5)得到$\langle y,Tx\rangle=\langle T^*y,x\rangle$，取共轭就得到(1).现在看到事实上$T^*$就是所求的算子. ∎

在我们研究 Hilbert 伴随算子的性质时，利用以下的引理是方便的.

3.9-3 引理（零算子） 设X与Y是内积空间，且$Q:X\to Y$是有界线性算子，则

(a) $Q=0$当且仅当对一切$x\in X$与$y\in Y$ $\langle Qx,y\rangle=0$

(b) 如果$Q:X\to X$,这里X是复的，且对一切$x\in X$,$\langle Qx,x\rangle=0$,则$Q=0$.

证明. (a)$Q=0$意思是对一切x，$Qx=0$，且蕴含$\langle Qx,y\rangle=\langle 0,y\rangle=0\langle w,y\rangle=0$.反之，对一切$x$与$y$，$\langle Qx,y\rangle=0$蕴含$Qx=0$对一切$x$成立（根据3.8-2），所以，按定义，$Q=0$.

(b) 根据假设知，对每个$v=\alpha x+\beta y\in X$，$\langle Qv,v\rangle=0$ 即是

$$0=\langle Q(\alpha x+y),\alpha x+y\rangle$$
$$=|\alpha|^2\langle Qx,x\rangle+\langle Qy,y\rangle+\alpha\langle Qx,y\rangle+\bar{\alpha}\langle Qy,x\rangle.$$

由假设，知右端前两项为零．当$\alpha=1$时得

$$\langle Qx,y\rangle+\langle Qy,x\rangle=0,$$

而当$\alpha=i$，有$\bar{\alpha}=-i$，故得

$$\langle Qx,y\rangle-\langle Qy,x\rangle=0.$$

将此两式相加得$\langle Qx,y\rangle=0$．于是由(a)得$Q=0$． ∎

在这个引理的(b)中，X是复的这个条件是本质的．事实上，如果X是实的时结论可能不成立．将平面$\mathbf{R}^2$旋转一个直角的旋转Q就是一个反例．Q是线性的，且$Qx\perp x$，因此，对一切$x\in\mathbf{R}^2$，$\langle Qx,x\rangle=0$，但$Q\neq0$．（这样的旋转在复平面上会怎样？）

我们现在列出并证明 Hilbert 伴随算子的一些一般性质．在应用这些算子时它们使用得很频繁．

3.9-4 定理（Hilbert 伴随算子的性质） 设H_1，H_2都是Hilbert空间，$S:H_1\to H_2$，$T:H_1\to H_2$都是有界线性算子，而α是任意纯量．则有

(6)
(a) $\langle T^*y,x\rangle=\langle y,Tx\rangle \qquad (x\in H_1, y\in H_2)$
(b) $(S+T)^*=S^*+T^*$
(c) $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$
(d) $(T^*)^*=T$
(e) $\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$
(f) $T^*T=0 \iff T=0$
(g) $(ST)^*=T^*S^* \qquad$ (假定$H_2=H_1$)．

证明．

(a) 由(1)得出(6a)；

$$\langle T^*y,x\rangle=\overline{\langle x,T^*y\rangle}=\overline{\langle Tx,y\rangle}=\langle y,Tx\rangle.$$

(*b*) 由(1)，对一切x与y

$$\begin{aligned}\langle x,(S+T)^*y\rangle&=\langle (S+T)x,y\rangle\\&=\langle Sx,y\rangle+\langle Tx,y\rangle\\&=\langle x,S^*y\rangle+\langle x,T^*y\rangle\\&=\langle x,(S^*+T^*)y\rangle.\end{aligned}$$

因此对一切y，由3.8-2，$(S+T)^*y=(S^*+T^*)y$，据定义，这就是(6*b*)。

(*c*) 一定不要把(6*c*)式与$T^*(\alpha x)=\alpha T^*x$相混淆。通过下面计算再应用引理3.9-3(*a*)于$Q=(\alpha T)^*-\bar{\alpha}T^*$，可得(6*c*)

$$\begin{aligned}\langle(\alpha T)^*y,x\rangle&=\langle y,(\alpha T)x\rangle\\&=\langle y,\alpha(T)x\rangle\\&=\bar{\alpha}\langle y,Tx\rangle\\&=\bar{\alpha}\langle T^*y,x\rangle\\&=\langle\bar{\alpha}T^*y,x\rangle.\end{aligned}$$

(*d*) 记$(T^*)^*=T^{**}$它等于T，因为对一切$x\in H_1$与$y\in H_2$，从(6*a*)与(1)有

$$\langle(T^*)^*x,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle=\langle Tx,y\rangle.$$

由引理3.9-3(*a*)，让那里的$Q=(T^*)^*-T$，于是得出(6*d*)。

(*e*) 我们知道$T^*T:H_1\to H_1$，而$TT^*:H_2\to H_2$。由Schwarz不等式，得出

$$\|Tx\|^2=\langle Tx,Tx\rangle=\langle T^*Tx,\ x\rangle\leqq\|T^*Tx\|\|x\|\leqq\|T^*T\|\|x\|^2.$$

对一切范数为1的x取上确界，得到$\|T\|^2\leqq\|T^*T\|$。再应用2.7节，(7)与本节(2)得到

$$\|T\|^2\leqq\|T^*T\|\leqq\|T^*\|\|T\|=\|T\|^2.$$

因此$\|T^*T\|=\|T\|^2$。将T换成T^*再利用(2)。我们又得到

$$\|T^{**}T^*\|=\|T^*\|^2=\|T\|^2.$$

由(6d)知$T^{**}=T$.所以(6e)得证.

(f) 由(6e)我们立即得到(6f)

(g) 反复应用(1)则有

$$\langle x,(ST)^*y\rangle=\langle (ST)x,y\rangle=\langle Tx,S^*y\rangle=\langle x,T^*S^*y\rangle.$$

因此，$(ST)^*y=(T^*S^*)y$(由3.8-2).按定义这就是(6g).▮

习　　题

1. 证明$O^*=O, I^*=I$.

2. 设H为 Hilbert 空间，$T:H\to H$是双射有界线性算子且其逆有界，求证$(T^*)^{-1}$存在，且有

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$$

3. 设(T_n)是Hilbert空间上的有界线性算子序列且$T_n\to T$.求证$T_n^*\to T^*$.

4. 设H_1与H_2是Hilbert 空间，$T:H_1\to H_2$是有界线性子.如果$M_1\subset H_1$与$M_2\subset H_2$合于$T(M_1)\subset M_2$，求证$M_1^\perp\supset T^*(M_2^\perp)$.

5. 设4题中的M_1与M_2都是闭子空间.求证$T(M_1)\subset M_2$当且仅当$M_1^\perp\supset T^*(M_2^\perp)$.

6. 如果4题的$M_1=\mathcal{N}(T)=\{x|Tx=0\}$，求证

(a) $T^*(H_2)\subset M_1^\perp$，($b$) $[T(H_1)]^\perp\subset\mathcal{N}(T^*)$，($c$) $M_1=[T^*(H_2)]^\perp$

7. 设T_1与T_2都是复 Hilbert 空间H到自身中的有界线性算子.如果$\langle T_1x,x\rangle=\langle T_2x,x\rangle$对一切$x\in H$成立，证明$T_1=T_2$.

8. 设$S=I+T^*T:H\to H$，这里T线性有界.求证$S^{-1}:S(H)\to H$存在.

9. 证明Hilbert 空间上的有界线性算子$T:H\to H$有有限维值域当且仅当T可以表成如下形式

$$Tx=\sum_{j=1}^{n}\langle x,v_j\rangle w_j \qquad [v_j,w_j\in H].$$

10. （右移算子）设(e_n)是可分 Hilbert 空间H中的完全规格正交序列.现定义右移算子如下，它是一个线性算子$T:H\to H$使得$Te_n=e_{n+1}$对$n=1,2,\cdots$,成立.解释此算子为什么有这样称呼.求其值域，零空间，范数，和T

的Hilbert伴随算子。

3.10 自伴算子，酉算子和正规算子

一些有极其重要实际意义的有界线性算子类现可以用Hilbert伴随算子定义如下。

3.10-1 定义（自伴的，酉的与正规的算子） Hilbert空间H上的有界线性算子$T:H\to H$称为是

自伴的或Hermitian，如果 $T^*=T$，

酉的，如果T是双射 $T^*=T^{-1}$，

正规的，如果 $TT^*=T^*T$。

T的Hilbert伴随算子T^*是3.9节(1)中所定义的，即是

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle.$$

如果T是自伴的，我们看到，此公式成为

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle. \tag{1}$$

如果T是自伴的或T是酉的，则T是正规的。

这个论断立即可以从定义看出。当然，正规算子不必是自伴的或酉的。例如。设$I:H\to H$是恒等算子，则$T=2iI$是正规的，因为$T^*=-2iI$（见3.9-4），所以$TT^*=T^*T=4I$，但$T^*\neq T$以及$T^*\neq T^{-1}=-\frac{1}{2}iI$。

不是正规的算子很容易从下例中得出。读者可以证明，3.9节10题中的算子T是另一个不正规的算子。

定义3.10-1中的名称也用于矩阵。对此我们要加以说明并指出一些重要的关系，请看下面的

3.10-2 例（矩阵） 考虑$\mathbf{C}^n$其内积定义为（见3.1-4）

(2) $$\langle x, y\rangle = x^T \bar{y}$$

这里x与y都表列向量，而T表示转置；于是$x^T = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，并且我们用通常的矩阵乘法.

设$T: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$是一个线性算子（根据定理2.7-8它是有界的）. 给出了$\mathbf{C}^n$的一个基，我们可以将T和它的Hilbert伴随算子T^*表成两个n行方阵，比如说，它们分别是A与B.

利用(2)以及熟知的法则 $(Bx)^T = x^T B^T$（关于矩阵乘积的转置），我们得到

$$\langle Tx, y\rangle = (Ax)^T \bar{y} = x^T A^T \bar{y}$$

和

$$\langle x, T^* y\rangle = x^T \bar{B} \bar{y}.$$

根据3.9节的(1)式，两式的左端对一切x, $y \in \mathbf{C}^n$是相等的，因此一定有$A^T = \bar{B}$.于是有

$$B = \bar{A}^T.$$

我们得到如下的结果.

设给出了$\mathbf{C}^n$的一个基，因而$\mathbf{C}^n$上的一个线性算子已表成某个矩阵，则它的Hilbert伴随算子就表作该矩阵的复共轭转置阵.

因此，称表示T的矩阵是

Hermitian，当T是自伴的(Hermitian)，

酉的，当T是酉的，

正规的，当T是正规的.

类似地，对于线性算子$T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，称表示$T$的矩阵是

实对称的，当T是自伴的，

正交的，当T是酉的.

就矩阵来说，记住以下的定义.方阵$A = (\alpha_{jk})$称为是

Hermitian，如果$\bar{A}^T = A$，（因此$\bar{\alpha}_{kj} = \alpha_{jk}$），

反Hermitian，如果$\bar{A}^T = -A$，（因此$\bar{\alpha}_{kj} = -\alpha_{jk}$）

酉的，如果$\bar{A}^T=A^{-1}$.

正规的，如果$A\bar{A}^T=\bar{A}^TA$.

实方阵$A=(\alpha_{jk})$称为是

（实）对称的，当$A^T=A$，　　（因此$\alpha_{kj}=\alpha_{jk}$），

（实）反对称的，当$A^T=-A$，　（因此$\alpha_{kj}=-\alpha_{jk}$），

正交的，当$A^T=A^{-1}$.

于是，实 Hermitian 矩阵是(实)对称矩阵.实反Hermitian矩阵是(实)反对称矩阵.实酉矩阵是正交矩阵.(Hermitian 矩阵是因法国数学家Charles Hermite,1822—1901而得名）∎

现在回到任意的 Hilbert 空间上的线性算子，给出关于自伴性的非常重要但颇为简单的判别准则.

3.10-3　定理（自伴性）　设$T:H\to H$是Hilbert空间H上的有界线性算子.则

(a)　如果T是自伴的，则$\langle Tx,x\rangle$对一切$x\in H$就是实的.

(b)　如果H是复的，且$\langle Tx,x\rangle$对一切$x\in H$是实的，那末算子T就是自伴的.

证明. (a)如果T是自伴的，则对一切的x,

$$\overline{\langle Tx,x\rangle}=\langle x,Tx\rangle=\langle Tx,x\rangle.$$

因此$\langle Tx,x\rangle$等于它的复共轭，所以它是实的.

(b)如果$\langle Tx,x\rangle$对一切x是实的，则

$$\langle Tx,x\rangle=\overline{\langle Tx,x\rangle}=\overline{\langle x,T^*x\rangle}=\langle T^*x,x\rangle.$$

因此

$$0=\langle Tx,x\rangle-\langle T^*x,x\rangle=\langle (T-T^*)x,x\rangle,$$

于是$T-T^*=0$（由引理3.9-3(b)).因此H是复的.∎

在本定理之(b)中，条件H是复的必不可少.因为显然，实空间H的内积是实的，不用对线性算子T作任何别的假定$\langle Tx,x\rangle$就

是实的。

自伴算子的积（复合）[1] 在应用中经常出现。所以下面这个定理很有用。

3.10-4 定理（积的自伴性） Hilbert空间 H 上的有界自伴线性算子 S 与 T 之积是自伴的当且仅当此二算子是交换的，即

$$ST=TS.$$

证明。由上节的(6g)及本定理的假设得

$$(ST)^*=T^*S^*=TS.$$

因此 $$(ST)=(ST)^*\Longleftrightarrow ST=TS.$$

定理得证。█

自伴算子序列出现在各种问题中，关于它们有以下定理。

3.10-5 定理（自伴算子序列） 设 (T_n) 是Hilbert空间 H 上的有界自伴线性算子 $T_n: H\to H$ 的序列。设 (T_n) 收敛，比如说

$$T_n\to T,\ \text{即}\ \|T_n-T\|\to 0,$$

这里 $\|\cdot\|$ 是按空间 $B(H,H)$ 上的范数；（见2.10节）。则此极限算子 T 是 H 上的有界自伴线性算子。

证明。我们必须证明 $T^*=T$，这可由 $\|T-T^*\|=0$ 得出。为证明此式，根据3.9-4与3.9-2，我们利用

$$\|T_n^*-T^*\|=\|(T_n-T)^*\|=\|T_n-T\|,$$

又利用 $B(H,H)$ 中的三角不等式有

$$\begin{aligned}\|T-T^*\| &\leqq \|T-T_n\|+\|T_n-T_n^*\|+\|T_n^*-T^*\|\\ &=\|T-T_n\|+0+\|T_n-T\|\end{aligned}$$

---

[1] 关于复合映射的术语及记号的复习材料见附录1的A1.2.

$$=2\|T_n-T\|\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

因此$\|T-T^*\|=0$，于是，$T^*=T$. ▮

这些定理使我们对自伴线性算子的基本性质有了一些概念。这将有利于我们进一步的工作，特别是关于这些算子的谱理论（第9章），在那里将讨论有关的进一步的性质.

我们现在回到酉算子，且考察它们的一些基本性质。

3.10-6 定理（酉算子） 设算子$U:H\to H$与$V:H\to H$是酉的；这里H是Hilbert空间。则

(a)U是等距的（见1.6-1）；于是$\|Ux\|=\|x\|$对一切$x\in H$成立；

(b)$\|U\|=1$，假如$H\neq\{0\}$，

(c)$U^{-1}(=U^*)$是酉的，

(d)UV的酉的，

(e)U是正规的，

进一步还有

(f)复Hilbert空间H上的有界线性算子T是酉的当且仅当T是等距和映上的。

证明。(a)可由下式看出

$$\|Ux\|^2=\langle Ux,Ux\rangle=\langle x,U^*Ux\rangle=\langle x,Ix\rangle=\|x\|^2.$$

(b)立即可由(a)得到。

(c)因U是双射，因而U^{-1}也是，于是由3.9-4，

$$(U^{-1})^*=U^{**}=U=(U^{-1})^{-1}.$$

(d)UV是双射，于是由3.9-4与2.6-11得

$$(UV)^*=V^*U^*=V^{-1}U^{-1}=(UV)^{-1}.$$

(e)由$U^{-1}=U^*$与$UU^{-1}=U^{-1}U=I$ 得到.

(f)假设T是等距与映上的.因等距蕴含内射，所以T是双射。我们现证$T^*=T^{-1}$.由于等距

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle.$$

因此

$$\langle (T^*T - I)x, x\rangle = 0.$$

于是 $T^*T - I = 0$（由引理3.9-3(b)），所以$T^*T = I$。因此，有

$$TT^* = TT^*(TT^{-1}) = T(T^*T)T^{-1} = TIT^{-1} = I.$$

综合以上之结果，得$T^*T = TT^* = I$。于是$T^* = T^{-1}$，所以T是酉的。逆命题显然成立。因为由(a)知T是等距的，且按定义T是映上的。▮

注意。等距算子未必是酉的，因为它可能不是映上的，下面的右移算子 $T: l^2 \to l^2$，

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \cdots) \longmapsto (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$$

就是这样的例子，这里$x = (\xi_j) \in l^2$。

习　　题

1. 如果S与T都是Hilbert空间H上的有界自伴线性算子，而α与β都是实数，求证$\tilde{T} = \alpha S + \beta T$是自伴的。

2. 怎样用定理3.10-3证明H是复Hilbert空间时的定理3.10-5。

3. 证明，如果$T: H \to H$是有界自伴线性算子，则T^n也是，这里n是一个正整数。

4. 证明，如果T是H上的任一有界线性算子，则

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \qquad 与 \qquad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

都是自伴的，证明

$$T = T_1 + iT_2 \qquad\qquad T^* = T_1 - iT_2.$$

证明唯一性，即是，$T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2$蕴含$S_1 = T_1$与$S_2 = T_2$；这里根据假设S_1与S_2都是自伴的。

5. 在$\mathbf{C}^2$上(见3.1-4)。设算子$T: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$由$Tx = (\xi_1 + i\xi_2, \xi_1 - i\xi_2)$定义，这里$x = (\xi_1, \xi_2)$。求$T^*$。证明，$T^*T = TT^* = 2I$。求按4题定义的$T_1$与$T_2$。

6. 如果$T: H \to H$是有界自伴线性算子，且$T \neq 0$，则$T^n \neq 0$，(a)对$n = 2, 4, 8, 16, \cdots$成立。(b)对一切$n \in \mathbf{N}$成立。

7. 证明酉矩阵的列向量构成关于C^n的内积的一个规格正交集。

8. 证明等距线性算子$T: H \to H$满足$T^*T=I$，其中I是H上的恒等算子。

9. 证明等距线性算子$T: H \to H$它不是酉算子时，则将Hilbert空间H映到H的真闭子空间上。

10. 设X是内积空间而$T: X \to X$是等距线性算子。如果$\dim X<\infty$，证明T是酉的。

11. (酉等价性)设S与T是Hilbert空间H上的线性算子。称算子S是酉等价于T的，如果有H上的酉算子，使得

$$S=UTU^{-1}=UTU^*.$$

如果T是自伴的，证明S是自伴的。

12. 证明T是正规的当且仅当4题中的T_1与T_2是交换的。用两行的正规矩阵说明部分情形。

13. 如果$T_n: H \to H (n=1,2,\cdots)$都是正规线性算子而$T_n \to T$。证明$T$是正规线性算子。

14. 如果S与T都是正规线性算子且满足$ST^*=T^*S$与$TS^*=S^*T$，证明它们的和$S+T$与积ST是正规的。

15. 证明复Hilbert空间H上的有界线性算子$T: H \to H$是正规的当且仅当$\|T^*x\|=\|Tx\|$对一切$x \in H$成立。利用此结果，证明正规线性算子有

$$\|T^2\|=\|T\|^2.$$

第 四 章

赋范空间和Banach空间的基本定理

粗略地讲，本章包含赋范空间和 Banach 空间的进一步的理论的基础，没有它们，这些空间的作用和它们的应用都将受到局限。本章中的四个重要定理是 Hahn-Banach 定理，一致有界性定理，开映象定理和闭图象定理，它们是 Banach 空间理论的基石（第一个定理对任意赋范空间都成立）。

主要内容的方向摘要

1. **Hahn-Banach定理4.2-1（变形4.3-1，4.3-2）** 它是向量空间上线性泛函的延拓定理。它保证了赋范空间有足够多的线性泛函，这就使我们既能得到共轭空间的一适当的理论，又能得到伴随算子的一个满意的理论（见4.5，4.6）。

2. **Banach和Steinhaus的一致有界性定理** 本定理给出了 $(\|T_n\|)$ 有界的充分条件，这里，诸 T_n 是从 Banach 空间到赋范空间中的有界线性算子。在分析中，它有各种各样的（简单的和较深入的）应用，例如，对 Fourier级数(见 4.7-5)，弱收敛性（见4.8，4.9），序列可和性（见4.10），数值积分（见4.11）

等等方面的应用。

3. **开映象定理4.12-2** 本定理指出，从Banach空间到Banach空间上的有界线性算子T是一开映象，即是，映开集成开集。因此，如果T是双射，则T^{-1}是连续的（"有界逆定理"）。

4. **闭图象定理4.13-2** 该定理给出了闭线性算子（见4.13-1）是有界的条件。闭线性算子在物理学和其他一些应用中是非常重要的。

4.1 Zorn引理

在证明基本的Hahn-Banach定理中，我们将需要Zorn引理。Hahn-Banach定理是线性泛函的延拓定理，它是一重要的定理。因此，当我们表述Hahn-Banach定理时，我们将指出其重要性。Zorn引理有各种各样的应用。本节末我们将给出这个应用的两个结果。引理的背景是偏序集。

4.1-1 定义（偏序集，链） 偏序集是一集M，其上定义了偏序，即是二元关系，记为$\leqslant$，满足条件

(PO1) $a\leqslant a$，对每个$a\in M$（自反性）；

(PO2) 如果$a\leqslant b$和$b\leqslant a$，则$a=b$（反对称性）；

(PO3) 如果$a\leqslant b$和$b\leqslant c$，则$a\leqslant c$（传递性）。

所谓"偏"，即M可能包含这样的元a和b，对于它们来说，既非$a\leqslant b$，也非$b\leqslant a$。这时，称a和b为不可比较元；反之，称为可比较元，如果满足$a\leqslant b$或$b\leqslant a$（或者两者同时成立）。

全序集或链是一偏序集，且每对元都是可以比较的。换言之，链是偏序集且没有不可比较的元。

偏序集M的子集W的上界是一元$u \in M$，使得对每个$x \in W$，

$$x \leqslant u$$

（u依赖于M和W，这样的u可以存在，也可以不存在）。M的极大元是一元$m \in M$，使

$$m \leqslant x \text{ 蕴含 } m = x,$$

（再次说明，M可以有也可以没有极大元，而且极大元不必是一上界）。∎

例。

4.1-2 实数 设M是一切实数的集合，$x \leqslant y$表通常的大小意义，M是全序的，M没有极大元。

4.1-3 幂集 设$\mathscr{P}(X)$表给定X的幂集（一切子集之集），$A \leqslant B$表$A \subset B$，即是，A是B的子集，则$\mathscr{P}(X)$是偏序集，$\mathscr{P}(X)$的极大元只有X。

4.1-4. n 元数组 设M是一切有序的n元实数组$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$，$y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$，…的集合，$x \leqslant y$表$\xi_j \leqslant \eta_j (j = 1, \cdots, n)$，这里，$\xi_j \leqslant \eta_j$表通常的大小关系。这定义了$M$上的一偏序。

4.1-5 正整数 设$M = N$，即一切正整数之集，$m \leqslant n$表m整除n，这定义了N上之一偏序。

某些进一步的例子在习题中给出。也可见 G. Birkhoff (1967)。

利用定义4.1-1中概念，我们现在可以叙述Zorn引理，并视它为一公理①。

---

①把它称为"引理"是由于历史的原因。Zorn引理可以从选择公理诱导出来。所谓选择公理，即对任给的一集E，存在从幂集$\mathscr{P}(E)$到E中的一映象c（选择函数），使其，如果$B \subset E$，$B \neq \phi$，那末，$c(B) \in B$。反之，这一公理也可以从Zorn引理得出来，于是，Zorn引理和选择公理可以视为等价的公理。

4.1-6 Zorn 引理设 $M\neq\phi$ 是一偏序集 如 果 每 一 链 $C\subset M$ 有上界，则M至少有一极大元。

应用

4.1-7 Hamel 基 每一向量空 间 $X\neq\{0\}$有 Hamel 基（见2.1节）。

证明。M是X的一切线性无关子集 之 集，因 $X\neq\{0\}$，故有元 $x\neq0$，且 $\{x\}\in M$。于是 $M\neq\phi$。集的包含关系定义 M 上的偏序；（见4.1-3）。每一链$C\subset M$有上界，即X中属于C的一切子集的并。按 Zorn 引理，M有极大元 B。我们证明B 是 X 的 Hamel 基。设$Y=\mathrm{span}\,B$，则Y 是 X 的子空间且$Y=X$。因为，否则，$B\cup\{z\}$，$z\in X$，$z\notin Y$，是线性无关的且以B 为其真子 集之集，这就与B的极大性矛盾。

4.1-8 完全规格正交集 在每个 Hilbert 空间 $H\neq\{0\}$中存在完全规格正交集。（见3.6节）。

证明。设M是H的一切规格正交子集之集。因 为 $H\neq\{0\}$，它有元$x\neq0$，$\{y\}$是H的一规格正交子集，这里，$y=\|x\|^{-1}x$. 因此，$M\neq\phi$，以包 含关系作为M上的偏序的定义。每一链 $C\subset M$ 有上界，即X 中属于C的一切子集的并。由 Zorn 引理，M有极大元F。我们证明F在H中是完全的。设此不真，则 由定理3.6-2存在一非零元$z\in H$使$z\perp F$。因此，$F_1=F\cup\{e\}$，这里，$e=\|z\|^{-1}z$，是规格正交的，且F是F_1的真子集。这与F的极大性矛盾。

习　　题

1. 验证例4.1-3中的命题.

2. 设X是区间[0, 1]上一切实函数全体, 且命 $x \leqslant y$ 意味着 $x(t) \leqslant y(t)$, 对一切 $t \in [0, 1]$. 试证明, 这就定义了一偏序. 它是全序的吗? X 有极大元吗?

3. 证明, 一切复数 $z = x + iy$, $w = u + iv$ 之集可以这样的定义偏序, $z \leqslant w$ 意味着 $x \leqslant u$ 和 $y \leqslant v$, 这里, 对实数而言, $\leqslant$是通常所指的意义.

4. 按例4.1-5中的偏序, 试求M的一切极大元, 这里, M是(a)$\{2, 3, 4, 8\}$, (b)一切素数之集.

5. 证明有穷偏序集A至少有一个极大元.

6. (最小元, 最大元) 试证明, 偏序集M至多有一元 a, 使其对一切$x \in M$有 $a \leqslant x$, 及至多有一元 b, 使其对一切$x \in M$有$x \leqslant b$[如果这种 a(或b) 存在, 则称之为M的最小元 (或相应地叫最大元)].

7. (下界) 偏序集M的子集$A \neq \phi$的下界是一元 $x \in M$, 使其对一切$y \in A$有$x \leqslant y$. 试求例4.1-5中的子集$A = \{4, 6\}$的上界和下界.

8. 偏序集M的子集$A \neq \phi$的最大下界是A的一下界x, 使其对A的任一下界 l 有 $l \leqslant x$; 记为 $x = g.l.b.A = \inf A$. 类似地, A的最小上界 y, 记为 $y = l.u.b.A = \sup A$, 它是A的一上界且使其对 A的任一上界u 有$y \leqslant u$. (a) 如果A有 $g.l.b.$ 证明它是唯一的. (b) 在例4.1-3中, $g.l.b.\ \{A, B\}$ 和 $l.u.b.\{A, B\}$是什么?

9. (格) 格是一偏序集M, 使其M的任二元 x, y有 $g.\ l.\ b.$ (记为 $x \wedge y$) 和$l.\ u.\ b.$ (记为 $x \vee y$). 试证明, 例4.1-3中的偏序集是格, 这里, $A \wedge B = A \cap B$和$A \vee B = A \cup B$.

10. 偏序集M的极小元是一元 $x \in M$, 使其 $y \leqslant x$ 蕴含 $y = x$. 求习题4(a)中的一切极小元.

4.2　Hahn-Banach 定理.

Hahn-Banach定理是关于线性泛函的延拓定理. 在下一节中我们将看到, 该定理保证了赋范空间具有足够多的有界线性泛函并可能对共轭空间建立一套相适应的理论, 而共轭空间是赋范空

间一般理论的一个本质部分．在这一方面，Hahn-Banach 定理是与有界线性算子有关的最重要的定理之一．其次，我们的讨论将表明，该定理还刻划了线性泛函的值可以事先被指定的程度．定理是 H. Hahn (1927) 发现的，目前的这种更一般的形式（**定理4.2-1**）是 S. Banach (1929) 发现的，将其推广到复向量空间（定理 4.3-1）是 H. F. Bohnenblust 和 A. Sobczyk (1938)；参看附录 3 中的文献．

一般说来，所谓**延拓问题**，就是将确定在给定的集X的子集Z上的数学对象，从Z延拓成整个集X上的对象，使其对象的某些基本性质对延拓后的对象仍然成立．

在 Hahn-Banach 定理中，延拓的对象是定义在向量空间X的子空间Z上的线性泛函且有某种用**次线性泛函**描述的有界性．按**次线性泛函**的定义，它是向量空间X上的一实值泛函p，p是**次可加的**，即是

(1) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，对一切$x, y\in X$，

和**正齐性的**，即是，

(2) $p(\alpha x)=\alpha p(x)$ 对R中的一切$\alpha\geqslant 0$和$x\in X$．

（注意：赋范空间上的范数就是这样的泛函）．

我们将假设被延拓的Z上的泛函f被定义在X上的次线性泛函p所控制，我们把f从Z延拓到X，使之不失掉线性和受控性，于是，在X上的延拓泛函$\tilde{f}$仍然是线性的和被p所控制．这是定理的症结所在．X是实的；定理在复向量空间中的推广在下一节中．

4.2-1 Hahn-Banah 定理（线性泛函的延拓） 设X是实向量空间，p是X上的次线性泛函，而且，f是定义在X的子空间Z上的线性泛函并满足

(3) $f(x)\leqslant p(x)$，对一切$x\in Z$，则f有Z到X的线性延拓$\tilde{f}$

满足：

(3*) $\tilde{f}(x) \leqslant p(x)$，对一切 $x \in X$，即，$\tilde{f}$ 是X上的线性泛函，在X上满足(3*)式且 $\tilde{f}(x)=f(x)$，对每个 $x \in Z$.

证明：我们将要证明的主要步骤是：

(a) 在定义域 $\mathscr{D}(g)$ 上满足 $g(x) \leqslant p(x)$ 的f的一切线性延拓g的集E上可以定义一偏序，按照 Zorn 引理得出E的一极大元$\tilde{f}$.

(b) $\tilde{f}$定义在整个X上.

(c) 在(b)部分中采用了一个辅助关系式.

详细证明如下.

(a) 设E是 f 的满足条件

$$g(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in \mathscr{D}(g)$$

的一切线性延拓g之集. 显然$E \neq \Phi$，因为，$f \in E$. 在E上定义偏序

$$g \leqslant h \text{ 表示} h \text{是} g \text{的延拓.}$$

即是，按定义，$\mathscr{D}(h) \supset \mathscr{D}(g)$，$h(x)=g(x)$，$\forall x \in \mathscr{D}(g)$.

对任意链 $C \subset E$，我们定义 $\hat{g}$：

$\hat{g}(x)=g(x)$，如果 $x \in \mathscr{D}(g)$. $(g \in C)$. $\hat{g}$ 是线性泛函，定义域是

$$\mathscr{D}(\hat{g})=\bigcup_{g \in C} \mathscr{D}(g).$$

因为C是链，故$\mathscr{D}(\hat{g})$是向量空间. $\hat{g}$的定义是确定的. 事实上，对 $x \in \mathscr{D}(g_1) \cap \mathscr{D}(g_2)$，$g_1$，$g_2 \in C$，因$C$是链，于是 $g_1 \leqslant g_2$ 或者 $g_2 \leqslant g_1$，故有 $g_1(x)=g_2(x)$. 显然，$g \leqslant \hat{g}$，对一切 $g \in C$. 因此，$\hat{g}$是C的上界. 因为，$C \subset E$是任意的，于是 Zorn 引理蕴含 E 有极大元$\tilde{f}$. 根据E的定义，这是f的一延拓且满足

(4) $\tilde{f}(x) \leqslant p(x) \quad x \in \mathscr{D}(\tilde{f})$.

(b) 现证明$\mathscr{D}(\tilde{f})$是X. 假设这点不真，则可以取$y_1 \in X-\mathscr{D}(\tilde{f})$，并考察由$\mathscr{D}(\tilde{f})$及 y_1 生成的子空间 $Y_1=\operatorname{span}(\mathscr{D}(\tilde{f}) \cup \{y_1\})$. 因为 $0 \in \mathscr{D}(\tilde{f})$，故 $y_1 \neq 0$. 任意 $x \in Y_1$ 可以表为

$$x=y+\alpha y_1 \quad y\in\mathscr{D}(\tilde{f}).$$

这个表达式是唯一的。事实上，$y+\alpha y_1=\tilde{y}+\beta y_1$，$\tilde{y}\in\mathscr{D}(\tilde{f})$蕴含$y-\tilde{y}=(\beta-\alpha)y_1$，这里，$y-\tilde{y}\in\mathscr{D}(\tilde{f})$且$y_1\notin\mathscr{D}(\tilde{f})$，于是，仅有解$y-\tilde{y}=0$及$\beta-\alpha=0$。这意味着唯一性。

在Y_1上定义泛函g_1：

(5) $g_1(y+\alpha y_1)=\tilde{f}(y)+\alpha c$

这里，c是任意实数。不难看出，g_1是线性的。而且，当$\alpha=0$时，我们有$g_1(y)=\tilde{f}(y)$。因此，g_1是$\tilde{f}$的一真延拓，即是，延拓使得$\mathscr{D}(\tilde{f})$是$\mathscr{D}(g_1)$的真子集。因而，通过证明

(6) $g_1(x)\leqslant p(x)$，对一切$x\in\mathscr{D}(g_1)$，如果可以证明$g_1\in E$，这就将同$\tilde{f}$的极大性矛盾，于是$\mathscr{D}(\tilde{f})\neq X$不真，即$\mathscr{D}(\tilde{f})=X$真。

(c) 据此，我们必须证明，在(5)式中取适当的c，有$g_1(x)$满足(6)式。

我们考察$\mathscr{D}(\tilde{f})$中的任意y和z。从(4)式和(1)式我们得

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y)-\tilde{f}(z)&=\tilde{f}(y-z)\leqslant p(y-z)\\&=p(y+y_1-y_1-z)\\&\leqslant p(y+y_1)+p(-y_1-z).\end{aligned}$$

将最后一项移于左端，而将项$\tilde{f}(y)$移到右端，我们有

(7) $-p(-y_1-z)-\tilde{f}(z)\leqslant p(y+y_1)-\tilde{f}(y)$，这里，$y_1$是固定的。因为$y$不出现在左端，$z$不出现在右端，于是，如果左端在$z\in\mathscr{D}(\tilde{f})$取上确界，叫它为$m_0$，在右端对$y\in\mathscr{D}(\tilde{f})$取下确界，叫它为$m_1$，那末不等式仍然成立。于是$m_0\leqslant m_1$。对合于$m_0\leqslant c\leqslant m_1$的$c$，从(7)式我们有

(8a) $-p(-y_1-z)-\tilde{f}(z)\leqslant c$ 对一切$z\in\mathscr{D}(\tilde{f})$

(8b) $c\leqslant p(y+y_1)-\tilde{f}(y)$ 对一切$y\in\mathscr{D}(\tilde{f})$。

首先对(5)式中的负α，然后对正α证明(6)式。对$\alpha<0$，用$\alpha^{-1}y$代替z利用(8a)，即是，

$$-p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)-\tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right)\leqslant c.$$

用$-\alpha>0$乘，给出

$$\alpha p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)+\tilde{f}(y)\leqslant -\alpha c.$$

由此式和(5)式，并利用$y+\alpha y_1=x$（见上面的）我们得到所要求的不等式

$$g_1(x)=\tilde{f}(y)+\alpha c\leqslant -\alpha p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)=p(\alpha y_1+y)=p(x).$$

当$\alpha=0$时，我们有$x\in\mathscr{D}(\tilde{f})$且(6)自然成立。当$\alpha>0$时，我们利用(8b)，并用$\alpha^{-1}y$代替$y$得出

$$c\leqslant p\left(\frac{1}{\alpha}y+y_1\right)-\tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right).$$

用α乘给出

$$\alpha c\leqslant \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y+y_1\right)-\tilde{f}(y)=p(x)-\tilde{f}(y).$$

由此及(5)式，得证

$$g_1(x)=\tilde{f}(y)+\alpha c\leqslant p(x). \blacksquare$$

不用 Zorn 引理我们能得到这一定理吗？这是一个有趣的问题，特别，因为引理并没有给出构造的方法。如果在(5)式中，用f代替$\tilde{f}$，对每一个实数c，我们得到由$\mathscr{D}(f)\cup\{y_1\}$生成的子空间$Z_1$上的$f$的一线性延拓$g_1$，并且，可以选择$c$以使对一切$x\in Z_1$有$g_1(x)\leqslant p(x)$，这从证明的$(c)$部分用$f$代替$\tilde{f}$可以看出来。如果$X=Z_1$，我们的工作结束。如果$X\neq Z_1$，我们可以取$y_2\in X-Z_1$，重复这一过程，将$f$延拓到由$Z_1$和$y_2$生成的$Z_2$上，等等。这就给出了一子空间$Z_j$的序列，每一个包含前一个，使得$f$可以从一个线性地延拓到下一个，并且对一切$x\in Z_j$，延拓$g_j$满足$g_j(x)\leqslant p(x)$。如果

$$X=\bigcup_{j=1}^{n} Z_j,$$

在 n 步之我们的工作结束，如果

$$X=\bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j$$

我们可以用通常的归纳法。但是，如果X没有这种表达式，证明则需要用到 Zorn 引理。

当然，对于特殊的空间，整个情况可能变得很简单。Hilbert 空间就是这种类型的空间，这是因为 Riesz 表达式3.8-1 之故。我们将在下一节中讨论这一事实。

习　　题

1. 证明，线性泛函的绝对值具有（1）和（2）中表述的性质。

2. 证明，向量空间X上的范数是X上的次线性泛函。

3. 证明，$p(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n$，这里$x=(\xi_n)\in l^{\infty}$，$\xi_n$是实的，定义了$l^{\infty}$上的一次线性泛函。

4. 证明，次线性泛函p满足$p(0)=0$和$p(-x)\geqslant -p(x)$。

5. （凸集）如果p是向量空间X上的次线性泛函，证明，$M=\{x\,|\,p(x)\leqslant\gamma,\ \gamma>0$ 是固定的$\}$是凸集（见3.3节）。

6. 如果赋范空间 X上的次可加泛函p在 0 处连续且$p(0)=0$，证明，对一切$x\in X$，p是连续的。

7. 如果p_1和p_2是向量空间X上的次线性泛函，并且c_1和c_2是正常数，证明，$p=c_1p_1+c_2p_2$是X上的次线性泛函。

8. 如果定义在赋范空间X上的次可加泛函在球面$\{x\,|\,\|x\|=\gamma\}$之外非负，证明，对一切 $x\in X$，它是非负的。

9. 设p是实向量空间X上的次线性泛函。命f是在$Z=\{x\in X\,|\,x=\alpha x_0,\ \alpha\in\mathbf{R}\}$上用$f(x)=\alpha p(x_0)$定义的，这里$x_0$是固定的。证明，$f$是在 Z 上满足$f(x)\leqslant p(x)$的线性泛函。

10. 如果p是实向量空间X上的次线性泛函，证明，存在X上的一线性

泛函$\tilde{f}$，使其$-p(-x)\leqslant\tilde{f}(x)\leqslant p(x)$。

4.3 复向量空间和赋范空间上的 Hahn-Banach 定理

Haha-Banach 定理4.2-1是关于实向量空间的。在复向量空间中的推广由H. F. Bohnenblust和A. Sobczyk (1938) 得出。

4.3-1 (推广的) Hahn-Banach定理 设X是实或复向量空间，p是X上次可加实值泛涵，即对一切$x, y\in X$

(1) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$

(与在定理4.2-1中的一样) 且对每个数α满足

(2) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$.

而且，设f是定义在X的子空间Z上的线性泛函且满足

(3) $|f(x)|\leqslant p(x)$ 对一切 $x\in Z$。

那末，f有从Z到X上的线性延拓$\tilde{f}$且满足

(3*) $|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x)$ 对一切 $x\in X$。

证明：(a) 对实向量空间。如果X是实的，情况简单。那末，(3)式蕴含$f(x)\leqslant p(x)$对一切$x\in Z$。因此，由 Hahn-Banach定理 4.2-1，存在Z到X上的线性延拓$\tilde{f}$使其

(4) $\tilde{f}(x)\leqslant p(x)$ 对一切 $x\in X$。由此式及(2)我们得

$$-\tilde{f}(x)=\tilde{f}(-x)\leqslant p(-x)=|-1|p(x)=p(x),$$

即，$\tilde{f}(x)\geqslant -p(x)$。与(4)式一起，即证明了(3*)式成立。

(b) 对复向量空间。设X是复的。那末，Z也是复向量空间。因此，f是复值的，于是我们可以表为

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x) \qquad x\in Z,$$

这里，f_1和f_2是实值的。暂时我们将X和Z视为实向量空间，并

且分别用X_r和Z_r表示它们；简单地说这意味着，我们限定用实数乘(而不用复数)。因为，f 在Z上是线性的，f_1和f_2是实值的，f_1和f_2是Z_r上的实线性泛函。因为复数的实部不可能超过绝对值，又有$f_1(x)\leqslant|f(x)|$。因此，由(3)式

$$f_1(x)\leqslant p(x) \quad 对一切\ x\in Z_r.$$

根据 Hahn-Banach 定理 4.2-1，存在Z_r到X_r上的f_1的线性延拓$\tilde{f}_1$，使其

(5) $\tilde{f}_1(x)\leqslant p(x)$ 对一切 $x\in X_r$。这就满足f_1的要求。现在转向f_2。回到Z并利用 $f=f_1+if_2$，对每个 $x\in Z$，我们有

$$i[f_1(x)+if_2(x)]=if(x)=f(ix)=f_1(ix)+if_2(ix).$$

上式两端的实部必定相等：

(6) $f_2(x)=-f_1(ix), x\in Z.$

因此，如果对一切 $x\in X$，我们命

(7) $\tilde{f}(x)=\tilde{f}_1(x)-i\tilde{f}_1(ix), x\in X.$

从(6)式我们看出，在Z上$\tilde{f}(x)=f(x)$。这证明$\tilde{f}$是f的 Z 到 X 的一延拓。我们剩下的任务是证明

(i) $\tilde{f}$是复向量空间X上的线性泛函，

(ii) $\tilde{f}$在X上满足(3*)。

利用(7)式和在实向量空间X_r上$\tilde{f}_1$的线性性，通过下面的计算可以看出(i)式成立：这里，$a+ib$是任一复数，a，b是实的

$$\begin{aligned}\tilde{f}((a+ib)x)&=\tilde{f}_1(ax+ibx)-i\tilde{f}_1(iax-bx)\\&=a\tilde{f}_1(x)+b\tilde{f}_1(ix)-i[a\tilde{f}_1(ix)-b\tilde{f}_1(x)]\\&=(a+ib)[\tilde{f}_1(x)-i\tilde{f}_1(ix)]\\&=(a+ib)\tilde{f}(x).\end{aligned}$$

我们证明(ii)。由(1)和(2)式，$p(x)\geqslant 0$，故任意使$\tilde{f}(x)=0$的x，(ii)式成立：命x使$\tilde{f}(x)\neq 0$，然后我们采用复数的极坐标表示，记

$\tilde{f}(x)=|\tilde{f}(x)|e^{i\theta}$，于是$|\tilde{f}(x)|=\tilde{f}(x)e^{-i\theta}=\tilde{f}(e^{-i\theta}x)$。因为，$|\tilde{f}(x)|$是实的，最后一表达式是实的，于是与其实部相等。因此，由(2)式

$$\begin{aligned}|\tilde{f}(x)|&=\tilde{f}(e^{-i\theta}x)=\tilde{f}_1(e^{-i\theta}x)\leqslant p(e^{-i\theta}x)\\&=|e^{-i\theta}|p(x)=p(x).\end{aligned}$$

这就完成了证明。∎

虽然，Hahn-Banach 定理还没有直接谈到连续性，但是，定理的主要应用是讨论有界线性泛函，这就把我们带回到我们主要关心的赋范空间上来。事实上，定理 4.3-1 已蕴含了下面的基本结果。

4.3-2 Hahn-Banach 定理（赋范空间） 设f是赋范空间X的子空间Z上的有界线性泛函。那末，存在X上的有界线性泛函$\tilde{f}$，它是f在X上的延拓且有相同的范数

(8) $\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Z$

这里，$\|\tilde{f}\|_X=\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|\tilde{f}(x)|$，$\|f\|_Z=\sup\limits_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}}|f(x)|$

(而在平凡情况$Z=\{0\}$时，$\|f\|_Z=0$)

证明 如果$Z=\{0\}$，那末$f=0$，且延拓是$\tilde{f}=0$。命$Z\neq\{0\}$。我们要利用定理 4.3-1，因此，我们必须寻求一个适当的p。对一切$x\in Z$我们有

$$|f(x)|\leqslant\|f\|_Z\|x\|.$$

这具有(3)式的形式，这里

(9) $p(x)=\|f\|_Z\|x\|$.

我们看出，p在整个X上有定义。而且，p在X上满足(1)式，因为根据三角不等式

$$p(x+y)=\|f\|_Z\|x+y\|\leqslant\|f\|_Z(\|x\|+\|y\|)$$

$$= p(x) + p(y)。$$

在 X 上，p 也满足(2)式，因为

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x).$$

因此，我们现在可以应用定理 4.3-1，并且断定存在 X 上的一线性泛函 $\tilde{f}$，它是 f 的延拓且满足

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x) = \|f\|_Z \|x\| \qquad x \in X.$$

对范数为 1 的一切 $x \in X$ 取上确界，我们得不等式

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \leqslant \|f\|_Z.$$

因为在延拓下范数不可能减少，我们也有 $\|\tilde{f}\|_X \geqslant \|f\|_Z$。综合起来，我们得到(8)式，定理得证。∎

在特别情况下，情况可以变得很简单。Hilbert 空间就是这种类型。事实上，如果 Z 是 Hilbert 空间 $X=H$ 的闭子空间，那末，f 有 Riesz 表示式 3.8-1，比如说

$$f(x) = \langle x, z \rangle \qquad x \in Z,$$

这里，$\|f\| = \|z\|$。当然，因为内积是定义在整个 H 上的，这就立刻给出 f 由 Z 到 H 上的线性延拓 $\tilde{f}$，且由定理 3.8-1，f 与 $\tilde{f}$ 有相同的范数 $\|\tilde{f}\| = \|z\| = \|f\|$。因此，在此情况下，延拓立即可得。

由定理 4.3-2 可以导出另一个有用的结果，粗略地说，赋范空间 X 的对偶空间 X' 包含有充分多的有界线性泛函，以致空间 X 的点可以区别，这在处理伴随算子 (4.5 节) 和所谓弱收敛中(4.8 节)是一本质性的结果。

4.3-3 定理 (有界线性泛函) 设 X 是赋范空间，$x_0 \neq 0$ 是 X 的任意一元。那末，存在 X 上的有界线性泛函 $\tilde{f}$，使其

$$\|\tilde{f}\| = 1, \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

证明　考察由一切元 $x=\alpha x_0$，这里 α 是数，组成的 X 的子空间 Z。在 Z 上我们定义线性泛函 f 如下

$$(10)\qquad f(x)=f(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|.$$

f 是有界的且有范数 $\|f\|=1$，因为

$$|f(x)|=|f(\alpha x_0)|=|\alpha|\,\|x_0\|=\|\alpha x_0\|=\|x\|.$$

定理 4.3-2 蕴含 f 有从 Z 到 X 上的线性延拓 $\tilde{f}$，其范数 $\|\tilde{f}\|=\|f\|=1$。从(10)式我们看出 $\tilde{f}(x_0)=f(x_0)=\|x_0\|$。▌

4.3-4 推论(范数，零向量)． 对赋范空间 X 中的每一个 x，我们有

$$(11)\qquad \|x\|=\sup_{\substack{f\in X'\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

因此，如果 x_0 使 $f(x_0)=0$，对一切 $f\in X'$ 成立，那末 $x_0=0$。

证明．从定理 4.3-3，把 x_0 记为 x，我们有

$$\sup_{\substack{f\in X'\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}\geqslant\frac{|\tilde{f}(x)|}{\|\tilde{f}\|}=\frac{\|x\|}{1}=\|x\|,$$

且从 $|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|$，我们得

$$\sup_{\substack{f\in X'\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}\leqslant\|x\|.$$

习　　题

1．(半范数)证明，(1)式和(2)式蕴含 $p(0)=0$ 和 $p(x)\geqslant 0$，于是，p 是半范数(见 2.3 节习题12)。

2．证明，(1)式和(2)式蕴含 $|p(x)-p(y)|\leqslant p(x-y)$。

3．已经证明，由(7)式定义的 $\tilde{f}$ 是复向量空间 X 的线性泛函。试证明，为此只需证明 $\tilde{f}(ix)=i\tilde{f}(x)$ 就够了。

4．设定义在向量空间 X 上的 p 满足(1)式和(2)式。证明，对任意

给定的 $x_0 \in X$，存在 X 上的线性泛函 $\tilde{f}$ 使其 $\tilde{f}(X_0)=p(x_0)$ 和 $|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x)$ 对一切 $x \in X$ 成立。

5. 如果在定理 4.3-1 中 X 是赋范空间，且 $p(x) \leqslant k\|x\|$ 对某个 $k>0$ 成立，证明，$\|\tilde{f}\| \leqslant k$。

6. 为了说明定理 4.3-2，我们考察 Euclidean 平面 R^2 上定义的泛函 f，$f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$，$x=(\xi_1, \xi_2)$，求 f 在 R^3 上的线性延拓 $\tilde{f}$ 和相应的范数。

7. 在 Hilbert 空间的情况下，给出定理 4.3-3 的另一个证明。

8. 设 X 是赋范空间，X' 是它的对偶空间，如果 $X \neq \{0\}$，证明 X' 不可能是 $\{0\}$。

9. 证明，对可分赋范空间而言，定理 4.3-2 可以直接证明而不用 Zorn 引理（这一引理在定理 4.2-1 的证明中，被间接用到了）。

10. 直接从 4.3-3 得出 4.3-4 中的第二个结论。

11. 如果对赋范空间 X 上的每一个有界线性泛函有 $f(x)=f(y)$，试证明，$x=y$。

12. 为了说明定理 4.3-3，命 X 是 Euclidean 平面 R^2，试求出泛函 f 的延拓 $\tilde{f}$。

13. 证明，在定理 4.3-3 的假设下，存在 X 上的有界线性泛函 $\tilde{f}$，使其 $\|\tilde{f}\|=\|x_0\|^{-1}$ 和 $\tilde{f}(x_0)=1$。

14. （超平面） 试证明对赋范空间 X 中任一球面 $S(0;r)$ 和任意一点 $x_0 \in S(0;r)$，存在一超平面 $H_0 \ni x_0$，使其球 $\tilde{B}(0;r)$ 整个位于由 H_0 确定的两个半空间之一内（见 2.8 节习题 12.15）。一种简单的说明已在图 39 中表示出来。

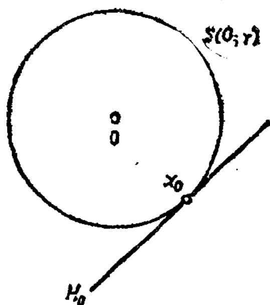


图39 在 Euclidean 平面 R^2 的情况下，习题 14 的说明

15. 如果 x_0 是赋范空间中这样的点，使得 $|f(x_0)| \leqslant c$ 对一切范数为 1 的 $f \in X'$ 成立，试证明，$\|x_0\| \leqslant c$。

4.4 对 C[a, b] 上的有界线性泛函的应用

Hahn—Banach 定理 4.3-2 有许多重要的应用。其中之一已

在前节中考察过，另一个在本节中介绍[1]。事实上，我们将利用定理 4.3-2 去得到 $C[a, b]$上有界线性泛函的一般表达形式，这里，$[a, b]$是固定的紧区间。在特殊空间上泛函的这种一般表达式的重要性已在 2.10 节末予以说明了。在这里，表达式将用到 Riemann—Stieltjes积分。让我们回忆一下这种积分的定义和少数几个性质，这种积分是熟知的 Riemann 积分的推广。我们从下面的概念开始。

定义在$[a, b]$上的函数 W 叫做**有界变差**函数，如果在$[a,b]$上它的全变差 Var(w)是有穷的，这里，

$$(1)\qquad \mathrm{Var}(w)=\sup\sum_{j=1}^{n}|w(t_j)-w(t_{j-1})|,$$

上确界是对区间$[a, b]$的一切分割：

$$(2)\qquad a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

而取的，这里$n\in N$ 是任意的，且在$[a,b]$中任意选取 $t_1, \cdots, t_{n-1}$，但必须满足(2)式。

易知，$[a, b]$上的一切有界变差函数构成一向量空间。在此空间中给出范数

$$(3)\qquad \|w\|=|w(a)|+\mathrm{Var}(w).$$

这样定义的赋范空间表示成$BV[a, b]$，这里，BV 意指“有界变差”之意。

我们现在得出如下的 Riemann—Stieltjes 积分概念。命 $x\in C[a,b]$且 $w\in BV[a, b]$。命 P_n 表由(2)式给出的$[a, b]$的任意一分割，$\eta(P_n)$表最大的区间$[t_{j-1}, t_j]$的长度，即是，

$$\eta(P_n)=\max(t_1-t_0, \cdots, t_n-t_{n-1}).$$

对$[a, b]$的每一分割 P_n，考察和数

$$(4)\qquad S(P_n)=\sum_{j=1}^{n}x(t_j)[w(t_j)-w(t_{j-1})].$$

---

[1] 这一节是选读材料，仅仅只有一次需要用到它（即在 9.9 节中）

存在一数$\mathscr{J}$具有这样的性质，对每个$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得

(5) $\eta(P_n)<\delta$

蕴含

(6) $|\mathscr{J}-S(P_n)|<\varepsilon$.

$\mathscr{J}$叫做x在$[a, b]$上关于W的 Riemann—Stieltjes 积分，并且表示成

(7) $\int_a^b x(t)\,dw(t)$.

因此，(7)式是满足$\eta(P_n)\to 0\ (n\to\infty)$的$[a, b]$的分割序列$(P_n)$的和数(4)式之极限，参看(5)式.

注意，当$W(t)=t$时，积分(7)式是X在$[a, b]$上的熟知的 Riemann 积分。

又，如果X在$[a, b]$上连续，W有在$[a, b]$上可积的导数，那末

(8) $\int_a^b x(t)\,dw(t)=\int_a^b x(t)\,w'(t)\,dt$

这里一撇，表示关于t的微分.

积分(7)式线性地依赖于$x\in C[a, b]$；即是，对一切x_1，$x_2\in[a, b]$和数α，β，我们有

$$\int_a^b [\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]\,dw(t)=\alpha\int_a^b x_1(t)\,dw(t)+\beta\int_a^b x_2(t)\,dw(t).$$

积分也线性地依赖于$w\in BV[a, b]$；即是，对一切w_1，$w_2\in BV[a, b]$及数γ，δ，我们有

$$\int_a^b x(t)\,d(\gamma w_1+\delta w_2)(t)=\gamma\int_a^b x(t)\,dw_1(t)+\delta\int_a^b x(t)\,dw_2(t).$$

我们还将需要不等式

$$(9)\qquad \left|\int_a^b x(t)\,dw(t)\right| \leqslant \max_{t\in J}|x(t)|Var(w),$$

这里，$J=[a,\ b]$。我们注意，这推广了微积分学中的一个熟知公式。事实上，如果 $w(t)=t$，那末，$\mathrm{Var}(w)=b-a$，且(9)式取形式

$$\left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \leqslant \max_{t\in J}|x(t)|(b-a).$$

$C[a,\ b]$上有界线性泛函的F. Riesz表示定理现在可以叙述如下．(F. Riesz(1909))。

4.4-1 Riesz定理 (C[a, b]上的泛函) $C[a,\ b]$上每一有界线性泛函 f 可以用Riemann—Stieltjes积分表示出来

$$(10)\qquad f(x)=\int_a^b x(t)\,dw(t)$$

这里w是$[a,\ b]$上的有界变差函数，且有全变差

$$(11)\qquad \mathrm{Var}(w)=\|f\|.$$

证明．由关于赋范空间的Hahn—Banach定理4.3-2，我们看出，f 有从$C[a,\ b]$到赋范空间$B[a,\ b]$上的一延拓$\tilde{f}$，这里，$B[a,\ b]$是由$[a,\ b]$上一切有界函数组成，其中范数定义为

$$\|x\|=\sup_{t\in J}|x(t)| \qquad J=[a,\ b]$$

的赋范空间。而且，根据那一定理，线性延拓是有界的且同 f 有相同的范数，即是

$$\|\tilde{f}\|=\|f\|.$$

我们定义(10)式所需要的函数w。为此目的，我们考察图40中表示出来的函数 x_t。此函数定义在$[a,\ b]$上，且在$[a,\ t]$上它是1，在其他各处是0。显然，$x\in B[a,\ b]$。我们定义的 x_t 叫做区间$[a,\ t]$的特征函数．利用 x_t 和泛函 $\tilde{f}$，我们在$[a,b]$上定义

w为：

$$w(a)=0,\ w(t)=\tilde{f}(x_t),\ t\in(a,\ b).$$

我们证明，这一函数 w 是有界变差函数且 $\operatorname{Var}(w)\leqslant\|f\|$。

对复数我们可以利用极坐标形式。事实上，命 $\theta=\arg\zeta$，我们可以表

$$\zeta=|\zeta|e(\zeta)\qquad 这里，e(\zeta)=\begin{cases}1, & 如果\ \zeta=0,\\ e^{i\theta}, & 如果\ \zeta\neq0.\end{cases}$$

我们看出，如果 $\zeta\neq0$，那末，$|\zeta|=\zeta/e^{i\theta}=\zeta e^{-i\theta}$。因此，对任意 ζ，零或非零，我们有

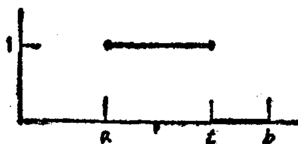


图40　函数 x_t

$$(12)\qquad |\zeta|=\zeta\overline{e(\zeta)},$$

这里，一横表示复共轭，如通常一样。为了后面的公式简化起见，我们记

$$\varepsilon_j=\overline{e(w(t_j)-w(t_{j-1}))}$$

及 $x_{t_j}=x_j$。按此方式，我们避免出现下标的下标。那末，由(12)式，对任一的分割(2)我们得

$$\sum_{j=1}^{n}|w(t_j)-w(t_{j-1})|=|\tilde{f}(x_1)|+\sum_{j=2}^{n}|\tilde{f}(x_j)-\tilde{f}(x_{j-1})|$$

$$=\varepsilon_1\tilde{f}(x_1)+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j[\tilde{f}(x_j)-\tilde{f}(x_{j-1})]$$

$$=\tilde{f}\left(\varepsilon_1x_1+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j[x_j-x_{j-1}]\right)$$

$$\leqslant\|\tilde{f}\|\left\|\varepsilon_1x_1+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j[x_j-x_{j-1}]\right\|.$$

在右端，$\|\tilde{f}\|=\|f\|$（见上面的），而另一个因子 $\|\cdots\|$ 等于1，因为 $|\varepsilon_j|=1$，而且从诸 x_j 的定义看出，对每一个 $t\in[a,\ b]$，x_1，x_2-x_1，…仅有一项非零（且其范数是1）。在左端，我们可以对 $[a,\ b]$ 的一切分割取上确界。那末，我们有

(13) $\quad \mathrm{Var}(w) \leqslant \|f\|$.

因此，w 是$[a, b]$上的有界变差函数。

我们证明(10)式，这里，$x \in C[a, b]$。对形如(2)式的每一分割 P_n，我们定义一函数，并简单地表为 z_n[代替 $z(P_n)$，或 zP_n]。记住，z_n 不仅仅依赖于 n，也依赖于 P_n。所定义的公式是

$$z_n = x(t_0)x_1 + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[x_j - x_{j-1}]. \tag{14}$$

于是，$z_n \in B[a, b]$。根据 w 的定义，

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z_n) &= x(t_0)\tilde{f}(x_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[\tilde{f}(x_j) - \tilde{f}(x_{j-1})] \\ &= x(t_0)w(t_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^{n} x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})],\end{aligned} \tag{15}$$

这里，最后一个等式从 $w(t_0) = w(a) = 0$ 得出。我们选择使 $\eta(P_n) \to 0$ 的$[a, b]$的任一分割序列(P_n)；参看(5)式。(注意，(15)式中的 t_j 依赖于 P_n，记住这个事实，表示它时，就不再用的如 $t_{j,n}$ 那样麻烦的记号)如果 $n \to \infty$，(15)式右端的和数趋于(10)式中的积分，倘若 $\tilde{f}(z_n) \to \tilde{f}(x)$，(10)式就得出来了。因为 $x \in C[a,b]$ 时，$\tilde{f}(x) = f(x)$。

我们证明 $\tilde{f}(z_n) \to \tilde{f}(x)$。回忆一下 x_t 的定义（见图40），我们看出，因为(14)式中的和数在 $t = a$ 处是零，故(14)式给出 $z_n(a) = x(a) \cdot 1$。因此，$z_n(a) - x(a) = 0$。而且，由(14)式，如果，$t_{j-1} < t \leqslant t_j$，那末我们得 $z_n(t) = x(t_{j-1}) \cdot 1$，见图40。于是得出，对那些 t，有

$$|z_n(t) - x(t)| = |x(t_{j-1}) - x(t)|.$$

因而，如果 $\eta(P_n) \to 0$，那末，由于 x 在$[a, b]$上是连续的，

又$[a,b]$是紧的，因此，x在$[a,b]$上一致连续，故有$\|z_n-x\|\to 0$。由$\tilde{f}$的连续性现在得出$\tilde{f}(z_n)\to\tilde{f}(x)$，且$\tilde{f}(x)=f(x)$，于是(10)式成立。

我们最后证明(11)式。从(10)式和(9)式我们有

$$|f(x)|\leqslant\max_{t\in J}|x(t)|\,\mathrm{Var}(w)=\|x\|\ \mathrm{Var}(w).$$

对范数为1的一切$x\in C[a,\ b]$取上确界，我们得$\|f\|\leqslant\mathrm{Var}(w)$。连同(13)式，这就给出了(11)式。▌

我们注意，定理中的w不是唯一的，但对其施以规范化条件，即在a处w为零并且右连续：

$$w(a)=0,\quad w(t+0)=w(t)\qquad\qquad (a<t<b)$$

可以使之唯一。详细情况见A. E. Taylor(1958), PP.197—200。也可以参看F. Riesz和B. Sz—Nagy (1955), P.11。

有趣的是，Riesz定理还可以作为现代积分理论的出发点。更进一步的历史评注，见N. Bourbaki (1955), P.169。

4.5 伴随算子

同赋范空间X上的有界线性算T: $X\to Y$相联系，我们给出所谓T的伴随算子$T^\times$。正如在8.5节中我们将看到的那样，由于在解算子方程时的需要，产生了$T^\times$；这种方程，比如，在物理学和其他一些应用中出现。在本节中，我们定义伴随算子$T^\times$并考察它的某些性质，包含它与3.9节中定义的Hilbert—伴随算子T^*①的关系。下面的事实是重要的，注意到我们现在的讨论依赖于Hahn—Banach定理（采用定理4.3-3），没有它，我

① 在Hilbert空间情况下，伴随算子$T^\times$不等于T的Hilbert—伴随算子T^*（纵然，如本节末所述$T^\times$和T^*是有关系的）．带星号的Hilbert—伴随算子是个合符规范的记号，我们不用$T^\times$表伴随算子，因为一个是在Hilbert空间中，而另一个是在一般赋范空间理论中，这是要时刻注意的事情，我们用$T^\times$表伴随算子，它虽然不如有的文献中采用记号T'简单，我们仍然用上面这一记号．

们很难取得进展。

我们考察有界线性算子 $T: X \to Y$，这里，X 和 Y 是赋范空间，并定义 T 的伴随算子 $T^{\times}$. 为此目的，我们从 Y 上的任一有界线性泛函 g 出发。显然，g 对一切 $y \in Y$ 有定义。命 $y = Tx$，我们得到 X 上的一泛函，比如说 f:

（1）　$f(x) = g(Tx)$　　　　$x \in X$。

因为 g 和 T 是线性的，故 f 是线性的。f 是有界的，因为

$$|f(x)| = |g(Tx)| \leqslant \|g\| \|Tx\| \leqslant \|g\| \|T\| \|x\|.$$

对一切范数为 1 的 $x \in X$ 取上确界，我们得不等式

（2）　$\|f\| \leqslant \|g\| \|T\|$.

这就证明 $f \in X'$，这里，X' 是在 2.10-3 中定义的 X 的对偶空间。根据假设 $g \in Y'$。当变动 $g \in Y'$，公式（1）式定义了一个从 Y' 到 X' 的算子，叫做 T 的伴随算子并表示为 $T^{\times}$。于是，我们有

（3）　$$X \xrightarrow{T} Y \qquad X' \xleftarrow{T^{\times}} Y'$$

需要注意，$T^{\times}$ 是定义在 Y' 上的算子，而给定的算子 T 是定义在 X 上的。综合上述有下面的

4.5-1　定义（伴随算子 $T^{\times}$）　设 $T: X \to Y$ 是有界线性算子，这里，X 和 Y 是赋范空间。那末，T 的伴随算子 $T^{\times}: Y' \to X'$ 定义为

（4）　$f(x) = (T^{\times} g)(x) = g(Tx)$　　　　$(g \in Y')$，

这里，X' 和 Y' 分是 X 和 Y 的对偶空间。

我们的第一个任务是证明伴随算子与算子本身有相同的范数。今后将明了，这是一个基本的性质。证明中需要用到从 Hahn—Banach 定理得出来的一个结果，即定理 4.3-3。为了建立起伴随算子的一个满意的理论，在此，Hahn—Banach 定理

是不可少的，而伴随算子又是线性算子一般理论的一个本质的部分。

4.5-2 定理（伴随算子的范数） 在定义4.5-1中的伴随算子是线性有界的且

(5) $\quad \|T^{\times}\|=\|T\|.$

证明．算子 $T^{\times}$ 是线性的，因为它的定义域 Y' 是向量空间且易得

$$
\begin{aligned}
(T^{\times}(\alpha g_1+\beta g_2))(x) &= (\alpha g_1+\beta g_2)(Tx)\\
&=\alpha g_1(Tx)+\beta g_2(Tx)\\
&=\alpha(T^{\times}g_1)(x)+\beta(T^{\times}g_2)(x).
\end{aligned}
$$

我们证明(5)。由(4)式我们有 $f=T^{\times}g$，且由(2)式得出

$$\|T^{\times}g\|=\|f\|\leqslant\|g\|\|T\|.$$

对范数为1的一切 $g\in Y'$ 取上确界，我们得到不等式

(6) $\quad \|T^{\times}\|\leqslant\|T\|.$

因此，为得到(5)式，我们必须证明 $\|T^{\times}\|\geqslant\|T\|$。

定理4.3-3蕴含对每个非零 $x_0\in X$，存在 $g_0\in Y'$ 使其

$$\|g_0\|=1 \qquad 且 \quad g_0(Tx_0)=\|Tx_0\|,$$

这里，$g_0(Tx_0)=(T^{\times}g_0)(x_0)$，根据伴随算子的定义。记 $f_0=T^{\times}g_0$，于是，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|Tx_0\| &= g_0(Tx_0)=f_0(x_0)\\
&\leqslant\|f_0\|\|x_0\|\\
&=\|T^{\times}g_0\|\|x_0\|\\
&\leqslant\|T^{\times}\|\|g_0\|\|x_0\|.
\end{aligned}
$$

因为 $\|g_0\|=1$，于是，对每个 $x_0\in X$，我们有

$$\|Tx_0\|\leqslant\|T^{\times}\|\|x_0\|.$$

（这也含 $x_0=0$，因为 $T0=0$）。但是恒有

$$\|Tx_0\|\leqslant\|T\|\|x_0\|$$

且这里 $c=\|T\|$ 是使 $\|Tx_0\|\leqslant c\|x_0\|$ 对一切 $x_0\in X$ 成立的最小常数 c。因此，$\|T^\times\|$ 不可能小于 $\|T\|$，即是，我们必有 $\|T^\times\|\geqslant\|T\|$。此式及(6)式蕴含(5)式。∎

让我们用表示算子的矩阵来阐明上述讨论。这也将帮助读者自己给出例子来。

4.5-3 例(矩阵) 在 n—维Euclidean空间 R^n 中，线性算子 $T:R^n\to R^n$ 可以用矩阵表示出来(参看2.9节)。这里，这种矩阵 $T_E=(\tau_{jk})$ 依赖于 R^n 的基 $E=\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的选择，基中之元排列成某种固定的顺序。我们选定一基 E，视 $x=(\xi_1, \cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 为列向量，且使用通常的关于矩阵乘法的符号。那末

$$(7)\qquad y=T_Ex,\qquad \text{分量为 } \eta_j=\sum_{k=1}^{n}\tau_{jk}\xi_k,$$

这里，$j=1, \cdots, n$。命 $F=\{f_1, \cdots, f_n\}$ 是 E 的对偶基（参看2.9节），这是 $R^{n\prime}$ 的一基（$R^{n\prime}$ 也是Euclidean n维空间，根据2.10-5）。那末，每个 $g\in R^{n\prime}$ 有表达式

$$g=\alpha_1f_1+\cdots+\alpha_nf_n.$$

现根据对偶基的定义，我们有 $f_j(y)=f_j(\Sigma\eta_ke_k)=\eta_j$。因此，由(7)我们得

$$g(y)=g(T_Ex)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\eta_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\tau_{jk}\xi_k.$$

交换求和顺序，我们可以表此式为下之形式

$$(8)\qquad g(T_Ex)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k,\ \text{这里 } \beta_k=\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\alpha_j.$$

我们可以将这个视为用 g 在 X 上给出泛函 f 的定义，即是

$$f(x)=g(T_Ex)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k.$$

回忆一下伴随算子的定义，我们可以表这个为

$$f = T_E^{\times} g \qquad \text{分量} \quad \beta_k = \sum_{j=1}^{n} \tau_{jk} \alpha_j.$$

注意，在 β_k 中，我们是关于第一下标求和(于是，我们是对 T_E 的列上的一切元求和)，我们有下面的结果：

如果 T 是用矩阵 T_E 表示出来的，那末，伴随算子就用 T_E 的转置阵表示出来。

如果 T 是从 C^n 到 C^n 的线性算子，则上面的结论也成立。

在研究伴随算子时，下面的公式(9)至(12)是有帮助的。相应的证明留给读者。设 $S, T \in B(X, Y)$；参看2.10节。那末

(9) $\qquad (S+T)^{\times} = S^{\times} + T^{\times}$

(10) $\qquad (\alpha T)^{\times} = \alpha T^{\times}$

设 X, Y, Z 是赋范空间且 $T \in B(X, Y)$ 和 $S \in B(Y, Z)$。那末，对积 ST 的伴随算子我们有（见图41）

(11) $\qquad (ST)^{\times} = T^{\times} S^{\times}$

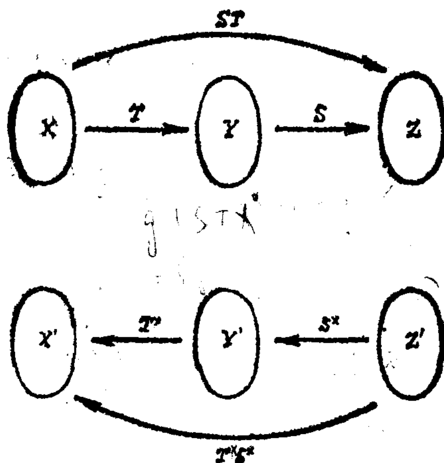


图41 公式(11)的说明

如果$T\in B(X,Y)$且T^{-1}存在，$T^{-1}\in B(Y,X)$，那末，$(T^{\times})^{-1}$也存在，$(T^{\times})^{-1}\in B(X', Y')$且

(12) $$(T^{\times})^{-1}=(T^{-1})^{\times}.$$

伴随算子$T^{\times}$和Hilbert—伴随算子T^*之间的关系（见3.9节） 如果X和Y是Hilbert空间，比如$H_1=X$和$H_2=Y$，在有界线性算子$T:X\to Y$的情况下，我们将证明存在某种关系。在此情况下，我们首先有（图42）

(13)
$$\begin{array}{c} H_1 \xrightarrow{\quad T \quad} H_2 \\ H_1' \xleftarrow{\quad T^{\times} \quad} H_2' \end{array}$$

这里，如同前面一样，给定算子T的伴随算子$T^{\times}$定义为

(14)
$$\begin{aligned} &(a) \quad T^{\times}g=f \\ &(b) \quad g(Tx)=f(x) \end{aligned} \qquad (f\in H_1',\ g\in H_2').$$

一个新的特点是，因为f和g都是Hilbert空间上的泛函，故它们有Riesz表示式（见3.8-1），比如说

(15)
$$\begin{aligned} &(a) \quad f(x)=\langle x,\ x_0\rangle \qquad (x_0\in H_1), \\ &(b) \quad g(y)=\langle y,\ y_0\rangle \qquad (y_0\in H_2), \end{aligned}$$

且从定理3.8-1，我们又知道，x_0和y_0分别是被f和g唯一确定的，这就定义出算子

$$\begin{aligned} &A_1:H_1'\to H_1 \qquad A_1f=x_0, \\ &A_2:H_2'\to H_2 \qquad A_2g=y_0. \end{aligned}$$

从定理3.8-1我们看出，A_1和A_2是双射且等距，因为$\|A_1f\|=\|x_0\|=\|f\|$，且对A_2也有类似式的等式。而且，算子T_1和T_2是共轭线性的（见3.1节）。事实上，如果我们记$f_1(x)=\langle x, x_1\rangle$和$f_2(x)=\langle x, x_2\rangle$，则对一切$x$和数$\alpha$，$\beta$，我们有

(16)
$$\begin{aligned} (\alpha f_1+\beta f_2)(x) &=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x) \\ &=\alpha\langle x,\ x_1\rangle+\beta\langle x,\ x_2\rangle \\ &=\langle x,\ \bar{\alpha}x_1+\bar{\beta}x_2\rangle. \end{aligned}$$

根据 A_1 的定义这就证明了共轭线性性

$$A_1(\alpha f_1+\beta f_2)=\bar{\alpha}A_1f_1+\bar{\beta}A_1f_2.$$

对 A_2 证明是相似的。

定义算子T^*为（见图 42）

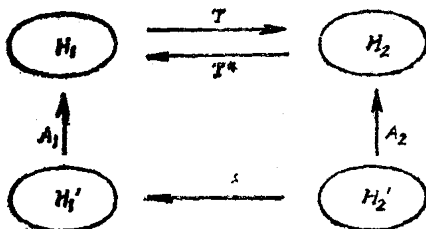


图 42　公式(13)和(17)式中的算子

(17)　$T^*=A_1T^\times A_2^{-1}:H_2\to H_1,\quad T^*y_0=x_0.$

T^* 是线性的，因为除去线性算子$T^\times$之外，它还包含两个共轭线性映象。我们证明 T^* 确实是 T 的 Hilbert—伴随算子. 证明是简单的，因为从(14)到(16)立刻有

$$\langle Tx,\ y_0\rangle=g(Tx)=f(x)=\langle x,\ x_0\rangle=\langle x,\ T^*y_0\rangle,$$

即是 3.9 节中的(1)式，除去记号不同外。我们的结果是：

公式(17)通过 T 的伴随算子 $T^\times$ 表示 Hilbert 空间上线性算子 T 的 Hilbert-伴随算子 T^*。

进一步注意，$\|T^*\|=\|T\|$(定理 3.9-2)现在可立即从(5)式和A_1与 A_2 的等距得出来。∎

为了完成这一讨论，我们还应该指出 $T:X\to Y$ 的伴随算子 $T^\times$ 和 $T:H_1\to H_2$ 的 Hilbert—伴随算子 T^* 之间的某些主要差别，这里，X, Y 是赋范空间，H_1, H_2 是Hilbert 空间。

$T^\times$ 是定义在含 T 的值域的空间的对偶空间上的，而 T^* 是直接定义在含 T 的值域的空间上的。T^* 的这一性质使得我们可

以用它们的Hilbert—伴随算子去定义重要的一类算子（见3.10-1）。

对于$T^\times$，根据(10)式，我们有

$$(\alpha T)^\times=\alpha T^\times$$

但是对于T^*，根据3.9-4，我们有

$$(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*.$$

在有限维情况下，$T^\times$由表示T的矩阵的转置阵表示出来，但是，T^*是用那一矩阵的复共轭转置阵表示出来（详细介绍见4.5-3和3.10-2）。

习　题

1. 证明，(1)式定义的泛函是线性的。
2. 零算子0和恒等算子I的伴随算子是什么？
3. 证明(9)式。
4. 证明(10)式。
5. 证明(11)式。
6. 证明，$(T^n)^\times=(T^\times)^n$。
7. 结合(11)式和例4.5-3我们能得到关于矩阵的什么公式？
8. 证明(12)式。
9. **(零化子)** 设X和Y是赋范空间，$T:X\to Y$是有界线性算子且$M=\overline{\mathscr{R}(T)}$，即$T$的值域的闭包。证明，(见2.10节习题13)

$$M^a=\mathscr{N}(T^\times).$$

10. **(零化子)** 设B是赋范空间X的对偶空间X'的子集。B的零化子^aB定义为

$$^aB=\{x\in X\mid f(x)=0,\ 一切\ f\in B\}.$$

证明，在习题9中

$$\mathscr{R}(T)\subset{}^a\mathscr{N}(T^\times).$$

在解方程$Tx=y$时，这意味着什么？

4.6 自反空间

向量空间的代数自反性在2.8节中已讨论过了。赋范空间的自反性是本节的论题。首先让我们追述一下在2.8节中所做的工作。我们记得，向量空间 X 叫做代数自反的，如果典则映象 $C:X\to X^{**}$ 是满射。这里，$X^{**}=(X^*)^*$ 是 X 的第二代数对偶空间且映象 C 定义为 $x\mapsto g_x$，这里

(1) $$g_x(f)=f(x) \qquad (f\in X^*\text{是变动的})；$$

即是，对任一 $x\in X$，其象是由(1)定义的线性泛函 g_x。如果 X 是有限维的，那末 X 是代数自反的。这已在定理2.9-3中证明了。

现在让我们转到我们的现实任务上来。考察赋范空间 X，如2.10-3所定义的它的对偶空间是 X'，X' 的对偶空间是 $(X')'$。这一空间用 X'' 表示且叫做 X 的**第二对偶空间**(或 X 的双对偶空间)。

选定 $x\in X$ 我们在 X' 上定义泛函 g_x 且命

(2) $$g_x(f)=f(x) \qquad (f\in X'\text{是变动的})$$

这很象(1)式，但注意，现在的 f 是有界的。下证 g_x 也是有界的，因为我们有基本结果如下。

4.6-1 引理(g_x 的范数) 对赋范空间 X 中每一固定的 x，由(2)式定义的泛函 g_x 是 X' 上的有界线性泛函，于是 $g_x\in X''$，且有范数

(3) $$\|g_x\|=\|x\|.$$

证明. 从8.2节，g_x 的线性性是已知的了。且(3)式从(2)式和推论4.3-4得出来，即

(4) $$\|g_x\|=\sup_{\substack{f\in X'\\ f\neq 0}}\frac{|g_x(f)|}{\|f\|}=\sup_{\substack{f\in X'\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}=\|x\|. \blacksquare$$

对每个 $x\in X$，对应着唯一的由(2)式给出的一有界线性泛函 $g_x\in X''$。这就定义了一映象

$$C: X\to X''\tag{5}$$
$$x\mapsto g_x.$$

C叫 X 到 X'' 中的**典则映象**。我们证明，C 是线性，内射和保范的。这可以用在2.10节中定义的赋范空间同构来表述。

4.6-2 引理（典则映象） 由(5)式给出的典则映象是赋范空间X到赋范空间$\mathscr{R}(C)$上的同构，$\mathscr{R}(C)$是C的值域。

证明. C的线性性在 2.8 节已经看到，因为

$$g_{\alpha x+\beta y}(f)=f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$
$$=\alpha g_x(f)+\beta g_y(f).$$

特别，$g_x-g_y=g_{x-y}$。因此，由(3)式我们得

$$\|g_x-g_y\|=\|g_{x-y}\|=\|x-y\|.$$

这就证明了C是等距的和保范的。等距蕴含内射。这也可以从我们的公式直接看出这一点。事实上，如果 $x\neq y$，那末 $g_x\neq g_y$，这是根据 2.2 节中公理($N2$)。因此，C可视为映到它的值域上的双射。

X叫做**可嵌入**于赋范空间Z中，如果X同Z的一子空间同构。这类似于 2.8 节，但注意，这里是赋范空间的同构，即是，保存范数的向量空间的同构(见2.10节)。引理4.6-2证明，X可嵌入在X''中，且C也叫做X到X''中的典则嵌入。

一般地，C不是满射，于是值域$\mathscr{R}(C)$是X''的真子空间。当$\mathscr{R}(C)$是 X'' 这一满射情况是非常重要的，并给它以一名称：

4.6-3 定义（自反性） 赋范空间X叫做自反的，如果

$$\mathscr{R}(C)=X''$$

这里，C：$X \to X''$ 是由(5)式和(2)式给出的典则映象。

这个概念是 H. Hahn(1927)引出的，E.R. Lorch(1939)称之为“自反性”。Hahn 在积分方程的诱发下，在赋范空间的线性方程的研究中认识到了自反性的重要性，他的研究也包含了 Hahn-Banach 定理以及对偶空间的最早的研究。

如果X是自反的，由引理 4.6-2，它与X''同构（因此等距）。有趣的是其逆一般不成立，R.C.James（1950，1951）已给出了证明。

而且，完备性不蕴含自反性，但相反我们有

4.6-4 定理（完备性） 如果赋范空间X是自反的，则它是完备的（因此是 Banach 空间）。

证明．因为X''是X'的对偶空间，由定理 2.10-4 它是完备的。X的自反性意味着 $\mathscr{R}(C)=X''$。X的完备性现由引理 4.6-2 从X'' 的完备性得出。

R^n 是自反的。这从 2.10-5 直接得出来。它是任意有限维赋范空间X的代表。事实上，如果 $\dim X<\infty$，那末，X上每一线性泛函都是有界的（参看 2.7-8），于是$X'=X^*$，且X的代数自反性蕴含下面的

4.6-5 定理（有限维） 每个有限维赋范空间都是自反的。

l^p，$1<p<\infty$ 是自反的。这从 2.10-7 得出。类似地，$L^p[a,b]$，$1<p<\infty$ 是自反的，这是可以证明的。也可以证明非自反空间有 $C[a,b]$（见2.2-5），l^1（证明在下面），$L^1[a,b]$，l^∞（见2.2-4）和l^∞的子空间c和c_0，这里，c 是一切收敛数列空间，c_0 是一切收敛于 0 的数列空间。

4.6-6 **定理(Hilbert 空间)** 每个Hilbert空间都是自反的。

证明. 我们用证明对每个 $g\in H''$，存在一个 $x\in H$ 使其 $g=Cx$ 的方法来证明典则映象 $C: H\to H''$ 是满射。当作准备，我们定义 $A: H'\to H$，$Af=z$，这里，z由 3.8-1 中 Riesz 表示式$f(x)=\langle x, z\rangle$给出。从3.8-1 我们知道A是双射且等距。A是共轭线性的，正如我们从 4.5 节中(16)式看到的，由 2.10-4，H'是完备的，且是Hilbert空间其中内积定义为

$$\langle f_1, f_2\rangle_1=\langle Af_2, Af_1\rangle.$$

注意，两端f_1，f_2的顺序。3.1 节中的($IP1$) 到 ($IP4$) 是容易验证的。特别，从A的共轭线性性：

$$\begin{aligned}\langle \alpha f_1, f_2\rangle_1&=\langle Af_2, A(\alpha f_1)\rangle=\langle Af_2, \bar{\alpha} Af_1\rangle\\&=\alpha\langle f_1, f_2\rangle\end{aligned}$$

得出$IP2$，设$g\in H''$是任意的。设它的 Riesz 表示式是

$$g(f)=\langle f, f_0\rangle_1=\langle Af_0, Af\rangle.$$

我们现在记住$f(x)=\langle x,z\rangle$，这里，$z=Af$。记$Af_0=x$，我们有

$$\langle Af_0, Af\rangle=\langle x, z\rangle=f(x).$$

与上面的一起，有$g(f)=f(x)$，根据C的定义，即有$g=Cx$。因为$g\in H''$是任意的，C是满射，于是H是自反的。

有时可分性和不可分性（见1.3-5)在证明某一类空间不是自反的时可以起作用。自反性和可分性之间的这种关系既有趣而且也十分简单。关键是定理 4.6-8（下面的)，它指出X'的可分性蕴含X的可分性（其逆一般不真)。因此，如果赋范空间是自反的，由 4.6-2，X''与X同构，于是在此情况下，X的可分性蕴含X''的可分性，再由 4.6-8，空间X'也是可分的。由此我们有下面的结果。

具有不可分对偶空间X'的可分赋范空间 X 不可能是自反的。

例. l^1 不是自反的。

证明. 由 1.3-10, l^1 是可分的, 但 $l^{1\prime}=l^\infty$ 不是可分的; 见 2.10-6 和 1.3-9。

要证明的定理4.6-8将从下面的引理得到。本引理的一个简单说明表示在图43中。

4.6-7 引理 (泛函的存在性) 设Y是赋范空间X的真闭子空间。设 $x_0\in X-Y$ 是任意的且

(6)
$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in Y}\|\tilde{y}-x_0\|$$

是x_0到Y的距离。那末, 存在一个$\tilde{f}\in X'$使其

(7)
$$\|\tilde{f}\|=1,\ \tilde{f}(y)=0 \text{ 对一切 } y\in Y,\ \tilde{f}(x_0)=\delta.$$

证明. 证明的思路是简单的。我们考察由Y和x_0生成的子空间 $Z\subset X$, 在Z上定义有界线性泛函f为

(8)
$$f(z)=f(y+\alpha x_0)=\alpha\delta \qquad y\in Y,$$

证明 f 满足(7)式且由 4.3-2 延拓f到X上。详细证明如下。

每一个 $z\in Z=\operatorname{span}(Y\cup\{x_0\})$ 有唯一的表达式

$$z=y+\alpha x_0 \qquad y\in Y.$$

这一点在(8)式中已被利用。f 的线性性容易看出来。又因 Y 是闭的, $\delta>0$, 于是 $f\neq 0$。现在, 当 $\alpha=0$ 时, 给出 $f(y)=0$, 对一切 $y\in Y$。当 $\alpha=1$ 和 $y=0$ 时, 我们有 $f(x_0)=\delta$。

我们证明 f 是有界的。当 $\alpha=0$ 时给出 $f(z)=0$。命$\alpha\neq 0$。利用(6)式并注意$-(1/\alpha)y\in Y$, 我们得到

$$|f(z)|=|\alpha|\delta=|\alpha|\inf_{\tilde{y}\in Y}\|\tilde{y}-x_0\|$$

$$\leqslant|\alpha|\left\|-\frac{1}{\alpha}y-x_0\right\|$$

$$=\|y+\alpha x_0\|,$$

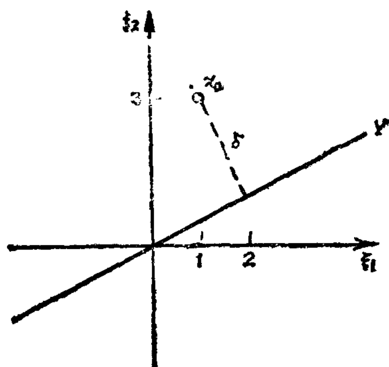


图43 当 $X=\mathbf{R}^3$，对引理 4.6-7 的说明．这里，Y 由 $\xi_2=\xi_1/2$，$\xi_3=0$ 和 $x_0=(1,3,0)$ 表示，于是 $\delta=\sqrt{5}$，$Z=\mathrm{span}(Y\cup\{x_0\})$ 是 $\xi_1\xi_2$-平面和 $f(z)=(-\xi_1+2\xi_2)/\sqrt{5}$．

即是，$|f(z)|\leqslant\|z\|$．因此 f 是有界的且 $\|f\|\leqslant1$．

我们证明 $\|f\|\geqslant1$．由下确界的定义，Y 包含一序列 (y_n) 使其 $\|y_n-x_0\|\to\delta$．设 $z_n=y_n-x_0$．那末，由(8)式，取 $\alpha=-1$，我们有 $f(z_n)=-\delta$．又

$$\|f\|=\sup_{\substack{z\in Z\\ z\neq0}}\frac{|f(z)|}{\|z\|}\geqslant\frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|}=\frac{\delta}{\|z_n\|}\to\frac{\delta}{\delta}=1,$$

当其 $n\to\infty$ 时．因此，$\|f\|\geqslant1$，于是 $\|f\|=1$．由关于赋范空间的 Hahn-Banach 定理，我们可以延拓 f 于 X 上使范数不增加．▌

利用这一引理，我们现将得到所要求的

4.6-8 定理（可分性） 如果赋范空间 X 的对偶空间 X' 是可分的，那末 X 自身也是可分的．

证明．我们假设 X' 是可分的．那末单位球面 $U'=\{f\mid\|f\|=1\}\subset X'$ 也含可数稠子集，比如说，(f_n)．因 $f_n\in U'$，我们有

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)| = 1.$$

由上确界的定义，我们可以找到范数为 1 的点 $x_n \in X$ 使其

$$|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}.$$

设Y是 $\mathrm{span}(x_n)$ 的闭包。那末，Y 是可分的，因为 Y 有可数稠密子集，即是，诸x_n的一切线性组合之集，其系数的实部和虚部是有理数

我们证明 $Y=X$。设 $Y \neq X$。那末，因Y是闭的，根据引理 4.6-7，存在一个$\tilde{f} \in X'$，使$\|\tilde{f}\|=1$ 且$\tilde{f}(y)=0$，对一切 $y \in Y$。因为$x_n \in Y$，我们有 $\tilde{f}(x_n)=0$ 且对一切n

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \leq |f_n(x_n)| &= |f_n(x_n) - \tilde{f}(x_n)| \\ &= |(f_n - \tilde{f})(x_n)| \\ &\leq \|f_n - \tilde{f}\| \|x_n\|,\end{aligned}$$

这里，$\|x_n\|=1$。因此，$\|f_n - \tilde{f}\| \geq \frac{1}{2}$，但这同假设$(f_n)$ 在 U' 中稠密矛盾，因为$\tilde{f}$本身在 U' 中，事实上，$\|\tilde{f}\|=1$。∎

习　　题

1. 如果$X=R^n$，(2)式中的泛函f和g_x是什么？

2. 在X是 Hilbert 空间的情况下，给出引理 4.6-7 的一个简单的证明。

3. 如果赋范空间X是自反的，证明 X' 是自反的。

4. 证明，Banach 空间X是自反的当且仅当它的对偶空间是自反的(提示：可以证明自反 Banach 空间的闭子空间是自反的。利用这一事实不作证明)

5. 证明，在引理4.6-7的假设下，存在X上的有界线性泛函h使其 $\|h\|=1/\delta$，$h(y)=0$ 对一切 $y \in Y$，$h(x_0)=1$。

6. 证明，赋范空间X的不同的闭子空间Y_1和Y_2有不同的零化子（见2.10节习题13）

7. 设Y是赋范空间X的闭子空间，使得在Y上处处为0的每一个$f\in X'$在全空间上处处为0。证明$Y=X$。

8. 设M是赋范空间X的任一子集。证明，$x_0\in X$是$A=\overline{\text{span}\,M}$的元当且仅当对每一使得$f|_M=0$的$f\in X'$都有$f(x_0)=0$。

9. （完全集）证明，赋范空间X的子集M在X中是完全的当且仅当在M上处处为0的每一个$f\in X'$在X上处处为0。

10. 证明，如果赋范空间X有线性无关的n元子集，则对偶空间也是如此。

4.7 纲定理·一致有界定理

一致有界定理（或一致有界原理）是S. Banach 和 H. Steinhaus(1927)给出的最重要的定理，实际上，在整个分析学中，有许多结果与这个定理有关。最早研究这个问题是H. Lebesgue (1909)。一致有界定理常常被认为是赋范空间中泛函分析的基础之一。其余是 Hahn-Banach 定理（4.2，4.3节），开映象定理（4.12节），闭图象定理（4.13节）。除 Hahn-Banach定理外，四个定理中的其余三个都要求完备性。事实上，它们刻划了Banach 空间的若干最重要的性质，这些性质通常在赋范空间中是没有的。

十分有趣的是，我们将从一个共同的依据而得出这三个定理来。更确切地说我们将要证明所谓的 Baire 纲定理。由此定理导出一致有界定理（在本节中），开映象定理（在4.12节中）。最后很容易得出闭图象定理（在4.13节中）。

Baire 纲定理在泛函分析中还有各种其他应用。由于该定理在许多证明中出现，这是纲理论进入许多证明的主要原因。例如，可参看更深一些的书：R. E. Edwards (1965)，J. L. Kelley

和 I. Namioka(1963).

在定义4.7-1中，将叙述关于 Baire 定理4.7-2的必须的概念。每个概念都有两个名字，新名和旧名（旧名在括号中给出来）。后者不采用了，因为“纲论”已被用于全然不同的数学目的（本书将不讲述它）。

4.7-1 定义（纲） 度量空间$X\neq\phi$的子集M叫做

(a) 在X中是稀疏的（或无处稠密），如果它的闭包$\overline{M}$没有内点（见1.3节）。

(b) 在X中是贫乏的（或第一纲的），如果M是可数多个在X中稀疏的集之并。

(c) 在X中是非贫乏的(或第二纲的)，如果M在X中不是贫乏的。

4.7-2 Baire纲定理(完备度量空间). 如果度量空间$X\neq\phi$是完备的，则它在自身中是非贫乏的。

因此，如果$X\neq\phi$是完备的且

$$(1)\qquad X=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k \qquad (A_k\text{闭})$$

那末，至少有某一A_k包含非空开子集。

证明. 证明的思路是简单的。设完备度量空间$X\neq\phi$在自身中贫乏，那末

$$(1^*)\qquad X=\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k$$

其中每个M_k在X中是稀疏的。我们将构造一Cauchy序列(p_k)，其极限是p（它的存在由完备性决定），且p不在任一M_k中，因此，同表达式(1^*)矛盾。

由假设M_1在X中稀疏，于是，按定义，$\overline{M}_1$不含非空开集。但X含非空开集（例如含X自身），故$\overline{M}_1\neq X$。因此，$\overline{M}_1$的余集

$\bar{M}_1^c=X-\bar{M}_1$ 非空且开。于是可以选择这样的一点 $p_1\in\bar{M}_1^c$ 和以 p_1 为心的开球，比如

$$B_1=B(p_1;\ \varepsilon_1)\subset\bar{M}_1^c,\ \varepsilon_1<\frac{1}{2}.$$

由假设，M_2在X中稀疏，于是，$\bar{M}_2$不含非空开集。因此，它不含开球 $B\left(p_1;\ \frac{1}{2}\varepsilon_1\right)$，故$\bar{M}_2^c\cap B\left(p_1;\ \frac{1}{2}\varepsilon_1\right)$是非空开集。于是，在此集中我们可以选择一开球，比如说

$$B_2=B(p_2;\ \varepsilon_2)\subset\bar{M}_2^c\cap B\left(p_1;\ \frac{1}{2}\varepsilon_1\right),\ \varepsilon_2<\frac{1}{2}\varepsilon_1.$$

按归纳法，于是得到一序列的球

$$B_k=B(p_k;\ \varepsilon_k),\qquad \varepsilon_k<2^{-k}$$

使其 $B_k\cap M_k=\phi$ 且

$$B_{k+1}\subset B\left(p_k;\ \frac{1}{2}\varepsilon_k\right)\subset B_k\qquad k=1,2,\cdots.$$

因为 $\varepsilon_k<2^{-k}$，各球中心组成的序列(p_k)是Cauchy 序列且收敛，比如说，$p_k\to p\in X$，因为按假设X是完备的．又，对每个m和 $n>m$ 有$B_n\subset B\left(p_m,\ \frac{1}{2}\varepsilon_m\right)$，于是

$$\begin{aligned}d(p_m,p)&\leqslant d(p_m,p_n)+d(p_n,p)\\&<\frac{1}{2}\varepsilon_m+d(p_n,\ p)\to\frac{1}{2}\varepsilon_m,\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时。因此，$p\in B_m$，对每个m。因为 $B_m\subset\bar{M}_m^c$，我们现在看出 $p\notin M_m$，对每一个 m。于是，$p\notin\bigcup M_m=X$。这同 $p\in X$ 矛盾 Baire 定理得证。∎

我们注意，Baire 定理之逆一般不真．在自身中非贫乏的非完备赋范空间的例子在 N. Bourbaki (1955)。习题 6，PP。3-4

中已给出．

由 Baire 定理，现在很容易得到所要求的一致有界性定理．该定理称，如果 X 是 Banach 空间且算子序列 $T_n\in B(X,Y)$ 在每一点 $x\in X$ 处是有界的，则序列一致有界．换言之，逐点有界性蕴含某种更强意义下的有界性，即一致有界性（下面 (2) 式中的实数 C_x，一般地说，它是随 x 而改变的，所以用 x 作为足标，本质之处是 C_x 不依赖于n）．

4.7-3 一致有界性定理 设(T_n)是有界线性算子$T_n: X\to Y$的序列，T_n从 Banach 空间X到赋范空间Y中，使其（$\|T_n x\|$）对每个 $x\in X$ 有界，比如说

(2) $$\|T_n x\|\leqslant C_x,\quad n=1,2,\cdots,$$

这里 C_x 是实数．那末范数序列$\|T_n\|$是有界的，即是，存在 C 使其

(3) $$\|T_n\|\leqslant C,\qquad n=1,2,\cdots.$$

证明．对每个 $k\in N$，设 $A_k\subset X$ 表一切使得

$$\|T_n x\|\leqslant k \text{对一切} n \text{成立}$$

的x所成之集．A_k 是闭的．事实上，对任 $x\in \bar{A}_k$，存在序列(x_j)，$x_j\in A_k$，收敛于x．这意味着，对每个固定的 n 有$\|T_n x_j\|\leqslant k$，因为 T_n 是连续的，又因范数连续（见2.2节），故得到

$$\|T_n x\|\leqslant k.\ \text{因此}\ x\in A_k\ \text{且}\ A_k\ \text{是闭的}.$$

由(2)式，每个 $x\in X$ 都属于某个A_k．因此

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

因为X是完备的，Baire 纲定理蕴含某个A_k包含一开球，比如说

(4) $$B_0=B(x_0;\ r)\subset A_{k_0}.$$

命$x\in X$ 是任意的且非零．我们设

(5) $$z=x_0+\gamma x,\qquad \gamma=\frac{r}{2\|x\|}.$$

那末 $\|z-x_0\|<r$，于是 $z\in B_0$。由(4)式和 A_{k_0} 的定义，于是有 $\|T_n z\|\leqslant k_0$，对一切n。又因为 $x_0\in B_0$，有 $\|T_n x_0\|\leqslant k_0$。由(5)式我们得

$$x=\frac{1}{\gamma}(z-x_0).$$

这就给出，对一切n

$$\|T_n x\|=\frac{1}{\gamma}\|T_n(z-x_0)\|\leqslant\frac{1}{\gamma}(\|T_n z\|+\|T_n x_0\|)$$

$$\leqslant\frac{4}{r}\|x\|k_0.$$

因此，对一切n，

$$\|T_n\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_n x\|\leqslant\frac{4}{r}k_0,$$

取$C=4k_0/r$，即是(3)式。▌

应用

4.7-4 多项式空间 范数定义为

(6) $\qquad \|x\|=\max|a_j| \qquad$ (a_0，a_1，…是x的系数)

的一切多项式全体的赋范空间X是非完备的。

证明. 我们在X上构造一有界线性算子序列，满足(2)式，但不满足(3)式，于是X不可能是完备的。

我们可以把次数为N_x的多项式 $x\neq 0$ 写成下面的形式：

$$x(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j t^j \qquad (a_j=0，当\ j>N_x时).$$

（当$x=0$时，在通常的次数讨论中，它的次数是没有定义的，但在这里没有关系）。作为 X 上的算子序列，我们取一泛函序列

$T_n=f_n$;

(7) $\qquad T_n(0)=f_n(0)=0,\ T_nx=f_n(x)=\alpha_0+\cdots+\alpha_{n-1}.$

f_n是线性的。f_n 是 有 界 的，因 为 由(6)式，$|\alpha_j|\leqslant\|x\|$，于是 $|f_n(x)|\leqslant n\|x\|$。而且，对每个固定的 $x\in X$，序 列 $(|f_n(x)|)$ 满足(2)式，因为，次数为N_x的多项式x有N_x+1 个 系 数，于是由(7)式我们有

$$|f_n(x)|\leqslant(N_x+1)\max_j|\alpha_j|=C_x,$$

即是(2)式。

我们现在证明(f_n)不满足(3)式，即不存在C使其$\|T_n\|=\|f_n\|\leqslant C$，对一切 n。这只要选取特别的的多项式即可办到.对于 f_n，我们选择由下式定义的x

$$x(t)=1+t+\cdots+t^n.$$

那末，由(6)式，$\|x\|=1$且

$$f_n(x)=1+1+\cdots+1=n=n\|x\|.$$

因此，$\|f_n\|\geqslant|f_n(x)|/\|x\|=n$，于是$(\|f_n\|)$是无界的。

4.7-5 Fourier 级数 我们回忆一下3.5-1，以2π为周期的周期函数 x 的 Fourier 级数是形如

$$(8)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mt+b_m\sin mt)$$

的级数，x的 Fourier 系数用 Euler 公式给出

$$(9)\qquad a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos mt\,dt,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin mt\,dt.$$

［在(8)式我们写成 $a_0/2$，在(9)中只有两个公式；但在3.5-1中，

我们记成 a_0，则必需三个 Euler 公式]。

众所周知，级数甚至在x的间断点处可以收敛，（习题15给出了一个简单例子）.这证明，对于收敛性来讲，连续性不是必要的。出人意料的，连续性也不是充分的①。事实上，利用一致有界性定理我们可以证明于下。

存在实值连续函数，它的 Fourier 级数在给定点t_0处是发散的。

证明．设X是一切以 2π为周期的，范数定义为

$$\|x\| = \max |x(t)| \tag{10}$$

的连续函数x组成的赋范空间。X是Banach 空间，这与从1.5-5中取 $a=0$ 和$b=2\pi$ 所得出来的结果一致。我们可以取 $t_0=0$ 而不影响一般性。为了证明我们的结论，我们将应用一致有界性定理4.7-3于$T_n=f_n$，这里，$f_n(x)$是x的 Fourier 级数n项部分和在 $t_0=0$ 处的值。因为，当 $t_0=0$ 时，sine 项都是 0，cosine 项都是 1，我们从 (8) 式和 (9) 式看出

$$f_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos mt\right]dt.$$

我们要确定积分符号下用和数表示出来的函数。为此目的，我们计算

$$2\sin\frac{1}{2}t\sum_{m=1}^{n}\cos mt = \sum_{m=1}^{n} 2\sin\frac{1}{2}t\cos mt$$

---

① 连续性和在点t_0处右方和左方导数的存在性，对在 t_0 处收敛来讲是充分的。参看W．Rogosinski(1959)，P.70.

$$=\sum_{m=1}^{n}\left[-\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)t+\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right]$$

$$=-\sin\frac{1}{2}t+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t,$$

这里最后的表达式是逐对相消而得出来的。用$\sin\frac{1}{2}t$去除两端，并在两端加1得

$$1+2\sum_{m=1}^{n}\cos mt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

因而，关于$f_n(x)$的公式可简化为

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\,q_n(t)\,dt, \tag{11}$$

$$q_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

利用此式，我们证明线性泛函f_n是有界的。事实上，由(10)式和(11)式

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\max|x(t)|\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt$$

$$=\frac{\|x\|}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt.$$

由此看出f_n是有界的。而且，对范数为1的一切x取上确界，我们得

$$\|f_n\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt.$$

实际上，等号成立，我们现在进行证明。为此，让我们首先记

$$|q_n(t)|=y(t)q_n(t)$$

这里，$y(t)=+1$ 在使 $q_n(t)\geqslant 0$ 的每一t处；$y(t)=-1$，在其余各处。y是不连续的，但对任给的 $\varepsilon>0$，可以修正它成为范数为1的连续函数 x，使得对此x我们有

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}[x(t)-y(t)]q_n(t)dt\right|<\varepsilon.$$

表此式为两个积分并利用(11)，我们得

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}x(t)q_n(t)-\int_0^{2\pi}y(t)q_n(t)dt\right|$$

$$=\left|f_n(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt\right|<\varepsilon.$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的且$\|x\|=1$，这就证明了要求的公式

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt. \tag{12}$$

最后，我们证明序列($\|f_n\|$)是无界的。将(11)式中q_n的表达式代入(12)式中，利用

$$\left|\sin\frac{1}{2}t\right|<\frac{1}{2}t,\quad t\in(0,\ 2\pi]$$

这一事实，并命$\left(n+\frac{1}{2}\right)t=v$，我们得

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt$$

$$>\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin v|dv$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\longrightarrow\infty \text{ 当} n\to\infty\text{时，}$$

这因为调和级数发散. 因此$(\|f_n\|)$是无界的，于是（3）式（取$T_n=f_n$）不成立. 因为X是完备的，这就蕴含(2)式不可能对一切x成立. 因此，一定存在$x\in X$使得$(|f_n(x)|)$是无界的. 但根据f_n的定义，这意味着x的 Fourier 级数在$t=0$处发散.

注意，我们的存在性的证明并没有告诉我们如何去找出这种 Fourier 级数在t_0发散的连续函数. 这种函数的例子已由L. Fejér(1910)给出；其中的一个被转载在W. Rogosinski(1959), PP.76—77.

习　　题

1. 一切有理数集是哪一纲的？(a)在R中，(b)在自身中（取通常的距离）.

2. 一切整数集是哪一纲的？(a)在R中，(b)在自身中（取由R中导出的度量）.

3. 在离散度量空间X中，求出一切稀疏集来.（见1.1-8）

4. 在R^2中求出贫乏的稠密子集来.

5. 证明，度量空间X的子集M在X中是稀疏的当且仅当$(\overline{M})^c$在X中稠密.

6. 证明，完备度量空间X的贫乏子集M的余集M^c是非贫乏的.

7. (共鸣) 设X是 Banach 空间，Y是赋范空间且$T_n \in B(X, Y)$，$n=1, 2, \cdots$，使其 $\sup_n \|T_n\| = \infty$。试证明，存在 $x_0 \in X$，使得 $\sup_n \|T_n x_0\| = \infty$。[此点$x_0$常常叫做共鸣点，我们的问题启发我们称一致有界性定理为共鸣定理]

8. 证明，定理4.7-3中，X 的完备性是本质的，不可以省去[考察由一切$x=(\xi_j)$，$\xi_j=0$ 当 $j \geqslant J \in N$ 时，这里，J依赖于 x，组成的子空间 $X \subset l^\infty$，及由 $T_n x = f_n(x) = n\xi_n$定义的T_n]

9. 设$T_n = S^n$，这里，算子 $S: l^2 \to l^2$定义为 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \cdots) \mapsto (\xi_3, \xi_4, \xi_5, \cdots)$。求出$\|T_n x\|$的界；求出 $\lim_{n \to \infty} \|T_n x\|$，$\|T_n\|$和 $\lim_{n \to \infty} \|T_n\|$。

10. (空间c_0) 设$y=(\eta_j)$，$\eta_j \in C$，使得 $\sum \xi_j \eta_j$ 对每个 $x=(\xi_j) \in c_0$ 收敛，这里，$c_0 \subset l^\infty$是一切收敛于零的复数列的子空间。证明，$\sum |\eta_j| < \infty$ (利用4.7-3)。

11. 设X是 Banach 空间，Y是赋范空间且 $T_n \in B(X, Y)$ 使得对每个 $x \in X$，$(T_n x)$是Y中的 Cauchy 序列。证明，$(\|T_n\|)$是有界的。

12. 另外，如果在习题11中的Y还是完备的，试证明，$T_n x \to Tx$，这里，$T \in B(X, Y)$。

13. 如果(x_n)在 Banach 空间X中，且使其$(f(x_n))$是有界的，对一切 $f \in X'$，证明，$(\|x_n\|)$是有界的。

14. 如果X和Y是 Banach 空间且$T_n \in B(X, Y)$，$n=1, 2, \cdots$，证明，以下命题等价：

(a) $(\|T_n\|)$是有界的，

(b) $(\|T_n x\|)$对一切$x \in X$有界，

(c) $(|g(T_n x)|)$是有界的，对一切$x \in X$和一切$g \in Y'$。

15. 为了说明函数x的 Fourier 级数甚至可以在x的间断处收敛，求函数

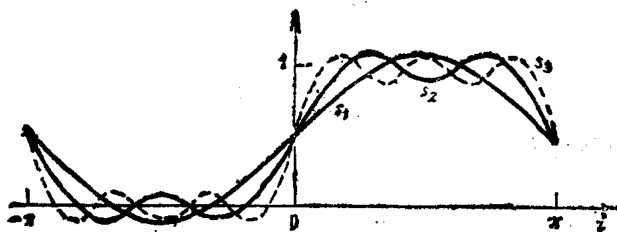


图44 习题15中前三个部分和

$$x(t)=\begin{cases}0 & 如果-\pi\leqslant t<0\\ 1 & 如果0\leqslant t\pi\end{cases}\quad 且x(t+2\pi)=x(t)$$

的 Fourier 级数。图示x和部分和s_0，s_1 s_2，s_3，并与图 44 相比较。证明，在$t=\pm n\pi$处，级数之值为1/2，即x的右和左极限的算术平均值；这种性质是Fourier级数的典型性质。

4.8 强收敛和弱收敛

我们已经知道，在微积分学中定义了不同类型的收敛（通常的收敛，条件收敛及一致收敛），这就使得人们在序列和级数的理论及应用中具有较大的灵活性。在泛函分析中情况也是类似的，而且甚至有更大的可能性证明它们是有实际意义的。在本节我们主要讨论“弱收敛”这是一个基本的概念。我们现在才介绍它，因为，它的理论本质上是用到前一节中的一致有界性定理。事实上，它是该定理的一个最主要的应用。

在赋范空间中，元素序列的收敛在 2.3 节中已经定义了，那种收敛今后叫做强收敛，以便同即将引入的“弱收敛”相区别。首先叙述

4.8-1 定义（强收敛） 赋范空间X中的序列(x_n)叫强收敛的（或按范数收敛的），如果，存在一元$x\in X$使其

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0,$$

并记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

或简单地记为

$$x_n\to x.$$

x叫做(x_n)的强极限，且读成(x_n)强收敛于x。

弱收敛用X上的有界线性泛函定义如下.

4.8-2 定义(弱收敛) 赋范空间X中的序列(x_n)叫做弱收敛的，如果存在$x\in X$使其对每个$f\in X'$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x).$$

记为

$$x_n \xrightarrow{w} x$$

或者$x_n \rightharpoonup x$. 元x叫做(x_n)的弱极限，并且说成(x_n)弱收敛于x.

注意，弱收敛意味着对每个$f\in X'$，数序列$a_n=f(x_n)$收敛.

弱收敛在分析学中有各种各样的应用（例如在变分学和微分方程一般理论中）. 这一概念说明了泛函分析中的一个基本的原理，即是说，对空间的研究常常代之以对对偶空间的研究.

为着应用弱收敛这一概念，必须知道它的某些基本的性质，我们将它叙述在下面的引理之中. 读者注意，在证明中我们要用到Hahn-Banach定理（既用4.3-4又用4.6-1）和一致有界性定理. 这也表明这些定理在处理弱收敛问题中的重要性.

4.8-3 引理（弱收敛性） 设(x_n)是赋范空间中的弱收敛序列，比如说$x_n \xrightarrow{w} x$. 那末，

(a) (x_n)的弱极限x是唯一的.

(b) (x_n)的每一子序列弱收敛于x.

(c) 序列$(\|x_n\|)$是有界的.

证明. (a) 设$x_n \xrightarrow{w} x$又$x_n \xrightarrow{w} y$. 那末，$f(x_n) \longrightarrow f(x)$又$f(x_n) \longrightarrow f(y)$. 因为$(f(x_n))$是数列，它的极限是唯一的. 因此，$f(x)=f(y)$，即是，对每个$f\in X'$，我们有

$$f(x)-f(y)=f(x-y)=0.$$

由推论4.3-4，这就蕴含 $x-y=0$，于是证明了弱极限是唯一的。

（b） 从 $(f(x_n))$ 是收敛的数值序列而得出，$(f(x_n))$ 的每一子序列收敛且与序列有相同的极限。

（c） 因为 $(f(x_n))$ 是收敛的数值序列，它是有界的，比如说，$|f(x_n)|\leqslant c_f$，对一切n，这里，c_f是依赖于f而不依赖于n的常数。利用典则映象$C: X\to X''$(4.6节)，我们可以定义$g_n\in X''$：

$$g_n(f)=f(x_n) \qquad f\in X'.$$

（我们以g_n代替了g_{x_n}，是为了避免出现下标的下标。）那末，对一切n，

$$|g_n(f)|=|f(x_n)|\leqslant c_f,$$

即是，对每个$f\in X'$，序列 $(|g_n(f)|)$ 是有界的。因为，由2.10-4，X'是完备的，一致有界性定理 4.7-3 是可以应用的且由此得出$(\|g_n\|)$是有界的。现由4.6-1有$\|g_n\|=\|x_n\|$，于是(c)得证。∎

读者可能会感到惊奇，为什么弱收敛在微积分学中不起作用。道理很简单，在有限维赋范空间中，强收敛与弱收敛的差异完全消失了。让我们来证明这一事实，也证明用“强”和“弱”的术语的合理性。

4.8-4 定理（强收敛和弱收敛） 设(x_n)是赋范空间X的序列。那末：

（a） 强收敛蕴含弱收敛，且其极限相同。

（b） (a)之逆一般不真。

（c） 如果 $\dim X<\infty$，那末弱收敛蕴含强收敛。

证明. (a)根据定义，$x_n\to x$意味着$\|x_n-x\|\to 0$且蕴含，对每个$f\in X'$，

$$|f(x_n)-f(x)|=|f(x_n-x)|\leqslant\|f\|\|x_n-x\|\to 0.$$

这就证明 $x_n\xrightarrow{w}x$。

(b) 从Hilbert空间中的规格正交序列(e_n)可以看出来。事实上，对每个$f\in H'$有Riesz表示式$f(x)=\langle x,z\rangle$。因此，$f(e_n)=\langle e_n,z\rangle$。现在，Bessel不等式（见3.4-6）是

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle e_n,z\rangle|^2\leqslant\|z\|^2.$$

因此，左边的级数收敛，于是，它的项趋于零，当$n\to\infty$时。这蕴含

$$f(e_n)=\langle e_n,z\rangle\to 0.$$

因为$f\in H'$是任意的，我们看出$e_n\xrightarrow{w}0$。然而，(e_n)不强收敛，因为

$$\|e_m-e_n\|^2=\langle e_m-e_n,\ e_m-e_n\rangle=2\quad(m\neq n).$$

(c) 假设$x_n\xrightarrow{w}x$且$\dim X=k$。命$\{e_1,\cdots,e_k\}$是X的任意一基，且比如说

$$x_n=\alpha_1^{(n)}e_1+\cdots+\alpha_k^{(n)}e_k$$

和

$$x=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ke_k.$$

根据假设，对每个$f\in X'$有$f(x_n)\to f(x)$。我们取特殊的$f_1,\cdots,f_k$，

$$f_j(e_j)=1,\ f_j(e_m)=0\qquad(m\neq j).$$

（这是$\{e_1,\cdots,e_k\}$的对偶基，参看2.9节）那末，

$$f_j(x_n)=\alpha_j^{(n)}\qquad f_j(x)=\alpha_j.$$

因此，$f_j(x_n)\to f_j(x)$蕴含$\alpha_j^{(n)}\to\alpha_j$。由此易得

$$\|x_n-x\|=\left\|\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j^{(n)}-\alpha_j)e_j\right\|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j| \|e_j\| \to 0$$

当$n \to \infty$时。这证明(x_n)强收敛于x。▌

有趣的是，也存在无限维空间使得强和弱收敛是等价概念。正如I. Schur (1921) 证明的，l^1就是一例。最后，让我们看一下在两个特别重要的空间类型中的弱收敛。

例

4.8-5 Hilbert空间 在Hilbert空间中，$x_n \xrightarrow{w} x$ 当且仅当$\langle x_n, z\rangle \to \langle x, z\rangle$，对空间中的一切 z。

证明。根据3.8-1，显然真。

4.8-6 空间l^p 在空间l^p中，这里$1<p<\infty$，$x_n \xrightarrow{w} x$ 当且仅当：

(*A*) 序列 $(\|x_n\|)$ 是有界的。

(*B*) 对每个固定的j，我们有$\xi_j^{(n)} \to \xi_j$，当$n \to \infty$时；这里，$x_n = (\xi_j^{(n)})$和$x = (\xi_j)$。

证明。l^p的对偶空间是l^q；参看2.10-7。l^q的Schauder基是(e_n)，这里，$e_n = (\delta_{nj})$在第n位上是1，其他各处是零。span(e_n)在l^q中稠密，于是从下面的引理得出结论中的结果。

4.8-7 引理（弱收敛性） 在赋范空间X中，$x_n \xrightarrow{w} x$ 当且仅当

(*A*) 序列$(\|x_n\|)$是有界的。

(B) 对完全子集$M\subset X'$的每一元f，有

$$f(x_n)\to f(x).$$

证明。在弱收敛性的情况下，(A)从引理4.8-3得出来，(B)是平凡的。

反之，假设(A)和(B)成立。让我们考察任意$f\in X'$，并证明$f(x_n)\to f(x)$，根据定义，这意味着弱收敛性。

由(A)我们有$\|x_n\|\leqslant c$，对一切n，且$\|x\|\leqslant c$，这里，c取充分大。因为M在X'中是完全的，对每个$f\in X'$存在span M中的一序列(f_j)，使其$f_j\to f$。因此，对任给的$\varepsilon>0$，我们可以找到一个j使其

$$\|f_j-f\|<\varepsilon/3c.$$

而且，因为$f_j\in\text{span } M$，由假设(B)存在一N使其对一切$n>N$，

$$|f_j(x_n)-f_j(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

利用这两个不等式和应用三角不等式，当$n>N$时，我们得

$$\begin{aligned}|f(x_n)-f(x)|&\leqslant|f(x_n)-f_j(x_n)|+|f_j(x_n)-f_j(x)|\\&\quad+|f_j(x)-f(x)|<\|f-f_j\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|f_j-f\|\|x\|\\&<\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3c}c=\varepsilon.\end{aligned}$$

因$f\in X'$是任意的，这证明序列(x_n)弱收敛于x。

习　　题

1. **(逐点收敛)** 如果$x_n\in C[a,b]$且$x_n\xrightarrow{w}x\in C[a,b]$，证明，$(x_n)$在$[a,b]$上是逐点收敛的，即是，对每个$t\in[a,b]$，$(x_n(t))$收敛。

2. 设X和Y是赋范空间，$T\in B(X,Y)$且(x_n)是X中一序列，如果$x_n\xrightarrow{w}x_0$，证明$Tx_n\xrightarrow{w}Tx_0$。

3. 如果 (x_n) 和 (y_n) 是同一赋范空间 X 中的序列，证明，$x_n \xrightarrow{w} x$ 和 $y_n \xrightarrow{w} y$ 蕴含 $x_n+y_n \xrightarrow{w} x+y$，也蕴含 $\alpha x_n \xrightarrow{w} \alpha x$，这里，$\alpha$ 是任意的数。

4. 证明，$x_n \xrightarrow{w} x$ 蕴含 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| \geqslant \|x_0\|$。(利用定理4.3-3)。

5. 如果在赋范空间 X 中 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，证明，$x_0 \in \bar{Y}$，这里，$Y = \text{span}(x_n)$。(利用引理4.6-7)。

6. 如果 (x_n) 是赋范空间 X 中的弱收敛序列，比如说，$x_n \xrightarrow{w} x_0$，证明，存在 (x_n) 的元的线性组合序列 (y_m) 强收敛于 x_0。

7. 证明，赋范空间 X 的任意闭子空间 Y 包含它的元组成的一切弱收敛序列的极限。

8. **(弱Cauchy序列)** 在实或复赋范空间 X 中的弱Cauchy序列是 X 中的一序列 (x_n)，使其对每一个 $f \in X'$，序列 $(f(x_n))$ 分别是 R 或 C 中的Cauchy序列。[注意，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在] 证明，弱 Cauchy 序列是有界的。

9. 设 A 是赋范空间 X 中之集，使其 A 的每一非空子集包含弱 Cauchy 序列，证明，A 是有界的。

10. **(弱完备性)** 赋范空间 X 叫做弱完备的，如果 X 中每一弱Cauchy序列在 X 中弱收敛。如果 X 是自反的，证明，X 是弱完备的。

4.9 算子序列和泛函序列的收敛性

有界线性算子和泛函序列经常在具体的问题的抽象表示中出现。例如，处理Fouricr 级数的收敛问题，插值多项式序列，数值积分法等等。在这些问题中，会经常碰到算子和泛函序列的收敛性，而这些序列按范数有界，或具有与有界性类似的性质。

经验证明，对赋范空间中的元的序列，如上节中定义的强、弱收敛都是有用的概念。对算子序列 $T_n \in B(X,Y)$ 有三种不仅在理论上，而且在实用上都是有意义的收敛性。这些是

(1) 按 $B(X,Y)$ 中范数收敛，

（2） 在Y中$(T_n x)$强收敛，

（3） 在Y中$(T_n x)$弱收敛。

现介绍定义和术语如下；它们是由J. Von Neumann(1929—30b)引进的。

4.9-1 定义（算子序列的收敛性） 设X和Y是赋范空间。算子$T_n \in B(X,Y)$的序列(T_n)叫做：

（1） **一致算子收敛**①，如果按$B(X,Y)$上的范数(T_n)收敛。

（2） **强算子收敛**，如果对每个$x \in X$，$(T_n x)$在Y中强收敛。

（3） **弱算子收敛**，如果对每个$x \in X$，$(T_n x)$在Y中弱收敛。

按公式这意味着存在一算子$T: X \to Y$使其分别地有

（1） $\|T_n - T\| \to 0$,

（2） $\|T_n x - Tx\| \to 0$ 对一切$x \in X$,

（3） $|f(T_n x) - f(Tx)| \to 0$ 对一切$x \in X$，一切$f \in Y'$。

T分别地做(T_n)的一致，强和弱算子极限。

在上一节中我们已指出，即使在微积分学中，在许多简单的情况下，为着适应不同的情况，已经采用了几种收敛的概念。但是，一下子引进这么多的收敛概念，可能会使读者难于分辨。也许还会问，对算子而言，为什么必需有这三种类型的收敛性呢？回答是，在现实问题中出现的许多算子由简单算子某种极限给出。重要的是要知道，所说的“某种”是什么意思，也就是要知道蕴含于算子序列中的极限算子的相应性质。在研究问题之初，不总是要求知道极限按什么样的意义存在，因此，它可以有各种各样的可能性。然而，对特定的问题人们往往只能在非常“弱”

---

① 三种术语中的“算子”一词常常被略去。为了清晰起见，我们保留了它。

的意义下建立收敛性，使得由此能着手工作。然后建立新的工具，证明更强意义下的收敛性，以保证极限算子"更好"的性质。这是一个典型的方法，例如，在偏微分方程中就是这样。

不难证明

(1)⇒(2)⇒(3)

(极限相同) 但其逆通常不真，这点可以从下面的例子看出。

例

4.9-2 (空间l^2) 在空间l^2中，我们考察序列(T_n)，这里，$T_n:l^2\to l^2$定义为

$$T_n x=(\underbrace{0,\cdots,0}_{(n\text{个零})},\ \xi_{n+1},\ \xi_{n+2},\ \xi_{n+3},\cdots);$$

这里，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$。这种算子是线性和有界的。显然，因为$T_n x\to 0=0\cdot x$，$(T_n)$是强算子收敛于0的。但是，$(T_n)$不一致算子收敛，因为$\|T-0\|=1$。

4.9-3 (空间l^2) 另外一个算子序列(T_n)，$T_n:l^2\to l^2$定义为

$$T_n x=(\underbrace{0,\cdots,0}_{(n\text{个零})},\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\cdots)$$

这里，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$。这种算子$T_n$是线性有界的。我们证明$(T_n)$弱算子收敛于0但不强算子收敛。

l^2上的每一个有界线性泛函f有Riesz表示式3.8-1，即是，由3.1-6

$$f(x)=\langle x,z\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\bar{\zeta}_j,$$

这里，$z=(\zeta_j)\in l^2$。因此，命$j=n+k$并利用T_n的定义，我们有

$$f(T_nx)=\langle T_nx,z\rangle=\sum_{j=n+1}^{\infty}\xi_{j-n}\bar{\zeta}_j=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\bar{\zeta}_{n+k}$$

由1.2-3中的 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$|f(T_nx)|^2=|\langle T_nx,z\rangle|^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\sum_{m=n+1}^{\infty}|\zeta_m|^2.$$

最后一级数是收敛级数的余项级数。因此，当 $n\to\infty$时，右端趋于0；于是$f(T_nx)\to 0=f(0x)$。因而，(T_n)是弱算子收敛于0的。

但是，(T_n)不强算子收敛，因为，对于 $x=(1,0,0,\cdots)$，我们有

$$\|T_mx-T_nx\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\quad(m\neq n).$$

线性泛函是线性算子（值域在数域 R 或 C 中），于是，(1)，(2)和(3)可直接应用。但是，现在(2)和(3)是等价的了，其理由如下。我们过去有$T_nx\in Y$，而现在有$f_n(x)\in$R(或C)。因此，(2)和(3)中的收敛现在都发生在有限维(一维)空间R（或C）中，且(2)和(3)的等价性从定理4.8-4(c)得出来。两个余下的概念叫做强收敛和弱*收敛（读作弱星号收敛）：

4.9-4 定义（泛函序列的强和弱*收敛） 设(f_n)是赋范空间X的有界线性泛函序列。那末，

（a） (f_n)强收敛，意味着存在一$f\in X'$使其$\|f_n-f\|\to 0$。记为

$$f_n\to f.$$

（b） (f_n)弱*收敛意味着存在一$f\in X'$使其$f_n(x)\to f(x)$，对一切$x\in X$。记为①

① 此概念比之(f_n)的弱收敛，即由4.8-2，意味着对一切 $g\in X''$，有 $g(f_n)\to g(f)$ 更为重要。弱收敛蕴含弱*收敛，这可以从 4.6 节中定义的典则映象看出来（参看习题4）。

$$f_n \xrightarrow{w^*} f.$$

在(a)和(b)中的f分别叫做(f_n)的强极限和弱*极限.

回到算子$T_n \in B(X,Y)$上来，我们问，关于(1)，(2)和(3)中的极限算子$T: X \to Y$可以说点什么呢？

如果收敛是一致的，$T \in B(X,Y)$；否则，$\|T_n - T\|$没有意义.如果收敛是强或弱的，T仍然是线性的，如果X是不完备的，它可以是无界的.

例. 空间X是由l^2中仅有有限项非零的一切序列$x=(\xi_j)$组成，取l^2上的度量，它是不完备的.在X上定义有界线性算子序列T_n为

$$T_n x = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \cdots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots),$$

于是，如果$j \leqslant n$，T_n的项为$j\xi_j$，如果$j > n$，$T_n x$的项为ξ_j.这一序列(T_n)强收敛于由$Tx=(\eta_j)$，$\eta_j = j\xi_j$定义的无界算子T.

但是，如果X是完备的，此例所说的情况是不可能出现的，因为我们有一基本的引理

4.9-5 引理（强算子收敛） 命$T_n \in B(X,Y)$，这里，X是Banach空间，Y是赋范空间.如果(T_n)强算子收敛于T，那末$T \in B(X,Y)$.

证明. T的线性性易从T_n的线性得出来.因为，对每个$x \in X$，$T_n x \to Tx$，序列$(T_n x)$对每个x是有界的.见1.4-2.因X是完备的，根据一致有界性定理，$(\|T_n\|)$是有界的，比如说，$\|T_n\| \leqslant c$，对一切n.由此得出$\|T_n x\| \leqslant \|T_n\| \|x\| \leqslant c\|x\|$.这蕴含$\|Tx\| \leqslant c\|x\|$.

关于强算子收敛的一个有用的准则是

4.9-6 定理(强算子收敛) 算子$T_n \in B(X,Y)$，这里，X和Y都是 Banach 空间，序列(T_n)是强算子收敛的当且仅当

(A) 序列$(\|T_n\|)$是有界的。

(B) 对X的完全子集M中的每一x，序列$(T_n x)$是 Cauchy 序列。

证明。如果$T_n x \to Tx$，对每个$x \in X$，那末，(A)从一致有界性定理（因为X是完备的）得出来，(B)是平凡的。

反之，假设(A)和(B)成立，于是，比如说，$\|T_n\| \leqslant c$，对一切n。我们考察任意$x \in X$，并证明，$(T_n x)$在Y中强收敛．命$\varepsilon > 0$是给定的。因为span$M$在X中稠密，存在$y \in \text{span}M$使其

$$\|x-y\| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

因为$y \in \text{span}M$，由(B)序列$(T_n y)$是Cauchy序列。因此存在一个N使其

$$\|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (m, n > N).$$

利用这两个不等式及三角不等式，我们易看出$(T_n x)$是Y中的Cauchy序列，因为，对$m, n > N$我们得

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\|$$

$$< \|T_n\| \|x-y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_m\| \|x-y\|$$

$$< c\frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c\frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon.$$

因为Y是完备的，$(T_n x)$在Y中收敛。因为$x \in X$是任意的，这就证明了(T_n)的强算子收敛性。

4.9-7 推论（泛函） 在 Banach 空间X上的有界线性泛函序列(f_n)是弱*收敛的，其极限是X上的有界线性泛函当且仅当，

(A) 序列$(\|f_n\|)$是有界的。

(B) 对X的完全子集M中的每一x，序列$(f_n(x))$是Cauchy序列。

这一定理有一些有趣的应用。其中的两个将在下一节中讨论。

习　题

1. 试证明，一致算子收敛性$T_n\to T$，$T_n\in B(X,Y)$，蕴含强算子收敛性且其极限相同。

2. 如果$S_n, T_n\in B(X,Y)$，且(S_n)和(T_n)强算子收敛于极限S和T，证明(S_n+T_n)是强算子收敛的且极限为$S+T$。

3. 证明，$B(X,Y)$中的强算子收敛性蕴含弱算子收敛性且其极限相同。

4. 证明，足注6中的弱收敛性蕴含弱*收敛性。如果X是自反的，证明其逆也成立。

5. 强算子收敛性不必蕴含一致算子收敛性。用考察$T_n=f_n: l^1\to \mathbf{R}$，这里，$f_n(x)=\xi_n$及$x=(\xi_n)$，来说明这一点。

6. 设$T_n\in B(X,Y)$，这里，$n=1,2,\cdots$。为了启示出定义4.9-1中的术语"一致"，试证明，$T_n\to T$当且仅当对每个$\varepsilon>0$，存在N，它仅依赖于ε，使其当$n>N$时，对一切范数为1的x有

$$\|T_n x-Tx\|<\varepsilon.$$

7. 设$T_n\in B(X,Y)$，这里X是Banach空间。如果(T_n)是强算子收敛的，试证明$(\|T_n\|)$是有界的。

8. 设$T_n\to T$，这里，$T_n\in B(X,Y)$。证明，对每个$\varepsilon>0$和每一闭球$K\subset X$，存在一N，使其$\|T_n x-Tx\|<\varepsilon$，对一切$n>N$和一切$x\in K$成立。

9. 证明，在引理4.9-5中$\|T\|\leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$。

10. 设X是可分Banach空间且$M\subset X'$是有界集。证明，M的元之每一序列包含弱*收敛于X'中的元的子序列。

4.10 对序列的可和性的应用

弱*收敛在发散序列（和级数）的理论中有重要的应用。发散序列没有通常意义下的极限。在发散序列的理论中，人们指望对某些发散序列指定广义的“极限”。产生广义“极限”的程序叫做可和性方法。

例如，给定一发散序列$x=(\xi_k)$，可以估计算术平均值序列$y=(\eta_n)$：

$$\eta_1=\xi_1,\quad \eta_2=\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2),\cdots,\quad \eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n),\cdots.$$

这是可和性方法的一个例子 如果y收敛于η（在通常意义下），则称x按上述方法是可和的，并有广义极限η。例如，如果

$x=(0,1,0,1,0,\cdots)$，则$y=\left(0,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \cdots\right)$且有广义极限$\frac{1}{2}$。

一可和性方法叫做矩阵方法，如果它可以表为

$$y=Ax,$$

这里，$x=(\xi_k)$，$y=(\eta_n)$是无穷列向量，$A=(\alpha_{nk})$是无穷矩阵；其中$n,k=1,2,\cdots$，在公式$y=Ax$中采用矩阵的乘法，即是说，y的项为

$$(1)\qquad \eta_n=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\xi_k\qquad n=1,2,\cdots.$$

上面的例子描绘了一种矩阵方法（矩阵是什么？）。

有关术语如下。用(1)式给出的方法，简单地叫做A—方法，因为相应的矩阵是用A表示的。如果(1)式的级数全收敛，则$y=(\eta_n)$按通常的意义收敛。y的极限叫做x的A—极限，且x

叫做A—可和的。一切A—可和序列之集叫做A—方法的值域。

A—方法叫做**正则的**（或不变的），如果它的值域包含一切收敛序列且如果对每一个这种序列，A—极限等于通常的极限，即是，如果

$$\xi_k \to \xi \text{ 蕴含 } \eta_n \to \xi.$$

显然，正则性是自然必需的。事实上，一种方法如不能应用于收敛序列，或改变了它们的极限就没有实际用途。关于正则性的基本准则如下。

4.10-1 Toeplitz 极限定理 （正则可和性方法） 矩阵$A=(\alpha_{nk})$的A—可和方法是正则的当且仅当

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{nk}=0$ 对 $k=1, 2, \cdots,$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}=1,$

(4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leqslant \gamma$ 对 $n=1, 2, \cdots,$

这里，γ是不依赖于n的常数。

证明。我们证明

(a) (2)到(4)对正则性来说是必要的，

(b) 对于正则性(2)到(4)又是充分的。

详细证明如下。

(a) 假设A—方法是正则的。命x_k的第k项为1，其余各项为0。对于x_k，在(1)式中我们有$\eta_n=\alpha_{nk}$。因x_k是收敛的且极限是0，这表明(2)式必成立。

而且，$x=(1,1,1,\cdots)$的极限为1。从(1)式我们看出η_n现在等于(3)式中的级数。因而，(3)式必成立。

我们证明，（4）式对正则性是必要的。命 c 是一切收敛序列的 Banach 空间，其中范数定义为

$$\|x\|=\sup_j|\xi_j|,$$

见1.5-3。在c上定义线性泛函 f_{nm}

$$(5)\quad f_{n,m}(x)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{nk}\xi_k\ \ m,n=1,2,\cdots$$

每一个 f_{nm} 都是有界的，因为

$$|f_{nm}(x)|\leqslant\sup_j|\xi_j|\sum_{k=1}^{m}|\alpha_{nk}|=\left(\sum_{k=1}^{m}|\alpha_{nk}|\right)\|x\|.$$

正则性蕴含（1）式中级数对一切 $x\in c$ 的收敛性。因此，在 c 上，（1）式定义了线性泛函f_1，f_2，…为

$$(6)\quad \eta_n=f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\xi_k,\ \ n=1,2,\cdots.$$

从（5）式我们看出，对一切 $x\in c$，当 $m\to\infty$ 时，$f_{mn}(x)\to f(x)$。这是弱*收敛，且由引理 4.9-5（取 $T_n=f_n$）f_n 是有界的。又，$(f_n(x))$对一切 $x\in c$ 收敛，故由推论 4.9-7（$\|f_n\|$）是有界的，比如说

$$(7)\quad \|f_n\|\leqslant\gamma\ \text{对一切}\ n.$$

对任意固定的 $m\in N$ 定义

$$\xi_k^{(n,m)}=\begin{cases}|\alpha_{nk}|/\alpha_{nk}, & \text{如果}\ k\leqslant m\ \text{且}\ \alpha_{nk}\neq0,\\ 0, & \text{如果}\ k>m,\ \text{或}\alpha_{nk}=0.\end{cases}$$

那末，我们有 $x_{nm}=(\xi_k^{(n,m)})\in c$。又，如果 $x_{nm}\neq0$，$\|x_{nm}\|=1$；如果 $x_{nm}=0$，$\|x_{nm}\|=0$。而且对一切 m

$$f_{nm}(x_{nm})=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{nk}\xi_k^{(n,m)}=\sum_{k=1}^{m}|\alpha_{nk}|\ .$$

因此

$$(8)\qquad \begin{aligned}&(a)\quad \sum_{k=1}^{m}|\alpha_{nk}|=f_{nm}(x_{nm})\leqslant\|f_{nm}\|,\\&(b)\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|\leqslant\|f_n\|.\end{aligned}$$

这证明(4)式中的级数收敛，且(4)式从(7)式得出。

(b) 我们证明，对正则性来说(2)到(4)是充分的。我们在c上定义线性泛函f

$$f(x)=\xi=\lim_{k\to\infty}\xi_k,$$

这里，$x=(\xi_k)\in c$。f的有界性可以从

$$|f(x)|=|\xi|\leqslant\sup_j|\xi_j|=\|x\|$$

看出。设$M\subset c$是从某一项起它的项全部相等的一切序列的集，比如说，$x=(\xi_k)$，这里

$$\xi_j=\xi_{j+1}=\xi_{j+2}=\cdots=\xi,$$

且j依赖于x。那末，如象上面的，$f(x)=\xi$，且在(1)式和(6)式中我们得

$$\eta_n=f_n(x)=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{nk}\xi_k+\xi\sum_{k=j}^{\infty}\alpha_{nk}$$

$$=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{nk}(\xi_k-\xi)+\xi\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}.$$

因此，由(2)式和(3)式，

$$(9)\qquad \eta_n=f_n(x)\to 0+\xi\cdot 1=\xi=f(x)\text{ 对每个 }x\in M.$$

我们要再次利用推论4.9-7。因此，我们下面证明M是在c中稠密的，(其上有按(9)式表示的收敛性)。设$x=(\xi_k)\in c$，$\xi_k\to\xi$。

那末，对每个$\varepsilon>0$，存在一个N使其

$$|\xi_k-\xi|<\varepsilon \quad \text{当 } k>N \text{时。}$$

显然，

$$\tilde{x}=(\xi_1, \cdots, \xi_{N-1}, \xi, \xi, \xi, \cdots)\in M,$$

且

$$x-\tilde{x}=(0, \cdots, 0, \xi_N-\xi, \xi_{N+1}-\xi, \cdots).$$

于是得出$\|x-\tilde{x}\|\leqslant\varepsilon$。因为，$\varepsilon$是任意的，这证明，$M$在$c$中稠密。

最后，由(4)式，

$$|f_n(x)|\leqslant\|x\|\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|\leqslant\gamma\|x\|$$

对每个$x\in c$及一切n成立。因此，$\|f_n\|\leqslant\gamma$，即是，$(\|f_n\|)$是有界的。而且，(9)式意味着对稠密子集M中的一切x，$f_n(x)\to f(x)$成立。由推论4.9-7，这蕴含弱*收敛性：$f_n\xrightarrow{W^*}f$。于是，我们证明了，如果$\xi=\lim\xi_k$存在，则得出$\eta_n\to\xi$。根据定义，这意味着正则性，于是定理得证。▌

习　　题

1. **Cesàro 可和性方法 C_1** 定义为

$$\eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n) \qquad n=1,2,\cdots,$$

即是，取算术平均值。求相应的矩阵A。

2. 应用习题1中的C_1求和法于序列

$$(1,0,1,0,10,\cdots)\text{和}\left(1,0,-\frac{1}{4},-\frac{2}{8},-\frac{3}{16},-\frac{4}{32},\cdots\right).$$

3. 在习题1中，用(η_n)表示(ξ_n)。求使其$(\eta_n)=(1/n)$的(ξ_n)。

4. 利用习题中3的公式去获得非C_1-可和序列。

5. Hölder 可和性方法H_p定义如下。H_1同于习题 1 中的C_1。相继两次应用H_1而得H_2，即是，先取算术平均值，然后再取这些平均值的算术平均值，H_3是相继三次应用H_1而得的，等等。应用 H_1，H_2于序列（1，$-3,5,-7,9,-11,\cdots$）。试评论其结果。

6. （级数）无穷级数叫做A-可和的，如果它的部分和序列是A-可和的，且序列的A-极限叫做级数A-和。证明，$1+z+z^2+\cdots$，当$|z|=1,z\neq1$时，它是C_1-可和的，且C_1-和是$1/(1-z)$。

7. （Cesáro C_k-方法）给定（ξ_n）。设$\sigma_n^{(0)}=\xi_n$且

$$\sigma_n^{(k)}=\sigma_0^{(k-1)}+\sigma_1^{(k-1)}+\cdots+\cdots\sigma_n^{(k-1)}\quad(k\geqslant1,\ n=0,1,2,\cdots)$$

如果，对固定的$k\in N$，我们有$\eta_n^{(k)}=\sigma_n^{(k)}/\binom{n+k}{k}\to\eta$，我们说($\xi_n$)是$C_k$-可和的，且有$C_k$-极限$\eta$。说明。此方法有其优点，即$\sigma_n^{(k)}$可以用$\xi_j$以非常简单的方式表示出来，即

$$\sigma_n^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+k-1-\nu}{k-1}\xi_\nu.$$

8. Euler 方法. 与给定的级数

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j\ \text{对应一变换了的级数}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}},$$

这里，

$$\Delta^0 a_j=a_j,\ \Delta^n a_j=\Delta^{n-1}a_j-\Delta^{n-1}a_{j+1},\ j=1,2,\cdots,$$

且$(-1)^j$是为了方便而记成这样的（因此，a_j不必是正的）。可以证明，这个方法是正则的，于是所给级数的收敛性蕴含变换后的级数的收敛性，且其和数相同。证明此方法给出

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots$$

$$=\frac{1}{1.2^1}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{4.2^4}+\cdots.$$

9. 证明，习题 8 中的 Euler 方法给出

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1.2}{3.5}+\frac{1.2.3}{3.5.7}+\cdots\right).$$

10. 证明，Euler 方给出下面的结果。试评论下之结果。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n.$$

4.11 数值积分和弱*收敛

弱*收敛常常应用于数值积分，差分和插值理论，在这一节中，我们考察数值积分，即是，对所给的积分

$$\int_a^b x(t)\,dt$$

求其近似值的问题。因为这一问题在应用中很重要，为了计算上述积分的近似值，建立了许多种方法，例如，梯形法则，Simpson法则，以及更复杂的 Newton-Cotes 和 Gauss 公式（作为某些基本事实的复习，见本节末的习题）。

不管哪一种方法，其共同的实质在于，首先在$[a, b]$中选出一些点，叫做节点；然后用节点处的值的线性组合逼近积分的未知值。这些节点和线性组合的系数依赖于方法而不依赖于被积函数x。当然，方法的实用性很大程度取决于其精确度。所要求的精确度随节点数量的增加而提高。

在这一节中，我们将看到泛函分析常常可以为我们的目的提供帮助。事实上，我们将讨论这些方法的一般框架，并考察随节点数目的增加的收敛问题。

我们将涉及到的是连续函数。这就是说在$J=[a,b]$上引进由一切连续实值函数构成的Banach空间$X=C[a,b]$，其范数定义为

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|.$$

那末，上面的定积分定义了X上的一线性泛函

$$(1)\qquad f(x)=\int_a^b x(t)\,dt.$$

为了得到关于数值积分的公式，我们可以如象前面叙述的方法那

样进行。于是，对每个正整数 n，我们选择 $n+1$ 个实数

$$t_0^{(n)}, \cdots, t_n^{(n)} \quad (\text{叫做节点})$$

使其

$$(2) \quad a \leqslant t_0^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leqslant b.$$

然后，我们选择 $n+1$ 个实数

$$\alpha_0^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)} \quad (\text{叫做系数}),$$

在 X 上定义线性泛函 f_n 为

$$(3) \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \qquad n=1,2,\cdots.$$

这就定义了积分的一个数值程序，值 $f_n(x)$ 是 $f(x)$ 的一个逼近，这里，x 是给定的．为了找出该程序的精确度，转而考察诸 f_n 如下．

每个 f_n 是有界的，因为，由范数的定义，$|x(t_k^{(n)})| \leqslant \|x\|$。因而

$$(4) \quad |f_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \, |x(t_k^{(n)})| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|\right) \|x\|.$$

为了后面的应用，我们证明 f_n 具有范数

$$(5) \quad \|f_n\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|.$$

事实上，(4)式表明，$\|f_n\|$ 不可能超过(5)式的右端，且如果取 $x_0 \in X$ 使其在 J 上 $|x_0(t)| \leqslant 1$ 且

$$x_0(t_k^{(n)}) = \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \alpha_k^{(n)} \geqslant 0 \\ -1, & \text{如果 } \alpha_k^{(n)} < 0 \end{cases}$$

那末，$\|x_0\| = 1$ 和

$$f_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|.$$

所以，(5)式等号成立.

对给定的$x\in X$，公式(3)产生(1)式中$f(x)$的一个逼近$f_n(x)$. 当然，我们有兴趣的是前面所说的精确度，即要求精确度随n的增加而提高. 这就提出了下述概念

4.11-1 定义(收敛性) 由(3)式定义的数值积分程序对x叫做收敛的，如果，对此x，

(6) $f_n(x)\to f(x) \qquad (n\to\infty)$,

这里，f是由(1)式定义的.

而且，因为多项式积分的精确值是容易得到的，自然要作如下的要求.

4.11-2 必要条件 对每个n，如果x是次数不超过n的多项式，那末

(7) $f_n(x)=f(x)$.

因为，f_n是线性的，只要对$n+1$个幂函数

$$x_0(t)=1,\ x_1(t)=t,\ \cdots,\ x_n(t)=t^n$$

满足(7)式就够了. 事实上，对n次多项式$x(t)=\sum\beta_j t^j$，我们得出

$$f_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\beta_j f_n(x_j)=\sum_{j=0}^{n}\beta_j f(x_j).$$

我们看出，于是有$n+1$个条件

(8) $f_n(x_j)=f(x_j) \quad j=0,\cdots,n.$

我们证明，这些条件可以得到满足，这里，参数为$2n+2$个，换言之，$n+1$个节点和$n+1$个系数. 因此，它们中间的某些个

可以任意加以选择。让我们选择节点 $t_k^{(n)}$，再让我们证明，可以唯一地确定那些系数。

在(8)式中，现在有 $x_j(t_k^{(n)})=(t_k^{(n)})^j$，于是(8)式成为

$$(9)\quad \sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}(t_k^{(n)})^j=\int_a^b t^j dt=\frac{1}{j+1}\left(b^{j+1}-a^{j+1}\right),$$

这里，$j=0, 1, \cdots, n$。对每个固定的 n，这是 $n+1$ 个未知数，$\alpha_0^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)}$ 的 $n+1$ 个线性方程的非齐次方程组。唯一解存在，如果相应的齐次方程组

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k^{(n)})^j\gamma_k=0\quad(j=0, \cdots, n)$$

仅有平凡解 $\gamma_0=0, \cdots, \gamma_n=0$，或者等于说，方程组

$$(10)\quad \sum_{j=0}^{n}(t_k^{(n)})^j\gamma_j=0\quad(k=0, \cdots, n)$$

仅有平凡解。此方程组的系数矩阵是前一方程组系数矩阵的转置。这一事实是成立的，因为，(10)式意味着 n 次多项式

$$\sum_{j=0}^{n}\gamma_j t^j$$

在 $n+1$ 个节点处是零，因此，它必定恒为零，即是，它的全部系数都是零。

我们的结果是，对每选择一组满足(2)式的节点，存在唯一确定的一组系数使4.11-2成立。因此，相应的过程对一切多项式是收敛的，现在要附加什么样的条件才能使过程对[a, b]上一切实值连续函数收敛。相应的准则已由 G. Pólya (1933) 给了出来。

4.11-3 Pólya 收敛定理（数值积分） 满足 4.11-2 的数值积分过程 (3) 对一切在$[a, b]$上的实值连续函数收敛当且仅当存在数c使其

$$(11)\quad \sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|\leqslant c \text{ 对一切}n\text{成立。}$$

证明。根据 Weierstrass 逼近定理（证明在下面），实系数多项式全体之集W在实空间$X=C[a, b]$中稠密，且对每个$x\in W$，根据4.11-2收敛性成立。从(5)式我们看出，$(\|f_n\|)$是有界的当且仅当对某个实数c，(11) 式成立。于是从推论 4.9-7，定理得证，因为，对一切$x\in X$ $f_n(x)\to f(x)$，是弱* 收敛：$f_n \xrightarrow{w^*} f$。

显然，在此定理中，可以用另外的在实空间$C[a, b]$中稠密的集来代替一切多项式之集。

而且，在大量的积分法中系数全是非负的。这时，取$x=1$，根据 4.11-2，那末我们有

$$f_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|=f(1)=\int_a^b dt=b-a.$$

于是(11)成立。这就证明了

4.11-4 Steklov 定理（数值积分） 满足4.11-2且一切系数$\alpha_k^{(n)}$非负的数值积分过程(3)对每个连续函数收敛。

在4.11-3的证明中我们用了

4.11-5 Weierstrass 逼近定理（多项式） 一切实系数多项式之集W在实空间中稠密。

因此，对每个 $x\in C[a, b]$和给定的 $\varepsilon>0$，存在一多项式 p，使其$|x(t)-p(t)|<\varepsilon$，对一切 $t\in[a, b]$。

证明．因为J是紧区间，对每个 $x\in C[a, b]$，在$[a, b]$上是一致连续的。因此，对任意 $\varepsilon>0$，存在有y，其图形为一折线弧且使

(12) $\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|<\varepsilon/3$。

首先假设 $x(a)=x(b)$ 和$y(a)=y(b)$。因为 y 是逐段线性且连续的，它的Fourier系数有这样的界：$|a_0|<k$，$|a_m|<k/m^2$，$|b_m|<K/m^2$。应用部分积分法于a_m 和 b_m 的公式可以看出这一结果（见3.5-1，那里，$[a, b]=[0, 2\pi]$）。（也可以参看本节末的习题10），因此，关于 y的Fourier 级数，（表示 y 按周期为 $b-a$的周期延拓）为了简化起见，记 $\kappa=2\pi/(b-a)$，我们有

$$
(13)\quad \left|a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos\kappa mt+b_m\sin\kappa mt)\right|
$$

$$
\leqslant 2k\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)=2k\left(1+\frac{1}{6}\pi^2\right)。
$$

这就证明级数在 J 上一致收敛。因而，当 n 充分大时，第 n 个部分和s_n，有

(14) $\max_{t\in J}|y(t)-s_n(t)|<\varepsilon/3$。

s_n 中的 cosine 和 sine 函数的 Taylor 级数在 J 上也是一致收敛的，于是存在多项式 p（例如，由这些级数的适当的部分和得出）使其

$$
\max_{t\in J}|s_n(t)-p(t)|<\varepsilon/3。
$$

由此式，(12)，(14)式和

$$
|x(t)-p(t)|\leqslant|x(t)-y(t)|+|y(t)-s_n(t)|
$$

$$+|s_n(t)-p(t)|$$

我们有

(15) $$\max_{t\in J}|x(t)-p(t)|<\varepsilon.$$

注意以上讨论要求每一个 $x\in C[a,\ b]$满足$x(a)=x(b)$.如果 $x(a)\neq x(b)$，取 $u(t)=x(t)-\gamma(t-a)$，且数γ使得$u(a)=u(b)$.那末，对u存在多项式q在$[a,\ b]$上满足$|u(t)-q(t)|<\varepsilon$. 因为，$x-p=u-q$故 $p(t)=q(t)+\gamma(t-a)$满足(15)式，又因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，我们证明了W在$C[a,\ b]$中是稠密的.

定理的第一个证明是 K. Weierstrass (1885) 给出的。还有许多其他的证明. 例如 S. N. Bernstein (1912) 给出了一个证明，他明确地作出了由x表出的一致收敛的多项式序列(Bernstein 多项式). Bernstein 的证明在 K. Yosida(1885), pp. 8-9中可以找到.

习　　题

1. 矩形法则（图45）是

$$\int_a^b x(t)dt\approx h[x(t_1^*)+\cdots+x(t_n^*)],\quad h=\frac{b-a}{n},\text{这里},t_k^*=a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h.$$

这个公式是如何得出来的？节点和系数是什么？如何能得到关于用公式给出的逼近值的误差界？

2. 梯形法则是（图46）

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)dt\approx\frac{h}{2}(x_0+x_1)\qquad h=\frac{b-a}{n}$$

或者

$$\int_a^b x(t)dt\approx h\left(\frac{1}{2}x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{1}{2}x_n\right),$$

这里，$x_k=x(t_k)$ 和 $t_k=a+kh$. 如果我们用逐段线性的函数去逼近 x，解释

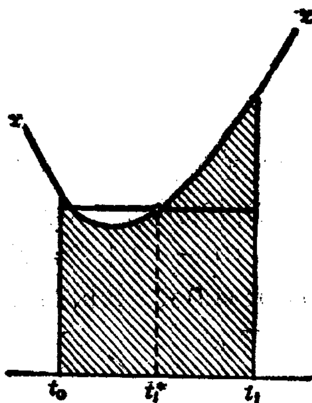


图45　矩形法则

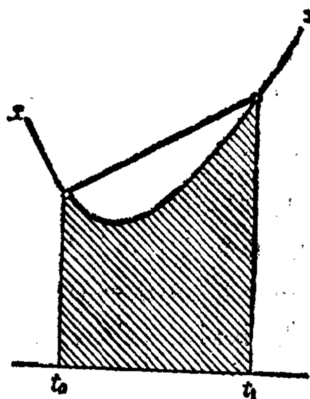


图46　梯形法则

怎样得到这个公式。

3. Simpson 法则是（图47）

$$\int_{t_0}^{t_2} x(t)dt \approx \frac{h}{3}(x_0+4x_1+x_2) \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

或者

$$\int_a^b x(t)dt \approx \frac{h}{3}(x_0+4x_1+2x_2+\cdots+4x_{n-1}+x_n)$$

这里，n 是偶数，$x_k=x(t_k)$ 且 $t_k=a+kh$。证明，如果用在 t_0, t_1, t_2 处的值等于 $x(t)$ 在这些点处的值的二次多项式，在$[t_0, t_2]$上去逼近 x，就得出这些公式来。类似地，在$[t_2, t_4]$上，等等，

4. 设 $f(x)=f_n(x)-e_n(x)$，这里，f_n 是用梯形法则得到的逼近。证明，对任意二阶连续可微函数 x，我们有误差界

$$k_n m_2^* \leqslant e_n(x) \leqslant k_n m_2, \text{这里，} k_n=\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

和 m_2，m_2^* 是 x'' 在$[a, b]$上的极大值和极小值。

5. Simpson 法则广泛用于实际问题中。为了获得精确度增加方面的感性知识，对积分

$$I=\int_0^1 e^{-t^2}dt$$

取 $n=10$，同时应用梯形法则和 Simpson 法则，并将所得的值

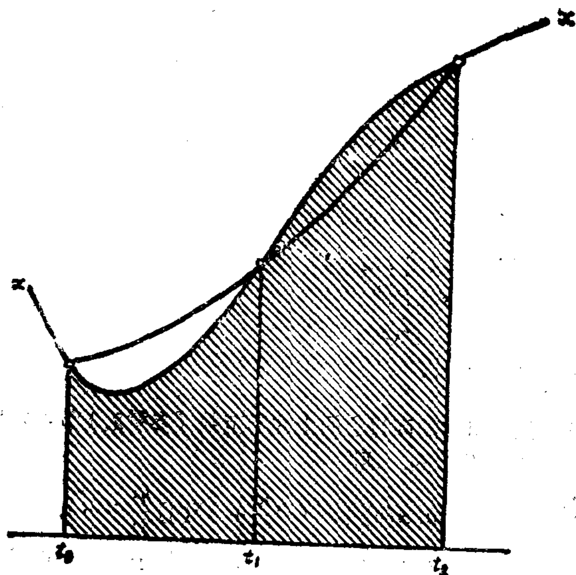


图47 Simpson 律

$$0.746211 \quad 与 0.746825$$

同精确值 0.746824（精确到小数点后第6位）比较。

t	e^{-t^2}	t	e^{-t^2}
0	1.000000	0.6	0.697676
0.1	0.990050	0.7	0.612626
0.2	0.960789	0.8	0.527292
0.3	0.913931	0.9	0.444858
0.4	0.852144	1.0	0.367879
0.5	0.778801		

6. 利用习题4，证明，在习题5中0.746211的误差界是−0.001667和0.000614，于是

$$0.745597 \leqslant I \leqslant 0.747878.$$

7. 八分之三法则 是

$$\int_{t_0}^{t_3} x(t)dt \approx \frac{3}{8}h(x_0+3x_1+3x_2+x_3)$$

这里，$x_k=x(t_k)$和$t_k=a+kh$。如果用在节点t_0, t_1, t_2, t_3处取值与$x(t)$在这些点处取值相同的三次多项式在$[t_0, t_3]$上逼近$x(t)$时，就得出这个公式来（在 2，3，7 题中之法则是 Newton-Cotes 公式序列的前三项）

8. 考察积分公式

$$\int_{-h}^{h} x(t)dt = 2hx(0)+r(x).$$

这里，r是误差。假设$x \in C^1[-h, h]$，即是，x在$J=[-h, h]$是连续可微的。证明，误差可由下式估计

$$|r(x)| \leqslant h^2 p(x),$$

这里，$p(x)=\max_{t \in J}|x'(t)|$。

证明，p是这种函数组成的向量空间上的半范数（参看2.3 节习题12）。

9. 如果x是实解析的，证明

$$(16) \quad \int_{-h}^{h} x(t)dt = 2h\left(x(0)+x''(0)\frac{h^2}{3!}+x^{\text{IV}}(0)\frac{h^4}{5!}+\cdots\right).$$

假设对形如$2(\alpha_{-1}x(-h)+\alpha_0 x(0)+\alpha_1 x(h))$的积分逼近表示式，确定$\alpha_{-1}$，$\alpha_0$，$\alpha_1$，使得尽可能多的幂项 h，h^2，…同(16)式一致．证明，这时就给出 Simpson 法则

$$\int_{-h}^{h} x(t)dt \approx \frac{h}{3}(x(-h)+4x(0)+x(h)).$$

这个推导证明了对三次多项式这一规律是精确的，为什么？

10. 在 Weierstrass 逼近定理的证明中，我们用了连续逐段线性函数的Fourier 系数的界。那些界是如何得到的？

4.12 开映象定理

我们讨论了 Haha-Banach 定理和一致有界性定理。本节中将讨论第三个“大”定理，开映象定理。这将涉及开映象，即使开集的象为开集的那种映象（定义在下面）。回忆一下开集(见1.3 节）的一些重要的结果，我们会明白，开映象有着普遍的兴趣。说得更明确些，在开映象定理表述的条件下，有界线性

算子是开映象。与在一致有界性定理中一样，我们仍然要求空间的完备性。本定理展示了Banach 空间比之于非完备赋范空间更使人感到满意之又一原因。定理也给出了有界线性算子的逆算子有界的条件。开映象定理基于 4.7 节中叙述的 Baire 纲定理。

4.12-1定义　(开映象)　设X和Y都是度量空间，那末，映象$T:\mathscr{D}(T)\to Y$，$\mathscr{D}(T)\subset X$，叫做开映象，如果$\mathscr{D}(T)$中每一开集，其象是Y中的开集。▌

注意，如果映象不是满射，必须注意以下提法之间的差别，即映象是把它的定义域映到

(a)　Y中，

(b)　它的值域之上

的开映象。

(b)比(a)更弱些。例如，如果$X\subset Y$，X到Y中的映象$x\mapsto x$是开的当且仅当X是Y的开子集，但是，X到它的值域（仍是X）的映象$x\mapsto x$总是开映象。

而且，为了避免混淆，我们应该回忆一下，由定理1.3-4，连续映象$T:X\to Y$具有性质：对Y中的每一开集，其逆象是X中的开集。这并不蕴含T映X中的开集到Y中之一开集上。例如，由$t\mapsto \sin t$给出的映象$R\to R$是连续的但映$(0, 2\pi)$到$[-1, 1]$上。

4.12-2　开映象定理·有界逆定理　从Banach空间X到Banach空间Y上的有界线性算子T是开映象。因此，如果T是双射，T^{-1}是连续的，于是，是有界的。

证明易从下面的引理得出来。

4.12-3 引理(开单位球) 从 Banach 空间X到 Banach 空间Y上的有界线性算子T具有性质：开单位球$B_0=B(0; 1)\subset X$的象$T(B_0)$含有以$0\in Y$为中心的一开球

证明。我们依下面的步骤进行证明：

(a) 开球$B_1=B\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$的象的闭包含有一开球$B^*$.

(b) $\overline{T(B_n)}$含有以$0\in Y$为中心的一开球V_n，这里，$B_n=B(0; 2^{-n})\subset X$.

(c) $T(B_0)$含有以$0\in Y$为中心的一开球.

详细证明如下.

(a) 关于子集$A\subset X$，记号αA(α为一数）和$A+w$ $(w\in X)$表示

(1) $\alpha A=\{x\in X \mid x=\alpha a, a\in A\}$（图48）.

(2) $A+w=\{x\in X \mid x=a+w, a\in A\}$（图49）. 对$Y$的子集也有类似的记号.

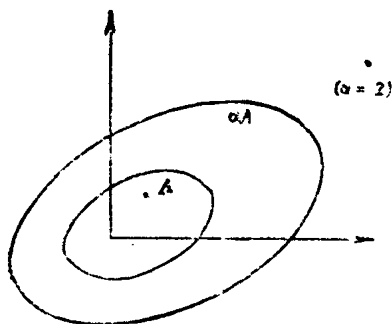


图48 公式(1)的说明

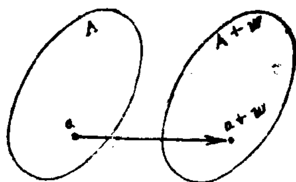


图49 公式(2)的说明

我们考察开球$B_1=B\left(0; \dfrac{1}{2}\right)\subset X$. 任意固定的$x\in X$，实数$k$充分大时（$k>2\|x\|$），$x$在$kB_1$中。因此，

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1.$$

因为T是满射和线性的，

(3) $Y=T(X)=T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1)=\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(B_1)}.$

注意，取闭包不会对和集增加更多的点，因为，和集已是全空间Y了。因为Y是完备的，根据 Baire 纲定理4.7-2。它在自身中是非贫集，因此，注意(3)式是类似于4.7-2中的(1)式的，我们断定，$\overline{kT(B_1)}$必包含某一球。这蕴含$\overline{T(B_1)}$也包含一开球，比如说，$B^*=B(y_0;\ \varepsilon)\subset\overline{T(B_1)}$。于是得出

(4) $B^*-y_0=B(0;\ \varepsilon)\subset\overline{T(B_1)}-y_0.$

(b) 我们证明$B^*-y_0\subset\overline{T(B_0)}$，这里，$B_0$是在定理中给的。为此，只需证明[参看(4)]

(5) $\overline{T(B_1)}-y_0\subset\overline{T(B_0)}$.

设 $y\in\overline{T(B_1)}-y_0$。那末，$y+y_0\in\overline{T(B_1)}$，且注意$y_0\in\overline{T(B_1)}$。由1.4-6($a$)，存在

$$u_n=Tw_n\in T(B_1) \text{ 使其 } u_n\to y+y_0,$$
$$v_n=Tz_n\in T(B_1) \text{ 使其 } v_n\to y_0.$$

因为w_n，$z_n\in B_1$且B_1的半径为$\frac{1}{2}$，于是得出

$$\|w_n-z_n\|\leqslant\|w_n\|+\|z_n\|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

从而，$w_n-z_n\in B_0$。从

$$T(w_n-z_n)=Tw_n-Tz_n=u_n-v_n\to y$$

我们看出$y\in\overline{T(B_0)}$。因为$y\in\overline{T(B_1)}-y_0$是任意的，这就证明了(5)式。从(4)式，于是我们有

(6) $B^*-y_0=B(0;\varepsilon)\subset\overline{T(B_0)}.$

设 $B_n=B(0;2^{-n})\subset X$。因为T是线性的，$\overline{T(B_n)}=2^{-n}\overline{T(B_0)}$。由(6)式，于是我们得

(7) $V_n=B(0;\varepsilon/2^n)\subset\overline{T(B_n)}$。

(c) 最后我们通过证明每一个 $y\in V_1$ 都在$T(B_0)$中来。证明

$$V_1=B\left(0;\frac{1}{2}\varepsilon\right)\subset T(B_0)$$

于是命 $y\in V_1$。由(7) 式中$n=1$，有$V_1\subset\overline{T(B_1)}$。因此 $y\in\overline{T(B_1)}$。根据 1.4-6(a)，一定存在$v\in T(B_1)$与y充分接近，比如说，$\|y-v\|<\varepsilon/4$。现 $v\in T(B_1)$ 蕴含 $v=Tx_1$，对某个 $x_1\in B_1$。因此

$$\|y-Tx_1\|<\varepsilon/4.$$

由此和 $n=2$ 时的(7)式，我们看出 $y-Tx_1\in V_2\subset\overline{T(B_2)}$。如同前面一样，我们断定存在有 $x_2\in B_2$，使其

$$\|(y-Tx_1)-Tx_2\|<\varepsilon/8.$$

因此，$y-Tx_1-Tx_2\in V_3\subset\overline{T(B_3)}$，如此等等。在第$n$步，我们可以选择一个 $x_n\in B_n$ 使其

(8) $$\left\|y-\sum_{k=1}^{n}Tx_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

命 $z_n=x_1+\cdots+x_n$。因为 $x_k\in B_k$，我们有$\|x_k\|<1/2^k$。当$n>m$时，这就给出

$$\|z_n-z_m\|\leqslant\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|<\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\to 0$$

当$m\to\infty$时。因此，(z_n)是 Cauchy 序列。(z_n) 收敛，比如说 $z_n\to x$，因为X是完备的。又$x\in B_0$，因为 B_0 的半径为 1 且

(9) $$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1.$$

因为 T 是连续的，$Tz_n \to Tx$，于是(8)证明 $Tx=y$。因此，$y \in T(B_0)$。

定理 4.12-2的证明 我们证明，对每一开集 $A \subset X$，象 $T(A)$ 在 Y 中是开的。这能办到，通过证明对每一 $y=Tx \in T(A)$，集 $T(A)$ 包含以 $y=Tx$ 为中心的一开球。

设 $y=Tx \in T(A)$。因为 A 是开的，它包含中心为 x 的一开球。因此，$A-x$ 包含一中心为 0 的开球；设该球之半径是 r 且命 $k=1/r$，于是 $r=1/k$。那末 $k(A-x)$ 包含开单位球 $B(0;1)$。引理 4.12-3 现在蕴含 $T(k(A-x))=k[T(A)-Tx]$ 包含中心在 0 的一开球，且 $T(A)-Tx$ 亦包含中心在 0 的一开球。因此，$T(A)$ 包含中心在 $Tx=y$ 的一开球。因 $y \in T(A)$ 是任意的，于是 $T(A)$ 是开的。

最后，如果 $T^{-1}: Y \to X$ 存在，根据1.3-4 因为 T 是开的，故 T^{-1} 是连续的。根据定理2.6-10，因 T^{-1} 是线性的，由定理2.7-9，它是有界的。

习 题

1. 由 $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1)$ 定义的 $T: R^2 \to R$ 是开的。由 $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, 0)$ 的映象 $R^2 \to R^2$ 是否是开映象？

2. 证明，开映象不必映闭集到闭集上。

3. 推广(1)和(2)式，我们可以定义

$$A+B=\{x \in X \mid x=a+b,\ a \in A,\ b \in B\},$$

这里，$A, B \subset X$。为了熟悉这些概念，求 αA，$A+w$，$A+A$，这里，$A=\{1,2,3,4\}$。其图示见图50。

4. 证明，在(9)式中不等式是严格不等式。

5. 设 X 是赋范空间，其中的点是仅有有限多项非零的复数序列 $x=(\xi_j)$，其上的范数定义为 $\|x\|=\sup_j |\xi_j|$。命 $T: X \to X$ 定义为

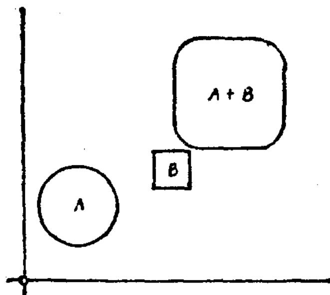


图50 平面中之集A,B和$A+B$

$$y=Tx=\left(\xi_1,\ \frac{1}{2}\xi_2,\ \frac{1}{3}\xi_3,\ \cdots\right).$$

试证明，T是线性的和有界的，但T^{-1}无界。这同4.12-2矛盾吗?

6． 设X和Y是 Banach 空间且$T:X\to Y$是内射有界线性算子。证明，$T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to X$ 是有界的当且仅当$\mathscr{R}(T)$在Y中是闭的。

7． 设$T:X\to Y$是有界线性算子，这里，X和Y是 Banach 空间。如果T是双射，证明，存在正实数a和b使其$a\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant b\|x\|$，对一切$x\in X$。

8． （等价范数）命$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是向量空间X上的范数，使其$X_1=(X,\|\cdot\|_1)$和$X_2=(X,\|\cdot\|_2)$是完备的。如果$\|x_n\|_1\to 0$恒蕴含$\|x_n\|_2\to 0$，证明，X_1中的收敛蕴含X_2中的收敛，反之亦然，且存存正数a和b使其对一切$x\in X$

$$a\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant b\|x\|_1 .$$

（注：于是这些范数是等价的；见定义2.4-4）

9． 设$X_1=(X,\|\cdot\|_1)$和$X_2=(X,\|\cdot\|_2)$是 Banach 空间。如果存在有常数c使$\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2$，对一切$x\in X$，证明，存在有常数$k$使$\|x\|_2\leqslant k\|x\|_1$，对一切$x\in X$（于是这两个范数是等价的；参看定义2.4-4）。

10．从1.3节知道，度量空间X的一切开子集之集$\mathscr{T}$叫做X的拓扑，因而，向量空间X上每一范数定义了X上的拓扑。如果在X上我们有两种范数使$X_1=(X,\|\cdot\|_1)$和$X_2=(X,\|\cdot\|_2)$是Banach空间且用$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$定义的拓扑$\mathscr{T}_1$和$\mathscr{T}_2$满足$\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}_2$，证明$\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2$。

4.13 闭线性算子，闭图象定理

并非全部实际重要的线性算子都是有界的．例如，2.7-5中的微分算子就是无界的．在量子力学和其它一些应用中，人们常常需要无界的算子．然而，实际上，分析数学工作者乐于使用的所有线性算子是所谓闭线性算子．这就值得对这些算子作一个介绍．在这一节中，我们在赋范空间上定义闭性算子，并研究它的某些性质，特别与之相关的重要的闭图象定理．该定理叙述了在Banach空间上的闭线性算子有界的充分条件．

闭线性算子的更详细的研究和Hilbert空间中的无界算子叙述在第10章中，应用于量子力学的叙述在第11章中．

让我们从定义开始．

4.13-1 定义（闭线性算子） 设X和Y是赋范空间，$T:\mathscr{D}(T)\to Y$是具定义域$\mathscr{D}(T)\subset X$的线性算子．那末，T叫做闭线性算子，如果它的图象$\mathscr{G}(T)$在赋范空间$X\times Y$中是闭的，

$$\mathscr{G}(T)=\{(x,y)\mid x\in\mathscr{D}(T),y=Tx\}$$

这里，向量空间的两种代数运算在$X\times Y$中如像通常那样定义，即是，

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2),$$

$$\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y),$$

（α是数）且范数定义为

（1） $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$[①]．

在什么条件下闭线性算子是有界的呢？答案由下面的重要定理给出．

---

① 关于另外的范数，见习题2．

4.13-2 闭图象定理 X和Y是Banach空间且$T:\mathscr{D}(T)\to Y$是闭线性算子，这里，$\mathscr{D}(T)\subset X$。那末，如果$\mathscr{D}(T)$在X中闭，则算子T是有界的。

证明。首先证明，按(1)定义范数，$X\times Y$是完备的。设(z_n)是$X\times Y$中的Cauchy序列，这里，$z_n=(x_n,y_n)$。那末，对每个$\varepsilon>0$，存在N，使其

$$(2)\quad \|z_n-z_m\|=\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|<\varepsilon\ (m,n>N)。$$

因此，(x_n)和(y_n)分别是X和Y中的Cauchy序列，由于X和Y是完备的，它们收敛，比如说，$x_n\to x$和$y_n\to y$。这就蕴含$z_n\to z=(x,y)$，因为，从(2)式，命$m\to\infty$，有$\|z_n-z\|\leqslant\varepsilon$，当$n>N$。因为，Cauchy序列$(z_n)$是任意的，故$X\times Y$是完备的。

根据假设，$\mathscr{G}(T)$在$X\times Y$是闭的，和$\mathscr{D}(T)$在X中是闭的。因此$\mathscr{G}(T)$和$\mathscr{D}(T)$由1.4-7是完备的。我们现在考察映象

$$P:\mathscr{G}(T)\to\mathscr{D}(T)$$
$$(x,Tx)\mapsto x。$$

P是线性的。P是有界的，因为

$$\|P(x,Tx)\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,Tx)\|。$$

P是双射。事实上，逆映象是

$$P^{-1}:\mathscr{D}(T)\to\mathscr{G}(T)$$
$$x\mapsto(x,Tx)。$$

因为$\mathscr{G}(T)$和$\mathscr{D}(T)$是完备的，我们可以应用有界逆定理4.12-2，得知p^{-1}是有界的，比如说，$\|(x,Tx)\|\leqslant b\|x\|$对某个$b$和一切$x\in\mathscr{D}(T)$。因此，$T$是有界的，因为

$$\|Tx\|\leqslant\|Tx\|+\|x\|=\|(x,Tx)\|\leqslant b\|x\|。$$

对一切$x\in\mathscr{D}(T)$成立。

根据定义，$\mathscr{G}(T)$是闭的当且仅当如果$z=(x,y)\in\overline{\mathscr{G}(T)}$蕴含$z\in\mathscr{G}(T)$。从定理1.4-6(a)我们看出，$z\in\overline{\mathscr{G}(T)}$当且仅当存

在 $z_n=(x_n, Tx_n)\in\mathscr{G}(T)$ 使其 $z_n\to z$，因此

(3) $x_n\to x,\ Tx_n\to y$;

且 $z=(x,y)\in\mathscr{G}(T)$ 当且仅当 $x\in\mathscr{D}(T)$ 且 $y=Tx$。这就证明了下面的一有用准则，它表示的性质常常作为线性算子闭性的定义。

4.13-3 定理（闭线性算子） 设 $T:\mathscr{D}(T)\to Y$ 是线性算子，这里，$\mathscr{D}(T)\subset X$，X和Y是赋范空间。那末，T是闭的当且仅当它具有下面的性质：如果 $x_n\to x$，这里，$x_n\in\mathscr{D}(T)$，且$Tx_n\to y$，那末$x\in\mathscr{D}(T)$且$Tx=y$。

注意，这一性质与下面的有界线性算子的性质是不同的。如果线性算子T是有界的，于是它是连续的，如果(x_n)是 $\mathscr{D}(T)$ 之序列且在 $\mathscr{D}(T)$中收敛，那末，(Tx_n) 也收敛，参看1.4-8。对闭线性算子这个结论不必成立。但是，如果T是闭的，T 的定义域中的二序列(x_n)和$(\tilde{x}_n)$ 收敛于同一极限，且如果相应的序列(Tx_n)和$(T\tilde{x}_n)$都收敛，那末，它们有相同的极限(见习题6)。

4.13-4 例(微分算子) 设$X=C[0,1]$且

$$T:\mathscr{D}(T)\to X$$
$$x\mapsto x'$$

这里，一撇表示微商且 $\mathscr{D}(T)$是连续可微函数$x\in X$ 的子空间。那末，T不是有界的，但是闭的。

证明。从2.7-5看出，T是无界的。我们应用定理4.13-3证明T是闭的。命(x_n) 是$\mathscr{D}(T)$中的使(x_n)和(Tx_n) 都收敛的序列，比如说

$$x_n\to x \quad 和 \quad Tx_n=x_n'\to y.$$

因为，按$C[0,1]$中范数的收敛性是$[0,1]$上的一致收敛性，从 $x_n'\to y$，我们有

$$\int_0^t y(\tau)\,d\tau=\int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(\tau)d\tau=\lim_{n\to\infty}\int_0^t \tau x_n'(\tau)\,d$$
$$=x(t)-x(0).$$

即是，

$$x(t)=x(0)+\int_0^t y(\tau)\,d\tau.$$

这证明 $x\in\mathscr{D}(T)$ 且 $x'=y$。定理 4.13-3蕴含T是闭的。

值得注意的是在本例中，$\mathscr{D}(T)$在X中不闭，因为，否则由闭图象定理，T应该有界。

闭性不蕴含线性算子的有界性，反之，有界性也不蕴含闭性。

证明。第一个结果已由4.13-4得到了证明。反之，有界性也不蕴含闭性，这可用下面的例子说明。设$T:\mathscr{D}(T)\to\mathscr{D}(T)\subset X$表示$\mathscr{D}(T)$上的恒等算子，这里，$\mathscr{D}(T)$是赋范空间$X$的真稠密子空间。那末，显然$T$是线性和有界的。但是，$T$不是闭的。如果取$x\in X-\mathscr{D}(T)$和$\mathscr{D}(T)$中的序列$(x_n)$收敛于$x$，此结论立即从定理4.13-3得出来。

本节中的讨论表明，在处理无界算子时，确定定义域及拓延的问题起着本质的作用。事实的确如此，在第10章中将看到更详细的情况。刚才我们证明的结论有点使我们扫兴。但使我们高兴的是我们有

4.13-5 引理(闭算子) 设$T:\mathscr{D}(T)\to Y$是有界线性算子且$\mathscr{D}(T)\subset X$，这里，X和Y是赋范空间。那末：

(a) 如果$\mathscr{D}(T)$是X的闭子集，那末，T是闭的。

(b) 如果T是闭的且Y是完备的，那末，$\mathscr{D}(T)$是X的闭

子集.

证明. (a) 如果(x_n)在$\mathscr{D}(T)$中且收敛，比如说，$x_n \to x$，并且使(Tx_n)也是收敛的，那末，$x \in \overline{\mathscr{D}(T)} = \mathscr{D}(T)$，因为$\mathscr{D}(T)$是闭的. 又因$T$是连续的，故$Tx_n \to Tx$. 因此，根据定理4.13-3，$T$是闭的.

(b) 对$x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$，存在$\mathscr{D}(T)$中的序列$(x_n)$使其$x_n \to x$；见1.4-6. 因为$T$是有界的，

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqslant \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

这就证明了(Tx_n)是 Cauchy 序列. 因为Y是完备的，故(Tx_n)收敛，比如说，$Tx_n \to y \in Y$. 因为T是闭的，根据4.13-3，$x \in \mathscr{D}(T)$（且$Tx = y$）. 因此，$\mathscr{D}(T)$是闭的，因为$x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$是任意的.

习 题

1. 证明，(1)式定义了$X \times Y$上之一范数.

2. 在赋范空间X和Y的积$X \times Y$上，另外几个经常用到的范数定义为

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$$

和

$$\|(x, y)\|_0 = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}.$$

验证它们是范数.

3. 证明，线性算子$T: X \to Y$之图象$\mathscr{G}(T)$是$X \times Y$的向量子空间.

4. 如果在定义4.13-1中的X和Y是 Banach 空间，证明，$V = X \times Y$按(1)式定义的范数是 Banach 空间.

5. (逆)若闭线性算子的逆T^{-1}存在，证明，T^{-1}是闭线性算子.

6. 设T是闭线性算子. 如果$\mathscr{D}(T)$中两序列(x_n)和$(\tilde{x}_n)$收敛于同一极限x且(Tx_n)和$(T\tilde{x}_n)$同时收敛，证明，(Tx_n)和$(T\tilde{x}_n)$有相同的极限.

7. 从闭图象定理得出定理4.12-2中的第二个结论.

8. 设X和Y是赋范空间，$T: X \to Y$是闭线性算子. (a) 证明，紧子集$C \subset X$的象A在Y中是闭的. (b)证明，紧子集$K \subset Y$的逆象B在X中是闭的（见定义2.5-1）.

9. 如果$T: X \to Y$是闭线性算子，这里，X和Y是赋范空间且Y是紧

的，证明T是有界的。

10. 设X和Y是赋范空间且X是紧的。如果$T: X \to Y$是双射闭线性算子，证明，T^{-1}是有界的。

11. （零空间）闭线性算子$T: X \to Y$的零空间$\mathscr{N}(T)$是X的闭子空间。

12. 设X和Y是赋范空间。如果$T_1: X \to Y$是闭线性算子且$T_2 \in B(X, Y)$，证明，$T_1 + T_2$是闭线性算子。

13. 设T是定义域$\mathscr{D}(T)$在 Banach 空间X中而值域$\mathscr{R}(T)$在赋范空间Y中的闭线性算子。如果T^{-1}存在且有界，证明，$\mathscr{R}(T)$是闭的。

14. 假设级数$u_1 + u_2 + \cdots$的各项是区间$J = [0, 1]$上的连续可微函数且级数在J上一致收敛并有和数x。其次，假设$u_1' + u_2' + \cdots$在J上也一致收敛。证明，x在$(0, 1)$上是连续可微的且$x' = u_1' + u_2' + \cdots$

15. （闭延拓）设$T: \mathscr{D}(T) \to Y$是其图象为$\mathscr{G}(T)$的线性算子，这里，$\mathscr{D}(T) \subset X$，X和Y是Banach空间。试证明T有一延拓$\tilde{T}$，它是具图象$\overline{\mathscr{G}(T)}$的闭线性算子当且仅当$\overline{\mathscr{G}(T)}$不包含形如$(0, y)$的元，这里$y \neq 0$。

第 五 章

进一步的应用：Banach 不动点定理

本章是选读材料，在其余各章中并不使用它。

必须的知识是第一章中的结果（2-4 章也不必要）。于是，本章也可以直接放在第一章之后阅读。

Banach 不动点定理是分析学的各个分支中的存在和唯一性定理的重要基础，在这方面，该定理为统一许多泛函分析方法和分析学中不动点定理的实用性提供了深刻的启示。

主要内容方向提要

Banach 不动点定理或压缩定理 5.1-2 是与完备度量空间到自身中的某些映象（压缩映象，见5.1-1）有关的。压缩定理5.1-2，它表述了不动点（映到自身上的那种点）存在和唯一的充分条件。该定理也提供了一个迭代程序，按此程序可以得出不动点近似值和误差界（见5.1-3）。现考察应用该定理的三个重要领域，即，

线性代数方程（见5.2），

常微分方程（见5.3），

积分方程（见5.4）。

还有另外的应用（例如，偏微分方程），但是，讨论这些内容还需

要更进一步的准备知识。

5.1 Banach不动点定理

集X到自身中的映象$T:X\to X$的**不动点**是这样的点$x\in X$，x被映到其自身（依T"保持不动"），即是，

$$Tx=x,$$

象Tx与x一致。

例如，平移没有不动点；平面的旋转有一不动点（旋转中心）；映**R**到自身中的映象$x\mapsto x^2$有两个不动点（0和1）；$\mathbf{R}^2$到ξ_1-轴上的投影$(\xi_1,\xi_2)\mapsto\xi_1$有无穷多个不动点（$\xi_1$一轴上的一切点）。

下面叙述的Banach不动点定理是关于某些映象的不动点的存在唯一性定理，此定理也给出了获得不动点（具体问题的解）最佳逼近的构造性程序，这个程序也叫**迭代法**，按其定义，它是这样的一种方法，在所给集中任意选定一点x_0，从形如

$$x_{n+1}=Tx_n \qquad (n=0,1,2\cdots)$$

的关系式作出一循环迭代的序列$x_0,x_1,x_2,\cdots$；即是说，选定一任意点x_0，并将相继地确定$x_1=Tx_0$，$x_2=Tx_1,\cdots$。

迭代程序几乎在应用数学的每一分支中都被采用，应用Banach不动点定理（或更深刻的不动点定理）常常可得到一些收敛性证明及误差估计。Banach定理给出了一类映象的不动点的存在（及唯一性）的充分条件，这类映象叫压缩映象。其定义如下：

5.1-1 定义（压缩） 设$X=(X,d)$是度量空间，在X上的映象$T:X\to X$叫做压缩映象，如果存在一正数$\alpha<1$，使其对一切$x,y\in X$，有

(1) $d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y) \qquad (\alpha<1)$.

从几何上讲，这意味着，任意点x和y，它们的象比之x和y更为接近；确切地说，比值$d(Tx,Ty)/d(x,y)$不超过比1小的正常

数。

5.1-2 Banach 不动点定理（压缩定理） 考察度量空间$X=(X,d)$，这里，$X\neq\phi$。设X是完备的，$T:X\to X$在X上是压缩的，则T恰有一个不动点。

证明。先构造一序列(x_n)，并证明(x_n)是Cauchy序列，于是序列在完备度量空间X中收敛，然后再证明其极限x是T的不动点，并且没有其他的不动点。这就是证明的思路。

选取任意的点$x_0\in X$，定义"迭代序列"(x_n)：

$$(2)\quad x_0,\ x_1=Tx_0,\ x_2=Tx_1=T^2x_0,\cdots,$$
$$x_n=T^nx_0,\cdots.$$

显然，这一序列是x_0在T的反复作用下所得到的象序列。我们证明(x_n)是Cauchy序列。由(1)和(2)式，

$$(3)\ d(x_{m+1},x_m)=d(Tx_m,Tx_{m-1})\leqslant\alpha d(x_m,x_{m-1})$$
$$\leqslant\alpha d(Tx_{m-1},Tx_{m-2})\leqslant\alpha^2d(x_{m-1},x_{m-2})\cdots$$
$$\leqslant\alpha^m d(x_1,x_0).$$

由此，根据三角不等式和几何级数求和公式，对$n>m$有

$$d(x_m,x_n)\leqslant d(x_m,x_{m+1})+d(x_{m+1},x_{m+2})+\cdots$$
$$+d(x_{n-1},x_n)\leqslant(\alpha^m+\alpha^{m+1}+\cdots+\alpha^{n-1})d(x_0,x_1)$$
$$=\alpha^m\frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha}d(x_0,x_1).$$

因为$0<\alpha<1$，在分子中，$1-\alpha^{n-m}<1$。故

$$(4)\quad d(x_m,x_n)\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(x_0,x_1)\qquad(n>m).$$

在右边，$0<\alpha<1$和$d(x_0,x_1)$是固定的，只要m取得充分大(且$n>m$)，可以使右边充分地小。这证明(x_m)是Cauchy序列。因为X完备，故(x_m)收敛。设$x_m\to x$。我们证明此极限x是映象T的不动点。

由三角不等式及(1)式，有

$$d(x,Tx)\leqslant d(x,x_m)+d(x_m,Tx)$$
$$\leqslant d(x,x_m)+\alpha d(x_{m-1},x),$$

因为 $x_m\to x$，第二排中的和可以取得来比事先给定的任何 $\varepsilon>0$ 还小。于是断定 $d(x,Tx)=0$，即由1.1节$(M2)$有 $x=Tx$，这就证明了x是T的不动点。

x是T仅有的不动点。因为，从$Tx=x$和$T\tilde{x}=\tilde{x}$，根据(1)式可得

$$d(x,\tilde{x})=d(Tx,T\tilde{x})\leqslant\alpha d(x,\tilde{x})$$

因为 $\alpha<1$，故 $d(x,\tilde{x})=0$。因此，由1.1节$(M2)$有 $x=\tilde{x}$。定理得证。█

5.1-3 推论（迭代法，误差界） 在定理5.1-2的条件下，从 x_0 出发的迭代序列(2)收敛于T的唯一的不动点x，下之误差估计是先验估计式：

$$(5)\quad d(x_m,x)\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(x_0,x_1);$$

而下式是后验估计式：

$$(6)\quad d(x_m,x)\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}d(x_{m-1},x_m).$$

证明。第一个结果，易从前面的证明中得出。由(4)式，命 $n\to\infty$，得出不等式(5)式。我们推导(6)式。取 $m=1$，记x_0为y_0，x_1为y_1，从(5)式，有

$$d(y_1,x)\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}d(y_0,y_1).$$

命 $y_0=x_{m-1}$，则 $y_1=Ty_0=x_m$ 于是得出(6)式。

先验误差界(5)式可以用于计算之前，去估计为了得到预先的

精确度而必须进行的步数，而(6)式则可用于计算的中间各步或者末尾。

从应用数学的观点来看，上述情况并不令人完全满意。因为，常常出现，映象T不是在整个空间X上是压缩的，而只在X的子集Y上是压缩的。但是，如果Y是闭的，由定理1.4-7，Y是完备的。于是，T在Y中有不动点x，倘若适当的限制x_0的选择，以使诸x_m仍在Y中，如同前面一样，$x_m \to x$。这方面典型而又有实际用处的结果如下。

5.1-4定理（在球上的压缩） T是完备度量空间$X=(X, d)$到自身中的一映象。设T在闭球$Y=\{x \mid d(x,x_0) \leqslant r\}$上是压缩的，而且，假设

(7) $d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r$,

则迭代序列(2)收敛于$x \in Y$，此x是T的不动点且T在Y中仅此一不动点。

证明。只需证明一切x_m及x在Y中就够了。在(4)式中，命$m=0$，将m改为n，利用(7)式得

$$d(x_0, x_m) \leqslant \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < r,$$

因此，一切x_m在Y中。因Y闭且$x_m \to x$，故$x \in Y$。定理的结论由Banach定理5.1-2得出。

请读者给出今后要用到的下面这一引理的一个简单的证明。

5.1-5 引理(连续性) 度量空间X上的压缩映象是连续映象。

习　题

1. 在初等几何中，给出映象的更深入的例子，使其(a)仅有一个不动点；(b)有无限多个不动点。

2. 命 $X=\{x\in R\mid x\geqslant 1\}\subset R$，映象 $T:X\to X$ 定义为 $Tx=\frac{x}{2}+x^{-1}$。试证明，T 是压缩的，并求最小的 α。

3. 举例说明，定理 5.1-2 中完备性条件是本质的而且是不可少的。

4. 在 Banach 定理 5.1-2 中，条件(1)不可以用 $d(Tx,Ty)<d(x,y)$（当 $x\neq y$ 时）来代替，这一点是十分重要的。为此，考察 $X=\{x\mid 1\leqslant x<+\infty\}$，采用直线上通常的度量，并且 $T:X\to X$ 定义为 $x\mapsto x+x^{-1}$。证明，$|Tx-Ty|<|x-y|$（当 $x\neq y$ 时），但此映象没有不动点。

5. 如果，$T:X\to X$ 满足 $d(Tx,Ty)<d(x,y)$（当 $x\neq y$ 时）且有不动点，证明，不动点是唯一的；这里 (X,d) 是度量空间。

6. 如果 T 是压缩的，证明，$T^n(n\in N)$ 是压缩的。如果当 $n>1$ 时，T^n 是压缩的，证明，T 不必是压缩的。

7. 证明引理5.1-5。

8. 证明，由(5)式给出的误差界构成严格单调减序列。证明(6)式优于(5)式。

9. 证明，在定理 5.1-4的情况下，有先验误差估计 $d(x_m,x)<\alpha^m r$ 和后验估计(6)式。

10. 在分析中，一迭代 $x_n=g(x_{n-1})$ 收敛的一个充分条件是 g 连续可微并且

$$|g'(x)|\leqslant\alpha<1.$$

利用 Banach 不动点定理证明这一结论。

11. 为了求给定方程 $f(x)=0$ 的近似数值解，我们可以将方程变形为 $x=g(x)$ 的样式，选择一初始值 x_0 并计算

$$x_n=g(x_{n-1})\qquad n=1,2,\cdots,$$

假设 g 在某区间 $J=[x_0-r,x_0+r]$ 上连续可微且在 J 上满足 $|g'(x)|\leqslant\alpha<1$，同时，

$$|g(x_0)-x_0|<(1-\alpha)r.$$

证明，$x=g(x)$ 在 J 上有唯一解，迭代序列 (x_m) 收敛于该解且有误差估计式

$$|x-x_m|<\alpha^m r,\qquad |x-x_m|\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}|x_m-x_{m-1}|.$$

12. 如果 f 在区间 $J=[a,b]$ 上是连续可微的，$f(a)<0$，$f(b)>0$ 并且 $0<k_1\leqslant f'(x)\leqslant k_2(x\in J)$，利用 Banach 定理 5.1-2，构造解方程 $f(x)=0$ 的迭代程序；采用 $g(x)=x-\lambda f(x)$ 及适当的 λ。

13. 考察解方程 $f(x)=x^3+x-1=0$ 的迭代程序，可按如下进行。(a) 证明，可以取

$$x_n=g(x_{n-1})=(1+x_{n-1}^2)^{-1}$$

作为迭代，选 $x_0=1$ 并且迭代三步。问是否有 $|g'(x)|<1$？(见习题 10)。说明迭代可以用图 51(b) 来描绘。(b) 根据 (5) 式估计误差。(c) 我们可以表 $f(x)=0$ 为 $x=1-x^3$ 之形式。这种形式作为迭代是否适当？试取 $x_0=1$，$x_0=0.5$，$x_0=2$ 看会有什么情况出现。

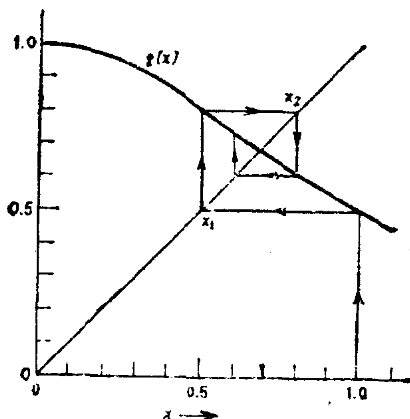


图51 习题13(a)中的迭代

14. 证明，习题13中的方程的另一迭代程序是

$$x_n=x_{n-1}^{1/2}\ (1+x_{n-1}^2)^{-1/2}.$$

取 $x_0=1$，确定 x_1，x_2，x_3。说明该迭代迅速收敛的原因是什么？(精确到 6 位的实根是 0.682328)

15. (Newton 方法) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上二阶连续可微的实值函数，并且设 $\hat{x}$ 是 f 在 (a,b) 中的一单零点。证明，由

$$x_{n+1}=g(x_n),\qquad g(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

确定的 Newton 方法在 $\hat{x}$ 的某邻域中是压缩的（于是，对任意充分接近于 $\hat{x}$ 的 x_0 产生的迭代序列收敛于 $\hat{x}$）。

16. （平方根）试证明，计算给定正数 c 的平方根的迭代是

$$x_{n+1}=g(x_n)=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)$$

这里 $n=0, 1, 2, \cdots$. 由习题10我们能得到什么条件？从 $x_0=1$ 出发，计算 $\sqrt{2}$ 的近似值 $x_1, x_2, \cdots, x_4$。

17. 设 $T:X\to X$ 是完备度量空间上的压缩映象，即(1)式成立，由于舍入误差及一些其他原因，常常用另外的，对一切 $x\in X$ 使

$$d(Tx, Sx)\leqslant\eta \qquad (适当的\eta>0)$$

成立的映象 $S:X\to X$ 来代替 T。利用归纳法，证明对任意 $x\in X$，有

$$d(T^m x, S^m x)\leqslant\eta\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha} \qquad (m=1,2,\cdots).$$

18. 习题17中的映象 S 可以没有不动点，但在实际中，对某个 n，S^n 常有不动点 y。利用习题17，证明，从 y 到 T 的不动点 x 的距离有

$$d(x,y)\leqslant\frac{\eta}{1-\alpha}.$$

19. 在习题17中，设 $x=Tx$ 和 $y_m=S^m y_0$，利用(5)式和习题17，证明

$$d(x,y_m)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}[\eta+\alpha^m d(y_0, Sy_0)].$$

在应用中，这个公式的意义是什么？

20. （Lipschitz 条件）映象 $T:[a,b]\to[a,b]$ 叫做在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 常数 k 的 Lipschitz 条件，如果存在常数 k，使其对一切 $x,y\in[a,b]$ 有

$$|Tx-Ty|\leqslant k|x-y|.$$

(a) T 是否是压缩的？(b) 如果 T 是连续可微的，证明 T 满足 Lipschitz 条件。(c) (b)之逆是否成立？

5.2 Banach 定理对线性方程的应用

Banach 不动点定理的一重要应用是迭代法解线性代数方程

组，以及给出关于收敛和误差界的充分条件。

为了弄清这一问题，首先回忆一下，对解这种方程组有各种各样的直接的方法（经有限多次算术运算之后，此种方法可以给出精确的解，如果精确度——计算机的语言长——不受限制的话。著名的例子是 Gauss 消去法。然而，迭代法或间接法更为有效，如果方程组是特殊形式的，比如说，它是稀疏的，即由许多个只有少数系数是非零的方程组成的方程组（振动问题，网络，偏微分方程的差分近似常常导致这类方程组）。而且，通常直接法需要大约 $n^3/3$ 次代数运算（n=方程个数=未知数的个数），对充分大的 n，舍入误差范围可能变得非常大，然而在迭代法中，由于舍入（或甚至忽略），误差最终地可以衰减下去。事实上，采用迭代法得到的解常常用以改善通过直接法而得到的"解"。

为了应用 Banach 定理，必须一个完备度量空间以及其上的一个压缩映象。取一切有序 n-实数组为元构成集 X，有序组记为

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),\quad y=(\eta_1,\cdots,\eta_n),\quad z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n),$$

等等。在 X 上定义度量 d：

$$d(x,z)=\max_j|\xi_j-\zeta_j|, \tag{1}$$

$X=(X,d)$ 是完备的；其证明类似于例1.5-1。

在 X 上定义 $T:X\to X$，

$$y=Tx=Cx+b, \tag{2}$$

这里 $C=(c_{jk})$ 是固定的实 $n\times n$ 矩阵，$b\in X$ 是固定的向量。此地以及至本节末，一切向量都是列向量，这是由通常矩阵乘法要求的缘故。

在什么条件下 T 是压缩的呢？表（2）式为分量的形式，有

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{n}c_{jk}\xi_k+\beta_j \qquad j=1,\cdots,n,$$

这里，$b=(\beta_z)$。命 $w=(\omega_j)=Tz$，于是，从(1)和(2)式得

$$d(y,w)=d(Tx,Tz)=\max_j|\eta_j-\omega_j|$$

$$=\max_j\left|\sum_{k=1}^{n}c_{jk}(\xi_k-\zeta_k)\right|$$

$$\leqslant\max_i|\xi_i-\zeta_i|\max_j\sum_{k=1}^{n}|c_{jk}|$$

$$=d(x,z)\max_j\sum_{k=1}^{n}|c_{jk}|.$$

我们知道，上式可以写成 $d(y,w)\leqslant\alpha d(x,z)$，这里，

(3) $$\alpha=\max_j\sum_{k=1}^{n}|c_{jk}|,$$

于是由 Banach 定理得

5.2-1 定理(线性方程) 如果 n 个未知数 $\xi_1,\cdots,\xi_n$（x的分量）的 n 个线性方程组

(4) $$x=Cx+b\quad (C=(c_{jk}),\ b\text{是给定的})$$

满足

(5) $$\sum_{k=1}^{n}|c_{jk}|<1\qquad (j=1,\cdots,n),$$

则它恰有一解 x，这个解作为迭代序列 $(x^{(0)},x^{(1)},x^{(2)},\cdots)$ 的极限而得到，这里，$x^{(0)}$是任意的且

(6) $$x^{(m+1)}=Cx^{(m)}+b\qquad m=0,1,\cdots,$$

误差界(见(3))是

(7) $$d(x^{(m)},x)\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}d(x^{(m-1)},x^{(m)})$$

$$\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(x^{(0)},x^{(1)}).$$

条件（5）对于收敛性是充分的，这是一个行和判别准则，因为，它是由C的行中元的绝对值的总和而得到的行和，如果用另外的度量来代替(1)式，可能得到另外的条件。

如何将定理5.2-1中的方法用于具体问题中呢？n个未知数的n个线性方程组通常可以表为

$$(8)\qquad Ax=c,$$

这里，A是n行方阵。关于(8)式($\det A\neq 0$)的许多迭代方法都在于使得我们可以表$A=B-G$，其中B是一适当的非奇异矩阵，于是，(8)式变为

$$Bx=Gx+c,$$

或

$$x=B^{-1}(Gx+c).$$

这就得出迭代式(6)，这里

$$(9)\qquad C=B^{-1}G,\ b=B^{-1}c.$$

让我们用两个标准的方法来说明这一点。一是Jacobi迭代法，此法偏重于理论方面；一是Gauss-Seidel迭代法，此法广泛用于应用数学中。

5.2-2 Jacobi迭代法 迭代方法定义为：

$$(10)\qquad \xi_j^{(m+1)}=\frac{1}{a_{jj}}\Big(\gamma_j-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_{jk}\xi_k^{(m)}\Big),\ j=1,\cdots,n.$$

这里，$c=(\gamma_j)$是(8)式中的c，且设$a_{jj}\neq 0$，$j=1,\cdots,n$。这一迭代法暗示着在(8)式中对第j的一方程解出ξ_j，不难验证，(10)式可以表为(6)式的形式，其中，

$$(11)\qquad C=-D^{-1}(A-D),\ b=D^{-1}c,$$

这里，$D=diag(a_{jj})$是 A 的主对角线上那些非零元组成的对角矩阵。

为了得到Jacobi迭代法的收敛性，只要将条件(5)应用于(11)式中的 C 就够了。因为，(11)式中 C 相对地较为简单些，可以由 A 的元直接表示出来。Jacobi 迭代法的行和判别法为

$$(12) \qquad \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n}\left|\frac{a_{jk}}{a_{jj}}\right|<1 \qquad j=1,\cdots,n,$$

或

$$(12^{*}) \qquad \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n}|a_{jk}|<|a_{jj}|, \qquad j=1,\cdots,n.$$

粗略地讲，这就证明了，如果 A 的主对角线上的元充分大时，收敛性就可以得到保证。

注意，在 Jacobi 迭代法中，$x^{(m+1)}$的某些分量可能在某一时刻已经得到，但在其余各分量的计算过程中仍将用到，即是说，新逼近的全部分量在循环迭代之末尾同时被诱导出来，为说明这一事实，称 Jacobi 迭代法为同时校正法。[*]

5.2-3 Gauss-Seidel 迭代法 这是一逐次校正法，在此法中在每一时刻最后的已知的一切分量都要用到，这一方法定义为

$$(13) \qquad \xi_j^{(m+1)}=\frac{1}{a_{jj}}\left(\gamma_j-\sum_{k=1}^{j-1}a_{jk}\xi_k^{(m+1)}-\sum_{k=j+1}^{n}a_{jk}\xi_k^{(m)}\right),$$

这里，$j=1,\cdots,n$，再次设 $a_{jj}\neq 0$，对一切 j。

我们得到(13)式的矩阵形式为(图52)

$$A=-L+D-U,$$

---

[*] 译者注原文此处有误。

这里，D 与 Jacobi 迭代法中的矩阵一样，L 和 U 分别是主对角线上的元为零的下和上三角形阵，加上负号是由于习惯和方便起见。在(13)式中用 a_{jj} 去乘每个方程，那末，可以把结果表为：

$$Dx^{(m+1)}=c+Lx^{(m+1)}+Ux^{(m)}$$

或

$$(D-L)x^{(m+1)}=c+Ux^{(m)}.$$

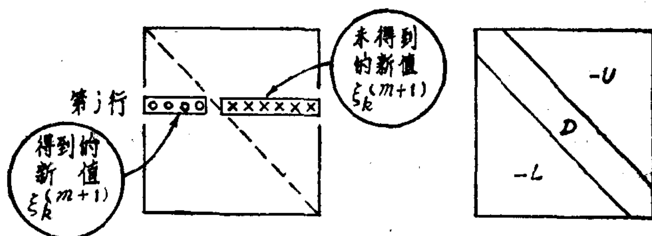


图52　Gauss-Seidel 公式（13）和（14）的图示

乘以 $(D-L)^{-1}$ 即得(6)式，其中

(14)　　$C=(D-L)^{-1}U,\ b=(D-L)^{-1}c.$

条件(5)式应用于(14)中的 C 就足以保证 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性。因为，C 是比较复杂的，余下的实际问题是给出保证(5)式有效的简单条件，我们指出（未证明），(12) 式是一充分条件，但也存在更好的条件，有兴趣的读者可以在 J. Todd (1962) pp. 494, 495, 500中找到。

习　　题

1. 验证(11)和(14)式。
2. 考察方程组

$$5\xi_1-\xi_2=7$$
$$-3\xi_1+10\xi_2=24$$

(a) 确定精确解；(b) 应用 Jacobi 迭代。C 是否满足(5)式？从分量为1，1的 $x^{(0)}$ 出发，计算 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$ 和 $x^{(2)}$的误差界(7)式。将这些误差界

同 $x^{(2)}$ 的实际误差比较一下。(c) 应用 Gauss-Seidel 迭代，并回答 (b) 中提出的相同的问题。

3. 考察方程组

$$
\begin{aligned}
\xi_1-0.25\xi_2-0.25\xi_3 \qquad\qquad &=0.50\\
-0.25\xi_1+\xi_2 \qquad -0.25\xi_4&=0.50\\
-0.25\xi_1 \qquad +\xi_3-0.25\xi_4&=0.25\\
-0.25\xi_2-0.25\xi_3+\xi_4&=0.25
\end{aligned}
$$

(这种形式的方程出现在偏微分方程的数值解中)。(a) 应用 Jacobi 迭代，从分量为 1，1 的 $x^{(0)}$ 出发并迭代三步。将近似值同精确值 $\xi_1=\xi_2=0.875$，$\xi_3=\xi_4=0.625$ 比较一下。(b) 应用 Gauss-Seidel 迭代，回答在(a)中提出的相同的问题。

4. **Gershgorin** 定理。如果 λ 是方阵 $C=(c_{jk})$ 的特征值，则对某 j，这里，$1\leqslant j\leqslant n$，有

$$
|c_{jj}-\lambda|\leqslant\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|c_{jk}|.
$$

(C 的特征值是使 $Cx=\lambda x$，对某 $x\neq 0$ 成立的数 λ) (a)证明，(4)式可以表为 $Kx=b$，这里，$K=I-C$，并且，Gershgorin 定理及(5)式蕴含 K 不可能有特征值 0 (于是 K 非奇异，即是，$\det K\neq 0$ 且 $Kx=b$ 有唯一解)。(b) 证明，(5)式和 Gershgorin 定理蕴含(6)式中之 C 有小于 1 的谱半径 (可以证明，对于迭代序列的收敛性来说，这是充分必要条件。C 的谱半径是 $\max|\lambda_j|$，这里，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 C 的特征值。)

5. 使 Jacobi 迭代发散而 Gauss-Seidel 迭代收敛的方程组之一例子是

$$
\begin{aligned}
2\xi_1+\xi_2+\xi_3&=4\\
\xi_1+2\xi_2+\xi_3&=4\\
\xi_1+\xi_2+2\xi_3&=4
\end{aligned}
$$

从 $x^{(0)}=0$ 出发，验证 Jacobi 迭代发散，并且只要计算 Gauss-Seidel 迭代开头的少许几步便可发现迭代收敛于精确解 $\xi_1=\xi_2=\xi_3=1$。

6. 似乎使人感到，在任何情况下 Gauss-Seidel 迭代都会比 Jacobi 迭代优越。其实，两种方法是不可以比较的。这是一个意外。例如，在方程组

$$
\begin{aligned}
\xi_1 \qquad +\xi_3&=2\\
-\xi_1+\xi_2 \qquad &=0\\
\xi_1+2\xi_2-3\xi_3&=0
\end{aligned}
$$

的情况下，Jacobi 迭代收敛，但 Gauss-Seidel 迭代却发散。从习题 4(b)中叙述的充分必要条件导出这两个结论。

7．（列和判别准则）对(1)式的度量，有相应的条件(5)式。如果我们在 X 上采用度量 d_1：

$$d_1(x,z)=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j-\zeta_j|,$$

证明代替(5)式，我们将得到条件

$$(15)\qquad \sum_{j=1}^{n}|c_{jk}|<1 \qquad (k=1,\cdots,n).$$

8．（平方和判别准则）对(1)式中的度量，有相应的条件(5)式。如果我们在 X 上采用 Eudidean 度量 d_2。

$$d_2(x,z)=\left[\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\zeta_j)^2\right]^{1/2}.$$

证明，代替(5)式，我们得到条件

$$(16)\qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{jk}^2<1.$$

9．（Jacobi 迭代）证明，对于 Jacobi 迭代，收敛的充分条件(5)，(15)和(16)式变为

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|}<1,\quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|}<1,\quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}^2}{a_{jj}^2}<1.$$

10．求一矩阵 C，满足(5)式，但它既不满足(15)式，也不满足(16)式。

5.3 Banach 定理对微分方程的应用

Banach 不动点定理的一些最有兴趣的应用出现在与函数空间有关的问题之中，如我们将看到的，该定理给出了微分方程和

积分方程的存在唯一性定理.

事实上，在本节中我们考虑的是一个显式一阶常微分方程

(1a) $x'=f(t,x)$ $(1=d/dt)$.

这一方程的**初值问题**由方程及初值条件

(1b) $$x(t_0)=x_0$$

组成，这里，t_0 和 x_0 是给定的实数.

我们将利用 Banach 定理证明著名的 Picard 定理，该定理在常微分程理论中起着重要的作用. 证明思路十分简单，将(1)式变成一积分方程，此积分方程定义了一映象 T，而定理的条件蕴含 T 是压缩的，于是其不动点即成为我们问题的解.

5.3-1 (常微分方程) Picard 的存在唯一性定理 设 f 在矩形（图53）

$$R=\{(t,x)\mid |t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$$

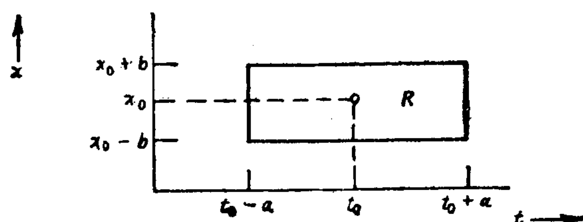


图53 矩形 R

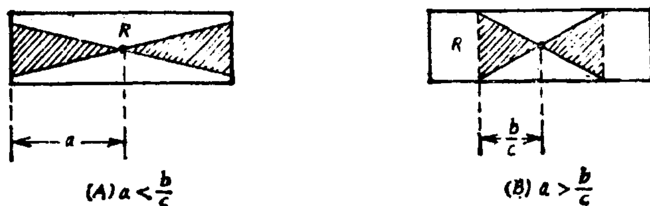


图54 (A)是相当小的 c，(B)是相当大的 c，不等式(2)的几何说明. 解的曲线必在斜率为 $\pm c$ 的直线界定的阴影范围内

上连续，于是，在 R 上有界，比如说（图54）

(2) $$|f(t,x)|\leqslant c, \text{ 对一切 } (t,x)\in R.$$

设 f 在 R 上关于它的第二个变量满足 Lipschitz 条件，即是说，存在常数 k（Lipschitz 常数），使得对 (t,x)，$(t,v)\in R$ 有

(3) $$|f(t,x)-f(t,v)|\leqslant k|x-v|,$$

那末，初值问题（1）有唯一的解，这个解在一区间 $[t_0-\beta, t_0+\beta]$ 上存在，这里①

(4) $$\beta<\min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}$$

证明。设 $C(J)$ 表区间 $J=[t_0-\beta, t_0+\beta]$ 上一切实值连续函数的度量空间，其中度量定义为

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|,$$

$C(J)$ 是完备的。命 $\tilde{C}$ 表满足

(5) $$|x(t)-x_0|\leqslant c\beta$$

的一切函数 $x\in C(J)$ 组成的 $C(J)$ 的子空间。不难看出，$\tilde{C}$ 在 $C(J)$ 中闭，于是由1.4-7知 $\tilde{C}$ 是完备的。根据积分法（1）式可以表为 $x=Tx$，这里，$T:\tilde{C}\to\tilde{C}$ 定义为

(6) $$Tx(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau))\,d\tau.$$

实际上，由于（4）式，$c\beta<b$，故 T 对一切 $x\in\tilde{C}$ 都有定义。如果 $x\in\tilde{C}$，则 $\tau\in J$ 且 $(\tau, x(\tau))\in R$。因为，f 在 R 上连续，（6）式中的积分存在。为了证明 T 映 $\tilde{C}$ 于自身之中，利用（6）和（2）式，得

$$|Tx-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right|\leqslant c|t-t_0|\leqslant c\beta.$$

---

① 在经典证明中，$\beta<\min\left\{a,\frac{b}{c}\right\}$ 是最好的结果。这一结果也可以通过修改本证明而得到（采用更复杂的度量）；参看附录3. A. Bielecki (1956)

我们证明 T 在 $\widetilde{C}$ 上是压缩的。由 Lipschitz 条件(3)

$$|Tx(t)-Tv(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}[f(\tau,x(\tau))-f(\tau,v(\tau))]d\tau\right|$$
$$\leqslant|t-t_0|\max k|x(\tau)-v(\tau)|$$
$$\leqslant k\beta d(x,v),$$

因为，最后的表达式不依赖于 t，故可以在左边取极大值。于是

$$d(Tx,\ Ty)\leqslant\alpha d(x,\ v),\text{ 这里 }\alpha=k\beta.$$

从(4)式知，$\alpha=k\beta<1$，于是，T 确实在 $\widetilde{C}$ 上是压缩的。由5.1-2 断定 T 有唯一的不动点 $x\in\widetilde{C}$，即是说，存在 J 上的连续函数 x 满足 $x=Tx$。按(6)式，表 $x=Tx$ 为

$$(7)\qquad x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))d\tau$$

因为，$(\tau,x(\tau))\in R$，f 是连续的，(7)式是可微的。因此，x 还是可微的且满足(1)式。反之，(1)式的每一解必满足(7)式，证毕。▌

Banach 定理也蕴含着，(1)式的解 x 是由 Picard 迭代法所得出的序列 $(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 的极限。其中

$$(8)\qquad x_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x_n(\tau))d\tau\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

可是，得出(1)的解的近似及相应的误差界的方法的实用性是相当有限的，因为，它包含了积分。

最后指出，可以证明，对问题(1)的解的存在性来说，f 的连续性是充分的（但不必要），但不能保证唯一性。Lipschitz条件是充分的 (Picard 定理所示)，但不是必要的。详细情况，见 E. L. Ince (1956) 的著作。该书也包含了 Picard 定理的历史注释（在 P.63 上）及经典证明，读者可以比较一下本方法与经典方法。

习　　题

1. 如果在矩形 R 上，f 的偏导数 $\partial f/\partial x$ 存在且连续（见 Picard 定理）。证明，f 关于它的第二变数在 R 上满足 Lipschitz 条件。

2. 证明，由 $f(t,x)=|\sin x|+t$ 定义的 f 关于它的第二变数在整个 tx——平面上满足 Lipschitz 条件，但当 $x=0$ 时，$\partial f/\partial x$ 不存在。这说明了什么事实?

3. 由 $f(t,x)=|x|^{1/2}$ 定义的 f 是否满足 Lipschitz 条件?

4. 求出一切初始条件，使初值问题 $tx'=2x$，$x(t_0)=x_0$ (a) 无解。(b) 有一个以上的解。(c) 恰有一解。

5. 阐明在(4)式中，限定 $\beta<b/c$ 和 $\beta<1/k$ 的原因。

6. 证明，Picard 定理证明中的 $\widetilde{C}$ 在 $C(J)$中闭。

7. 证明，在 Picard 定理中可以取任意函数 $y_0\in\widetilde{C}$，$y_0(t_0)=x_0$ 去代替 x_0 作为迭代的初始函数。

8. 应用 Picard 迭代(8)式于 $x'=1+x^2$，$x(0)=0$ 上。验证对于x_3，含 $t,t^2,\cdots,t^5$ 的项与精确解的那些项相同。

9. 证明，$x'=3x^{2/3}$，$x(0)=0$ 有无穷多个解 x，并且由

$x(t)=0$，如果 $t<c$；$x(t)=(t-c)^3$，如果 $t\geqslant c$ 给出，这里 $c>0$ 是任意常数。右端 $3x^{2/3}$ 是否满足 Lipschitz 条件?

10. 证明，初值问题

$$x'=|x|^{1/2},\qquad x(0)=0$$

的解是 $x_1=0$ 和 x_2，这里，$x_2(t)=t|t|/4$。这是否同 Picard 定理矛盾？求出另外的解。

5.4　Banach 定理对积分方程的应用

最后，考察作为 Banach 定理的一个起源的积分方程的存在唯一性定理。形如

$$(1)\qquad x(t)-\mu\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau=v(t)$$

的积分方程叫做第二型Fredholm 方程[1]。这里$[a,b]$是给定的区间，x是$[a,b]$上的未知函数，μ是参数。方程的核k是正方形$G=[a,b]\times[a,b]$上给定的函数，如图55所示，v是$[a,b]$上的一给定的函数。

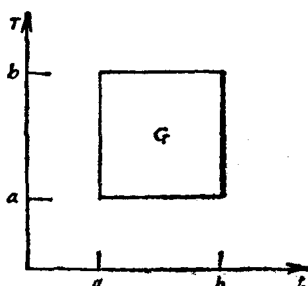


图55 在a,b为正的情况下，积分方程(1)式中的核k的定义域G

积分方程可以在各种不同的函数空间上考察。在本节中，我们认为(1)式是在$C[a,b]$上，即定义在区间$J=[a,b]$上的一切连续函数之空间，其度量为

(2) $$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|$$

(见1.5-5)。由于打算应用Banach定理，要着重注意的是$C[a,b]$是完备的。设$v\in C[a,b]$，k在G上连续，于是，k在G上是有界的，比如说，

(3) $$|k(t,\tau)|\leqslant c,\quad 对一切(t,\tau)\in G,$$

易知，(1)式可表为$x=Tx$，这里

(4) $$Tx(t)=v(t)+\mu\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

因为v和k是连续的，公式(4)定义了一个算子$T:C[a,b]\to C[a,b]$。现对μ施加限制，使其T变为压缩的。从(2)到(4)式，有

$$d(Tx,Ty)=\max_{t\in J}|Tx(t)-Ty(t)|$$

---

① 出现$x(t)$这一项的目的是使我们可以应用迭代法，如定理5.4-1所示。没有这一项的方程为

$$\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau=v(t)$$

并叫做第一型积分方程。

$$=|\mu|\max_{t\in J}\left|\int_a^b k(t,\tau)[x(\tau)-y(\tau)]d\tau\right|$$

$$\leqslant|\mu|\cdot\max_{t\in J}\int_a^b|k(t,\tau)||x(\tau)-y(\tau)|d\tau$$

$$\leqslant|\mu|c\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|\int_a^b d\tau$$

$$=|\mu|cd(x,y)(b-a).$$

该式可表为 $d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y)$，这里

$$\alpha=|\mu|c(b-a)$$

如果

$$(5)\qquad |\mu|<\frac{1}{c(b-a)},$$

则 T 成为压缩的($\alpha<1$)。现在由 Banach 不动点定理5.1-2给出

5.4-1 定理(Fredholm 积分方程) 设(1)式中的 k 和 v 分别在 $J\times J$ 和 $J=[a,b]$上连续，μ 满足(5)式，其中 c 如(3)式中所确定，则(1)式在 J 上有唯一解 x。此函数 x 是迭代序列 $(x_0,x_1,\cdots)$的极限，这里

$$(6)\qquad x_{n+1}(t)=v(t)+\mu\int_a^b k(t,\tau)x_n(\tau)d\tau.$$

Fredholm 的著名积分方程理论将在第八章中予以讨论。

我们现在考察 Volterra 积分方程

$$(7)\quad x(t)-\mu\int_a^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau=v(t).$$

(1)式和(7)式不同之处在于，(1)式中积分上限 b 是常数，而在(7)式中是变数。这一点是要紧的，事实上，我们现在给出下面的存在唯一性定理，不对 μ 作任何限制。

5.4-2 定理(Volterra 积分方程) 设(7)式中的v在$[a,b]$上连续，核k在$t\tau$-平面上的三角区域R：$a\leqslant\tau\leqslant t$，$a\leqslant t\leqslant b$中是连续的（见图56），则(7)式对每个$\mu$在$[a,b]$上有唯一解。

证明。方程(7)可以表为$x=Tx$，其中，$T:C[a,b]\to C[a,b]$定义为

$$(8)\qquad Tx(t)=v(t)+\mu\int_a^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

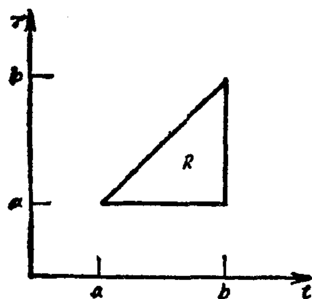


图56 在a和b为正的情况下，定理5.4-2中的三角区域R

因为，k在R上是连续的，R是闭而且是有界的，k在R上是有界函数，比如说

$$|k(t,\tau)|\leqslant c,\ \text{对一切}(t,\tau)\in R.$$

利用(2)式，于是对一切$x,y\in C[a,b]$得

$$\begin{aligned}(9)\quad |Tx(t)-Ty(t)| &= |\mu|\left|\int_a^t k(t,\tau)[x(\tau)-y(\tau)]d\tau\right| \\ &\leqslant |\mu|cd(x,y)\int_a^t d\tau \\ &= |\mu|cd(x,y)(t-a)\end{aligned}$$

利用归纳法，我们证明

$$(10)\qquad |T^m x(t)-T^m y(t)|\leqslant|\mu|^m c^m\frac{(t-a)^m}{m!}d(x,y).$$

当$m=1$时，这就是(9)式。设(10)式对m成立，从(8)式得

$$
\begin{aligned}
&|T^{m+1}x(t)-T^{m+1}y(t)| \\
&\qquad =|\mu|\left|\int_a^t k(t,\tau)[T^m x(\tau)-T^m y(\tau)]d\tau\right| \\
&\qquad \leqslant |\mu| c\int_a^t |\mu|^m c^m \frac{(\tau-a)^m}{m!}d\tau\cdot d(x,y) \\
&\qquad =|\mu|^{m+1}c^{m+1}\frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!}d(x,y),
\end{aligned}
$$

故(10)式得证。

在(10)式的右边利用 $t-a\leqslant b-a$，然后，左边在 $t\in J$ 上取极大值。由(10)式得

$$d(T^m x,T^m y)\leqslant \alpha_m d(x,y),$$

这里，

$$\alpha_m=|\mu|^m c^m\frac{(b-a)^m}{m!},$$

对任意固定的μ，当 m 充分大时，有 $\alpha_m<1$。因此，相应的T^m在$[a,b]$上是压缩的，由下述引理得出我们的结论。

5.4-3引理（不动点） 设 $T:X\to X$ 是完备度量空间 $X=(X,d)$ 上的连续映象（见1.3-3），在X上对某个正整数m，T^m是压缩的，那末，T有唯一的不动点。

证明。根据假定，$B=T^m$在X上是压缩的，即是说，$d(Bx,By)\leqslant\alpha d(x,y)$，对一切 $x,y\in X$，这里 $\alpha<1$。因此，对每个$x_0\in X$，

$$
\begin{aligned}
(11)\quad d(B^n Tx_0,B^n x_0)&\leqslant \alpha d(B^{n-1}Tx_0,B^{n-1}x_0) \\
&\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n d(Tx_0,x_0)\to 0\ (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

故Banach定理5.1-2蕴含B有唯一不动点，设它是x，且$B^n x_0\to x$。因为，映象T是连续的，这点又蕴含$B^n Tx_0=TB^n x_0\to Tx$，因此，由1.4-2(b)，

$$d(B^n Tx_0, B^n x_0) \to d(Tx, x),$$

于是，根据(11)式，$d(Tx,x)=0$，这证明 x 是 T 的不动点。因为，T的每个不动点也是 B 的不动点，故T 不可能有多于一个的不动点。

最后注意，Volterra 方程可以视为特殊的 Fredholm 方程，它的核K在正方形$[a,b]\times[a,b]$中$\tau>t$的那一部分上为零，且可能在对角线上($\tau=t$)的点处不连续。

习　　题

1. 取$x_0=v$，用迭代法解方程

$$x(t)-\mu\int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau=v(t) \qquad (|\mu|<1).$$

2. （非线性积分方程）如果v和k分别在$[a,b]$和$C=[a,b]\times[a,b]\times R$上连续，且$k$在$G$上满足 Lipschitz 条件：

$$|k(t,\tau,u_1)-k(t,\tau,u_2)|\leqslant l|u_1-u_2|,$$

证明，对任意使$|\mu|<1/l(b-a)$之μ，非线性积分方程

$$x(t)-\mu\int_a^b k(t,\tau,x(\tau))d\tau=v(t)$$

有唯一解x。

3. 重要的是应该明白，积分方程也产生于微分方程问题．(a) 例如，表初值问题

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\ x(t_0)=x_0$$

为积分方程，并指出这是什么型积分方程．

(b) 证明，二阶常微分方程的初值问题

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(t,x),\ x(t_0)=x_0,\ x^1(t_0)=x_1,$$

可以变成Volterra 积分方程．

4. (Neumann 级数）定义算子S：

$$Sx(t)=\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

且令 $z_n = x_n - x_{n-1}$，证明，(6)式蕴含

$$z_{n+1} = \mu S z_n.$$

取$x_0 = v$，证明，(6)式产生Neumann级数

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = v + \mu S v + \mu^2 S^2 v + \mu^3 S^3 v + \cdots$$

5. 解下面的积分方程

$$x(t) - \mu \int_0^1 x(\tau) d\tau = 1$$

(a) 用Neumann级数. (b)用直接法.

6、解方程

$$x(t) - \mu \int_a^b c x(\tau) d\tau = \tilde{v}(t),$$

这里，c是常数，并说明相应的 Neumann 级数怎样可以用来得到(1)式的 Neumann 级数的收敛条件(5)式.

7．（迭代核，豫解核）证明，习题4中的Neumann 级数可以表为

$$(S^n v)(t) = \int_a^b k_{(n)}(t,\tau) v(\tau) d\tau \qquad n = 2, 3, \cdots,$$

这里，迭核$k_{(n)}$：

$$k_{(n)}(t,\tau) = \int_a^b \cdots \int_a^b k(t,t_1) k(t_1,t_2) \cdots k(t_{n-1},\tau) dt_1 \cdots dt_{n-1}.$$

于是，Neumann 级数可以改写为

$$x(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau) v(\tau) d\tau + \mu^2 \int_a^b k_{(2)}(t,\tau) v(\tau) d\tau + \cdots,$$

或者，采用豫解核：

$$\tilde{k}(t,\tau,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j k_{(j+1)}(t,\tau) \quad (k_{(1)} = k)$$

则可以表为

$$x(t) = v(t) + \mu \int_a^b \tilde{k}(t,\tau,\mu) v(\tau) d\tau.$$

8．有趣的是，习题4中的Neumann 级数可以用μ的幂级数

$$x(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \cdots$$

代入(1)式，逐项积分和比较系数而得到．证明

$$v_0(t) = v(t), \quad v_n(t) = \int_a^b k(t,\tau) v_{n-1}(\tau) d\tau, n = 1, 2, \cdots.$$

假设 $|v(t)| \leqslant c_0$ 和 $|k(t,\tau)| \leqslant c$，证明

$$|v_n(t)| \leqslant c_0 [c(b-a)]^n.$$

于是，(5)式蕴含收敛性。

9. 利用习题7，解(1)式，这里，$a=0$，$b=2\pi$且

$$k(t,\tau)=\sum_{n=1}^{N}a_n\sin nt\cos n\tau.$$

10. 在(1)式中，命$a=0$，$b=\pi$和

$$k(t,\tau)=a_1\sin t\sin 2\tau+a_2\sin 2t\sin 3\tau,$$

用豫解核表出解（见习题7）。

第 六 章

进一步的应用：逼近论

本章是选读材料，其中的材料在其余各章中用不到。

逼近论是一个非常广泛的领域，它有各种各样的应用。本章中，我们给出赋范空间和 Hilbert 空间中逼近论的基本思想及其基本方面的一个引论。

重要概念，主要内容方向摘要。

在 6.1 节中我们定义最佳逼近，最佳逼近的存在性在同一节中讨论，而唯一性在6.2节中讨论，如果赋范空间是严格凸的(见6.2-2)，则最佳逼近是唯一的。对 Hilbert 空间这一结论也成立（见6.2-4 及 6.5节）。对一般赋范空间，为保证最佳逼近的唯一性必须附加条件，例如，在$C[a,b]$中的 Haar 条件，见6.3-2及6.3-4。逼近的不同类型取决于范数的选择。标准的型式包括

(i) $C[a,b]$中的一致逼近（见6.3节），

(ii) Hilbert 空间中的逼近 (见6.5节).

一致逼近的实用模式归结为著名的Chebyshev多项式 (6.4节)。Hilbert空间中逼近包含$L^2[a,b]$中的最小平方逼近作为其特殊情况。我们还将给出三次样条函数的一个简单的讨论(6.6节)。

6.1 赋范空间中的逼近

逼近论关心的是一定类型的函数（例如，在某区间上的连续函数）用另一类型（稍为简单的）函数（例如，多项式)来逼近。这类问题在微积分学中早已出现：如果函数有Taylor级数，我们可以用此级数的部分和作为逼近，为了得到关于这种逼近的品质的信息，可以估计相应的余项。

更一般地说，人们要建立关于逼近品质方面的实际有用的判别准则。对给定的函数集X和函数集Y，用Y中的元去逼近X中的元时，需要研究的问题是存在性，唯一性，在该准则下的“最佳逼近”的构造。对于逼近问题，自然的做法是：

设$X=(X,\|\cdot\|)$是一赋范空间，假设对任意给定的$x\in X$，用$y\in Y$来逼近，这里，Y是X的固定的子空间。设δ表x到Y的距离，根据定义

(1) $\delta=\delta(x,Y)=\inf_{y\in Y}\|x-y\|$

(见3.3节)。显然，δ依赖于x和Y两者，我们保持Y不变，于是简记为δ。

如果存在$y_0\in Y$，使

(2) $\|x-y_0\|=\delta$，

那末，y_0叫做x的在Y中的**最佳逼近**。*

易知，最佳逼近y_0是到给定的x距离最小的元。这种$y_0\in Y$可以存在也可以不存在；这样就产生了一个存在性的问题；唯一性问题也是有实际意义的，因为，对给定的x和Y，可以存在一个以上的最佳逼近，这点我们即将看到。

* 今后，我们总认为$x\notin Y$，否则是平凡的。

在许多应用中，Y 是有限维的．于是有下面的结论

6.1-1 存在性定理（最佳逼近） 如果 Y 是赋范空间 $X=(X,\|\cdot\|)$ 的有限维子空间，那末，对每个 $x\in X$，存在 Y 中的关于 x 的最佳逼近．

证明．设 $x\in X$ 是给定的，考察闭球

$$\tilde{B}=\{y\in Y \mid \|y\|\leqslant 2\|x\|\},$$

则 $0\in\tilde{B}$，于是，从 x 到 $\tilde{B}$ 的距离，有

$$\delta(x,\tilde{B})=\inf_{\tilde{y}\in\tilde{B}}\|x-\tilde{y}\|\leqslant\|x-0\|=\|x\|,$$

如果，$y\notin\tilde{B}$，则 $\|y\|>2\|x\|$ 且

$$(3)\qquad \|x-y\|\geqslant\|y\|-\|x\|>\|x\|\geqslant\delta(x,\tilde{B}).$$

此式证明 $\delta(x,\tilde{B})=\delta(x,Y)=\delta$，而此值不可能在 $y\in Y-\tilde{B}$ 中达到，因为，在(3)式中是＞号．因此，如果关于 x 的最佳逼近存在，它必在 $\tilde{B}$ 中，这就是我们使用 $\tilde{B}$ 的原因．我们可以考察紧子集 $\tilde{B}$ 以取代整个子空间 Y，这里，紧性从2.5-3得出，因为，$\tilde{B}$ 是闭的和有界的，Y 是有限维的，由 2.2节(2)，范数是连续的，于是，推论2.5-7 蕴含：存在有 $y_0\in\tilde{B}$ 使 $\|x-y\|$ 在 $y=y_0$ 处达到极小．根据定义，y_0 是 Y 中的关于 x 的最佳逼近．∎

例．

6.1-2 空间C[a,b] 空间 $C[a,b]$ 的一个有限维子空间是

$$Y=\operatorname{span}\{x_0,\cdots,x_n\},\quad x_j(t)=t^j\quad(n\text{固定}),$$

这是次数不超过 n 的一切多项式及 $x=0$ 组成之集（$x=0$ 通常没有次数定义）．定理6.1-1蕴含对给定的 $[a,b]$ 上的一连续函数 x，存在次数不超过 n 的多项式 p_n 使得对每个 $y\in Y$，

$$\max_{t\in J}|x(t)-p_n(t)|\leqslant\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|,$$

这里，$J=[a,b]$．在 $C[a,b]$ 中的逼近叫做一致逼近，下一节将详

细地考察。

6.1-3 多项式 在定理6.1-1中，Y 的有限维性是本质的。事实上，设Y表$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上任意次多项式全体之集，$Y$ 是$C\left[0,\frac{1}{2}\right]$之子空间，那末，$\dim Y=\infty$。命 $x(t)=(1-t)^{-1}$，那末，对每个$\varepsilon>0$，存在一个N，当令

$$y_n(t)=1+t+\cdots+t^n,$$

有$\|x-y_n\|<\varepsilon$，对一切 $n>N$。因此，$\delta(x,y)=0$。但是，因 x 不是多项式，于是，不存在$y_0\in Y$满足$\delta=\delta(x,Y)=\|x-y_0\|=0$。

本节习题包括在下节末的习题中。

6.2 唯一性，严格凸性

本节中，考察最佳逼近的唯一性问题。为了明白讲的要点是什么，首先看下面两个简单的例子。

如果，$X=\mathbf{R}^3$，Y是$\xi_1\xi_2$——平面（$\xi_3=0$），那末，关于给定的点$x_0=(\xi_{10},\xi_{20},\xi_{30})$，在$Y$中的最佳逼近是点$y_0=(\xi_{10},\xi_{20},0)$，由$x_0$到$Y$的距离是$\delta=|\xi_{30}|$，最佳逼近$y_0$是唯一的。这些简单的事实在初等几何中是已熟知的了。

在另外一些空间，最佳逼近的唯一性可以不成立，甚至在相当简单的空间中也可能如此。

例如，设$X=(X,\|\cdot\|_1)$是有序实数对$x=(\xi_1,\xi_2)$的向量空间，其中范数定义为

(1) $\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|$.

我们取一点 $x=(1,-1)$，而子空间Y如图57所示，即，$Y=\{y=(\eta,\eta)\mid\eta$是实数$\}$，那末，对一切$y\in Y$，显然

$$\|x-y\|_1=|1-\eta|+|-1-\eta|\geqslant 2.$$

从x到Y的距离是$\delta(x,Y)=2$，且一切 $y=(\eta,\eta)$，$|\eta|\leqslant 1$ 都是关于

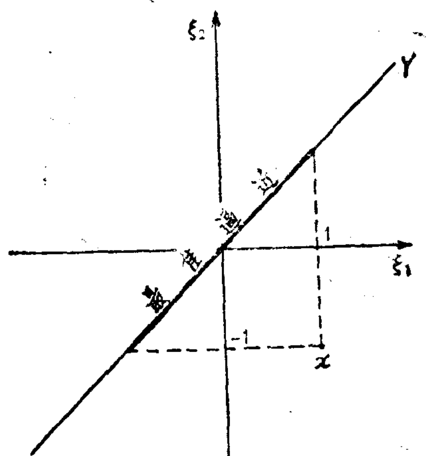


图57　按(1)式定义范数，在Y中的x最佳逼近

x的在Y中的最佳逼近。这说明，甚至在这样简单的空间中，对给定的x和Y，也可能有若干个最佳逼近，甚至是无穷多个最佳逼近。我们观察到，在此情况下，最佳逼近之集是凸的，而且我们指出这具有典型的意义。另外我们还将指出凸性在处理我们的唯一性问题中是很有用的。我们首先叙述定义，然后再考察和应用这一概念。

向量空间X的子集M叫做**凸的**，如果，$y,z\in M$蕴含集

$$W=\{v=\alpha y+(1-\alpha)z\,|\,0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

是M的子集，该W叫做闭线段，y,z叫线段W的边界点，W的其他的点叫做W的内点，见图58

6.2-1　引理（凸性）　在赋范空间$(X,\|\cdot\|)$中，关于给定的点x，它在X的子空间Y中最佳逼近之集M是凸集。

证明。如同前述，命δ表x到Y的距离，如果M是空集，或仅有一个点，结论显然成立。现设M有一个以上的点，则对$y,z\in$

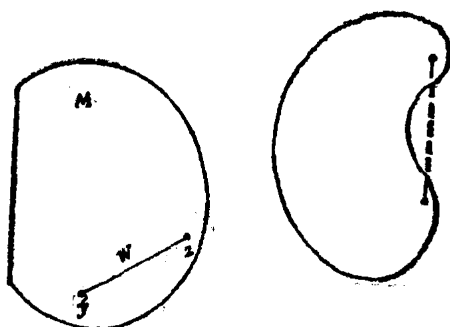


图58　凸集与非凸集

M，按定义有

$$\|x-y\|=\|x-z\|=\delta.$$

我们证明，这就蕴含了

(2)　$w=\alpha y+(1-\alpha)z\in M \quad (0\leqslant\alpha\leqslant1)$.

事实上，因为，$w\in Y$，故$\|x-w\|\geqslant\delta$；又因

$$\begin{aligned}\|x-w\|&=\|\alpha(x-y)+(1-\alpha)(x-z)\|\\&\leqslant\alpha\|x-y\|+(1-\alpha)\|x-z\|\\&=\alpha\delta+(1-\alpha)\delta\\&=\delta,\end{aligned}$$

故$\|x-w\|\leqslant\delta$；这里，应用了$\alpha\geqslant0$及$(1-\alpha)\geqslant0$。于是，$\|x-w\|=\delta$。因此，$w\in M$。因为，$y,z\in M$是任意的，这证明M是凸的。

因而，如果关于x在Y中有若干个最佳逼近，那末，根据定义，当然它们中的每一个都在Y中且到x的距离都是δ。由引理得出，Y和闭球

$$\tilde{B}(x;\delta)=\{v\mid\|v-x\|\leqslant\delta\}$$

必有公共的线段W。显然，W在闭球的界面$S(x;\delta)$上，每个$w\in W$到x的距离为$\|w-x\|=\delta$。其次，对每个$w\in W$，对应唯一的一个$v=\delta^{-1}(w-x)$，其范数$\|v\|=\|w-x\|/\delta=1$。这意味着，由

(2)式给出的每个最佳逼近$w\in W$，对应着单位球面$\{x \mid \|x\|=1\}$上的唯一的一个v.

由此看出，为了得到最佳逼近的唯一性，必须排除使单位球面可以包含直线段的那种范数。这就提出了下述定义。

6.2-2 定义（严格凸性） 严格凸范数是指这样一种范数，对一切范数为 1 的 x,y，有

$$\|x+y\|<2 \quad (x\neq y).$$

具有这种范数的赋范空间叫做严格凸赋范空间。

注意，对$\|x\|=\|y\|=1$，由三角不等式

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|=2.$$

而严格凸性排除了等号，除非$x=y$. 我们可以总结我们的结果为下面的

6.2-3 唯一性定理（最佳逼近） 在严格凸赋范空间X中，关于$x\in X$在给定的子空间Y中至多有一个最佳逼近。

在实际问题中，这个定理能否有用，依赖于我们采用的空间。我们列举两个非常重要的情况。

6.2-4 引理（严格凸性）

(a) Hilbert 空间是严格凸的；

(b) 空间$C[a,b]$非严格凸。

证明. (a)对一切范数为 1 的 x 和 $y\neq x$，有$\|x-y\|=\alpha$，这里，$\alpha>0$. 平行四边形等式(3.1节)给出

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=-\|x-y\|^2+2(\|x\|^2+\|y\|^2)\\&=-\alpha^2+2(1+1)<4,\end{aligned}$$

因此，$\|x+y\|<2$.

(b) 考察x_1和x_2:

$$x_1(t)=1,\quad x_2(t)=\frac{t-a}{b-a},$$

这里，$t\in[a,b]$，显然，$x_1, x_2\in C[a,b]$ 且$x_1\neq x_2$。又$\|x_1\|=\|x_2\|=1$及

$$\|x_1+x_2\|=\max_{t\in J}\left|1+\frac{t-a}{b-a}\right|=2,$$

这里，$J=[a,b]$。这就证明$C[a,b]$非严格凸。

引理的第一个结论是预期的结果，因为，定理 3.3-1 及引理 3.3-2一起蕴含

6.2-5 定理（Hilbert 空间） 对Hilbert 空间H中的每一给定的x及每一给定的H的闭子空间Y，关于x的在Y中的最佳逼近唯一存在（即$y=Px$，这里，P是H到Y上的射影）。

从引理 6.2-4 中的第二个结论看出，在一致逼近中，为了保证唯一性成立，附加某种条件是必需的。

习　　题

1. 设6.1节中，(1)和(2)式里的Y是有限维的. 在什么样的条件下，(2)式中有$\|x-y_0\|=0$?

2. 我们将限于考察赋范空间，但是要指出的某些结论可以推广到一般度量空间中去. 例如，试证明，如果(X,d)是度量空间，Y是紧子集，那末，每一个$x\in X$在Y中有一最佳逼近.

3. 如果Y是赋范空间X的有限维子空间，我们要求$x\in X$在Y中的逼近，自然地，在Y中选择一基$\{e_1,\cdots,e_n\}$，并用线性组合$\sum\alpha_je_j$去逼近x. 证明，相应的函数f:

$$f(\alpha)=\|x-\sum_{j=1}^{n}\alpha_je_j\|,\quad \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

连续地依赖于诸α_j.

4. （凸函数）证明，习题3中的f具有凸的这一有趣的性质．函数f：$R^n \to R^n$叫做凸的，如果它的定义域$\mathscr{D}(f)$是凸集，且对每一对$u, v \in \mathscr{D}(f)$，

$$f(\lambda u+(1-\lambda)v) \leqslant \lambda f(u)+(1-\lambda)f(v),$$

这里，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$（当$n=1$时，如图59所示．凸函数在各种极小化问题中常用到）

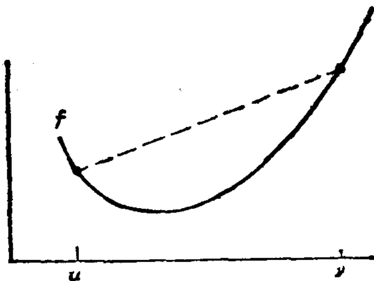


图59　单变数t的凸函数．虚直线段表示$\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)$，这里，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

5. 按(1)式定义的范数非严格凸．不用6.2-3而直接证明这一结论．

6. 考察(1)式．确定闭单位球$\tilde{B}$中到点$x=(2,0)$距离极小的一切点y．确定极小值δ.

7. 证明，实数有序对向量空间中定义范数

$$\|(\xi_1, \xi_2)\| = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$$

是非严格凸的．图示单位球面．

8. 考察一切实数有序对$x=(\xi_1, \xi_2)$．求出到$(0,0)$及$(2,0)$的距离都是$\sqrt{2}$的一切点，如果距离是(a) Euclidean 距离，(b)习题7中的范数导出的距离．

9. 考察一切实数有序对向量空间．命$x_1=(-1,0)$，$x_2=(1,0)$．确定$\|x-x_1\|=1$及$\|x-x_2\|=1$的二球面之交，如果范数是(a) Euclidean 范数；(b)习题7中定义的范数，(c)由(1)式给出的范数．

10. 可以证明l^p $p>1$是严格凸的，但l^1不是严格凸的．证明，l^1非严格凸．

11. 在赋范空间中，如果x在子空间Y中的最佳逼近不唯一，证明，x有无穷多个最佳逼近．

12. 证明，如果范数是严格凸的，则$\|x\|=\|y\|=1$和$x \neq y$蕴含着

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|<1,$$

对一切使$0<\alpha<1$之α皆成立.

证明，对严格凸性，这一条件也是充分的.

13. 证明，如果赋范空间是严格凸的，则

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\| \quad (x\neq 0,\ y\neq 0)$$

蕴含$x=cy$，对某个正实数c.

14. 证明，习题13中的条件不仅必要，对严格凸性而言也是充分的，即是，如果该条件对X中一切非零x和y成立，则X是严格凸的.

15. 向量空间X中的凸集M的极值点是这样的点$x\in M$，x非线段$W\subset M$之内点. 证明，如果X是严格凸赋范空间，则X中单位球面上的每一点都是X中闭单位球的极值点.

6.3 一致逼近

取决于范数的选择，我们得到不同类型的逼近. 而这选择又依赖于我们要达到的目的. 现介绍两个通常的类型如下.

(A) 在$C[a,b]$上，一致逼近采用范数：

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|,\ J=[a,b].$$

(B) 在$L^2[a,b]$上，平方平均逼近采用范数（见3.1-5）

$$\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}=\left(\int_a^b|x(t)|^2dt\right)^{1/2}.$$

本节讨论一致逼近（亦即熟知的 Chebyshev 逼近）. 考察实空间$X=C[a,b]$和n-维子空间$Y\subset C[a,b]$，那末，出现的函数是$[a,b]$上实值连续函数. 对每个函数$x\in X$，定理6.1-1保证了关于x在Y的最佳逼近的存在. 但因$C[a,b]$非严格凸（见6.2-4），唯一性问题需要特别加以研究. 为此目的，下述概念是有趣而且重要.

6.3-1 定义（极值点） $C[a,b]$中的元x的极值点是$t_0\in[a,b]$，使$|x(t_0)|=\|x\|$.

因此，在x的极值点t_0处，或者$x(t_0)=+\|x\|$，或者$x(t_0)=-\|x\|$。由$C[a,b]$上范数的定义表明，这样的点是使$|x(t)|$达极大值的点$t_0\in[a,b]$。

在此，讨论的中心概念是下面的 A. Haar(1918) 条件，此条件将证明是关于$C[a,b]$中逼近唯一性的必要充分条件

6.3-2 定义(Haar条件) 实空间$C[a,b]$的有限维子空间Y叫做满足Haar条件，如果每个$y\in Y$, $y\neq 0$在$[a,b]$上至多有$n-1$个零点，这里，$n=\dim Y$。

例如，$C[a,b]$的n-维子空间Y由多项式$y=0$（通常没有次数定义）和一切次数不超过$n-1$的实系数多项式全体给出 因为，任何这样的多项式$y\neq 0$最多有$n-1$个零点，Y满足Haar条件。实际上，这是提出定义 6.3-2 的一典型情况，现在我们就转到这一情况上来，证明，Haar条件是$C[a,b]$中最佳逼近唯一的必要充分条件。

为了今后工作方便起见，首先，让我们证明：

Haar 条件等价于条件：对每一基$\{y_1,\cdots,y_n\}\subset Y$和在区间$J=[a,b]$中每一组$n$个不同的点$t_1,\cdots,t_n$，

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \cdots & y_1(t_n) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \cdots & y_2(t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \cdots & y_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

证明。每个$y\in Y$有表达式$y=\sum\alpha_k y_k$。子空间Y满足Haar条件当且仅当每个$y=\sum\alpha_k y_k\in Y$在$J=[a,b]$有n个或n个以上的零点$t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots$，则$y$必恒等于零。这就意味着$n$个条件

$$(2)\qquad y(t_j)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k(t_j)=0,\quad j=1,\cdots,n$$

蕴含$\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$。但此种情况发生当且仅当方程组(2)的系数行列式(1)非零.

Haar 条件对最佳逼近的唯一性是充分的这一事实，由下述引理可以得到证明。

6.3-3 引理（极值点） 设实空间$C[a,b]$的子空间Y满足Haar 条件，如果对给定的 $x\in C[a,b]$ 和 $y\in Y$，函数 $x-y$ 少于$n+1$个极值点，那末，y不是关于x的在Y中的最佳逼近，这里，$n=\dim Y$。

证明。按假定，函数$v=x-y$有$m\leqslant n$个极值点$t_1,\cdots,t_m$，如果$m<n$，我们在$J=[a,b]$中任意选择一些附加点t_j，使组成n个不同的点组$t_1,\cdots,t_n$。利用这些点和Y中的基$\{y_1,\cdots,y_n\}$，研究以$\beta_1,\cdots,\beta_n$为未知数的非齐次线性方程组

$$(3)\quad \sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k(t_j)=v(t_j),\quad j=1,2,\cdots,n.$$

因为，Y满足Haar 条件，故(1)式成立。因此，(3)式有唯一解。应用这一解，定义

$$y_0=\beta_1y_1+\cdots+\beta_ny_n$$

及

$$\tilde{y}=y+\varepsilon y_0\qquad(\varepsilon>0).$$

我们证明，对充分小的ε，函数$\tilde{v}=x-\tilde{y}$满足

$$(4)\quad \|\tilde{v}\|<\|v\|.$$

于是，y不可能是x的在Y中的最佳逼近。

为了得到(4)式，估计$\tilde{v}$，分$J=[a,b]$为两个集N和$K=J-N$，这里，N包含v的极值点$t_1,\cdots,t_m$。

在极值点处，$|v(t_i)|=\|v\|$，因$v=x-y\neq 0$，故$\|v\|>0$。

由(3)式和y_0的定义，又有$y_0(t_i)=v(t_i)$。因此，由连续性，对每个t_i，存在一个邻域N_i，使其在$N=N_1\cup\cdots\cup N_m$中有

(5) $\mu=\inf\limits_{t\in N}|v(t)|>0$，$\inf\limits_{t\in N}|y_0(t)|\geqslant\frac{1}{2}\|v\|$。因为，$y_0(t_i)=v(t_i)\neq0$，对一切$t\in N$，由(5)式我们有$y_0(t)/v(t)>0$。同样地由(5)式又有

$$\frac{y_0(t)}{v(t)}=\frac{|y_0(t)|}{|v(t)|}\geqslant\frac{\inf|y_0(t)|}{\|v\|}\geqslant\frac{1}{2},$$

命$M_0=\sup\limits_{t\in N}|y_0(t)|$，那末，对每个正数$\varepsilon<\mu/M_0$和每个$t\in N$，我们得到

$$\frac{\varepsilon y_0(t)}{v(t)}=\frac{\varepsilon|y_0(t)|}{|v(t)|}\leqslant\frac{\varepsilon M_0}{\mu}<1.$$

因为，$\tilde{v}=x-\tilde{y}=x-y-\varepsilon y_0=v-\varepsilon y_0$，应用这些不等式我们看出，对一切$t\in N$和$0<\varepsilon<\mu/M_0$，

(6) $$\begin{aligned}|\tilde{v}(t)|&=|v(t)-\varepsilon y_0(t)|\\&=|v(t)|\left(1-\frac{\varepsilon y_0(t)}{v(t)}\right)\\&\leqslant\|v\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\\&<\|v\|.\end{aligned}$$

现我们转到余集$K=J-N$上，并定义

$$M_1=\sup_{t\in K}|y_0(t)|,\quad M_2=\sup_{t\in K}|v(t)|,$$

因为，N含v的一切极值点，故有$M_2<\|v\|$且可以表

$$\|v\|=M_2+\eta,\ \text{这里}\eta>0.$$

取正数$\varepsilon<\eta/M_1$，则有$\varepsilon M_1<\eta$，于是得到，对一切$t\in K$

$$\begin{aligned}|\tilde{v}(t)|&\leqslant|v(t)|+\varepsilon|y_0(t)|\\&\leqslant M_2+\varepsilon M_1\end{aligned}$$

$<\|v\|.$

我们看出，$|\tilde{v}(t)|$ 不超过一个与 $t\in K$ 无关的界且严格小于 $\|v\|$；类似地，在 (6) 式中，那里 $t\in N$，$\varepsilon>0$ 充分小。取 $\varepsilon<\min\{\mu/M_0, \eta/M_1\}$，并取上确界，于是有 $\|\tilde{v}\|<\|v\|$。此即是(4)式，证明结束。

应用这一引理，我们将得到下面的基本结果。

6.3-4 Haar(最佳逼近)唯一性定理 设 Y 是实空间 $C[a,b]$ 的有限维子空间，那么，对每个 $x\in C[a,b]$ 在 Y 中的最佳逼近是唯一的充分必要条件是 Y 满足 Haar 条件。

证明。(a)充分性。设 Y 满足 Haar 条件，$y_1\in Y$ 和 $y_2\in Y$ 两者都是某固定 $x\in C[a,b]$的最佳逼近，那末，设

$$v_1=x-y_1, \quad v_2=x-y_2$$

则有 $\|v_1\|=\|v_2\|=\delta$，这里，δ 是 x 到 Y 的距离。引理 6.2-1 蕴含 $y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ 也是 x 的最佳逼近。由引理 6.3-3，函数

$$(7) \qquad v=x-y=x-\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$$

至少有 $n+1$ 个极值点 $t_1,\cdots,t_{n+1}$，在这些点处有 $|v(t_j)|=\|v\|=\delta$。由此和(7)式得

$$2v(t_j)=v_1(t_j)+v_2(t_j)=+2\delta \text{ 或 } -2\delta.$$

现因，$|v_1(t_j)|\leqslant\|v_1\|=\delta$（见前），对 v_2 有类似的结果，因此，仅有一种情况才是可能的，换句话说，两项必有相同的符号且最大值为绝对值，即是说

$$v_1(t_j)=v_2(t_j)=+\delta \text{ 或 } -\delta.$$

这里，$j=1,\cdots,n+1$。但这蕴含 $y_1-y_2=v_2-v_1$ 在$[a,b]$中有 $n+1$ 个零点，因此，由 Haar 条件 $y_1-y_2=0$，于是 $y_1=y_2$，此即唯

一性.

(b) 必要性. 设 Y 不满足 Haar 条件, 那末, 我们证明对一切 $x\in C[a,b]$ 最佳逼近不唯一. 联系到 6.3-2 中已证明的结果, 在我们现在的假定下, 存在 Y 的一基和 $[a,b]$ 中的 n 个数 t_j, 使 (1) 式的行列式为零. 因此, 齐次组

$$\gamma_1 y_k(t_1)+\gamma_2 y_k(t_2)+\cdots+\gamma_n y_k(t_n)=0$$

$(k=1,\cdots,n)$ 有非平凡解 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$. 应用此解和任意的 $y=\sum\alpha_k y_k\in Y$, 我们得到

$$(8)\qquad \sum_{j=1}^{n}\gamma_j y(t_j)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Big[\sum_{j=1}^{n}\gamma_j y_k(t_j)\Big]=0,$$

而且, 转置组

$$\beta_1 y_1(t_j)+\beta_2 y_2(t_j)+\cdots+\beta_n y_n(t_j)=0$$

$(j=1,\cdots,n)$ 也有非平凡解 $\beta_1,\cdots,\beta_n$. 应用这一解, 定义 $y_0=\sum\beta_k y_k$. 那末, $y_0\neq 0$ 且在 $t_1,\cdots,t_n$ 处 y_0 为零. 设 λ 使 $\|\lambda y_0\|\leqslant 1$. 又设 $z\in C[a,b]$ 且使 $\|z\|=1$ 及

$$z(t_j)=\operatorname{sgn}\gamma_j=\begin{cases}-1, & \text{如果 } \gamma_j<0,\\ +1, & \text{如果 } \gamma_j\geqslant 0.\end{cases}$$

定义 $x\in C[a,b]$ 为

$$x(t)=z(t)\left(1-|\lambda y_0(t)|\right).$$

那末, 因为 $y_0(t_j)=0$, 有 $x(t_j)=z(t_j)=\operatorname{sgn}\gamma_j$. 又 $\|x\|=1$. 我们证明, 此函数 x 在 Y 中有无穷多个最佳逼近.

应用 $|z(t)|\leqslant\|z\|=1$ 及 $|\lambda y_0(t)|\leqslant\|\lambda y_0\|\leqslant 1$, 对每个 $\varepsilon\in[-1,1]$, 我们得到

$$\begin{aligned}|x(t)-\varepsilon\lambda y_0(t)|&\leqslant|x(t)|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&=|z(t)|\left(1-|\lambda y_0(t)|\right)+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&\leqslant 1-|\lambda y_0(t)|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&=1-(1-|\varepsilon|)|\lambda y_0(t)|\end{aligned}$$

$$\leqslant 1$$

因此，倘若

(9) $\qquad \|x-y\|\geqslant 1$，对一切 $y\in Y$.

则每个 $\varepsilon\lambda y_0$，$-1\leqslant\varepsilon\leqslant 1$ 都是 x 的最佳逼近.

对任意 $y=\sum \alpha_k y_k\in Y$，我们证明(9)式成立．采用间接法证明．设 $\|x-\tilde{y}\|<1$，对某个 $\tilde{y}\in Y$，那末，条件

$$x(t_j)=\operatorname{sgn}\gamma_j=\pm 1$$

连同

$$|x(t_j)-\tilde{y}(t_j)|\leqslant\|x-\tilde{y}\|<1$$

一起蕴含着，对一切 $\gamma_j\neq 0$,

$$\operatorname{sgn}\tilde{y}(t_j)=\operatorname{sgn}x(t_j)=\operatorname{sgn}\gamma_j.$$

因为，若对某个 j，$\gamma_j\neq 0$，于是

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\tilde{y}(t_j)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\operatorname{sgn}\gamma_j=\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j|\neq 0.$$

但这与(8)式中取 $y=\tilde{y}$ 时所得结果矛盾．▌

注意，结果 Y 是次数不超过 n 的一切多项式和多项式 $y=0$（通常在讨论次数时，它是没有次数定义的）之集，那末，$\dim Y=n+1$ 且 Y 满足 Haar 条件．(为什么？)这就得到

6.3-5 定理(多项式) 对实空间 $C[a,b]$中的 x 在 Y_n 中的最佳逼近是唯一的，这里，Y_n 是由 $y=0$ 及一切次数不超过给定 n 的多项式所组成的集.

在此定理中，比较对不同 n 的逼近，并观察当 $n\to\infty$ 时会产生什么情况是值得注意的．命 $\delta_n=\|x-p_n\|$，这里，$p_n\in Y$ 是给定 x 的最佳逼近．因为，$Y_0\subset Y_1\subset\cdots$，故有单调性

(10) $\qquad \delta_0\geqslant\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots$

且 Weierstrass 逼近定理 4.11-5 蕴含

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0. \tag{11}$$

自不待言，定理 6.3-5 刻划了由 Haar 工作开创的那些问题原型的性质。事实上，人们可能感到惊异，为什么在一般情况下不能得到最佳逼近的唯一性，但如果采用多项式却能有唯一性。因此，对此性质，人们可能会问，为什么多项式具有如此"优良的特性"。回答是它们满足 6.3-2 中定义的 Haar 条件。

习　　题

1. 如果$Y\subset C[a,b]$是 n 维子空间且满足Haar条件，证明，Y 中之元在$[a,b]$ 的任意 n 个点组成的子集上的限制构成一向量空间，该空间仍然是 n 维的（然而，通常在这种限制下维数减少）。

2. 命 $x_1(t)=1$ 和 $x_2(t)=t^2$. $Y=\mathrm{Span}\{x_1,x_2\}$是否满足 Haar 条件？如果$Y$视为$(a)C[0,1]$的子空间，$(b)C[-1,1]$的子空间。（要了解产生什么效果作 $x(t)=t^3$ 定义的 x 在这两种情况下的逼近）。

3. 证明，$Y=\mathrm{Span}\{y_1,\cdots,y_n\}\subset C[a,b]$满足 Haar 条件当且仅当由 n 个不同的点组成的每一 n 元组$\{t_1,\cdots,t_n\}\subset[a,b]$，$n$ 个向量 $v_j=(y_1(t_j),\cdots,y_n(t_j))$，$j=1,\cdots,n$ 构成一线性无关集。

4. (**Vandermonde 行列式**) 对

$$y_1(t)=1,\ y_2(t)=t,\ y_3(t)=t^2,\cdots,\ y_n(t)=t^{n-1}$$

表示出(1)式中的行列式。此行列式叫做 Vandermonde 行列式（或Cauchy 行列式）。可以证明，它等于一切因子(t_k-t_j)之积，这里，j 和 k 满足$0\leqslant j<k\leqslant n$。证明，这一结论蕴含存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式，在n 个不同点处有事先指定的值。

5. (**De la Valle´e—Poussin 定理**) 设$Y\subset C[a,b]$满足 Haar 条件且考察任意 $x\in C[a,b]$。如果 $y\in Y$ 是使得在 $[a,b]$ 中 $n+1$ 个相继点处$x-y$交错地取正值和负值，这里，$n=\dim Y$，证明，Y 中的最佳逼近到 x 的距离 δ 无论如何要等于 $x-y$ 在这 $n+1$ 个点处之值的绝对值的最小者。

6. 求由 $x(t)=e^t$ 定义的 $C[0,1]$ 中之元 x 在 $Y=\mathrm{Span}\{y_1,\ y_2\}$ 中的最佳逼近，这里，$y_1(t)=1$，$y_2(t)=t$。将此逼近同线性 Taylor 多项式 $1+t$ 比较一下。

7. 当$x(t)=\sin(\pi t/2)$时，回答习题6中同样的问题。

8. 习题6和7是关于$[a,b]$上二阶导数不变号的函数x的逼近。证明，在此情况下，最佳逼近的线性函数y由$y(t)=\alpha_1+\alpha_2 t$给出，这里，

$$\alpha_1=\frac{x(a)+x(c)}{2}-\alpha_2\frac{a+c}{2},$$

$$\alpha_2=\frac{x(b)-x(a)}{b-a}$$

且c是$x'(t)-y'(t)=0$之解。阐明此公式的几何意义。

9. （不相容线性方程）如果n个未知数的$r>n$个线性方程组

$$\gamma_{j1}w_1+\gamma_{j2}w_2+\cdots+\gamma_{jn}w_n=\beta_j \quad (j=1,\cdots r)$$

是不相容的，它没有解$w=(w_1,\cdots,w_n)$，但是，我们可以考虑使得

$$\max|\beta_j-\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}\zeta_k|$$

尽可能小的"逼近解"。怎样说明，这一问题适合我们现在的考虑，以及在此情况下，Haar条件该取什么样的形式。

10. 为了更好领会习题9的精神，读者可以考察这样的方程组，它是这样的简单以致可以用图形表示$\beta_j-\sum\gamma_{jk}\zeta_k$并求出逼近解。比如说下面的就是这样的方程组

$$w=1,$$
$$4w=2.$$

试图示$f(\zeta)=\max\limits_{j}|\beta_j-\gamma_j\zeta|$。注意，$f$是凸的(见6.2节习题4)。求出按习题9中的条件定义的逼近解ζ。

6.4 Chebyshev 多项式

前节致力于讨论一致逼近理论性方面的结果。剩下的实际问题是，为着可用于计算和其他目的，需要用一个明确公式确定最佳逼近。一般说来，这点并非易事，只有少数函数$x\in C[a,b]$，知道其最佳逼近的显式解。对此，一个有用的工具是下面的概念

6.4-1 （交错集）定义 命$x\in C[a,b]$，$y\in Y$，这里，Y是

实空间 $C[a,b]$的一子空间，$[a,b]$中的点集 $t_0,\cdots,t_k$，$t_0<t_1<\cdots t_k$ 叫做是关于 $x-y$ 的交错集，如果 $x(t_j)-y(t_j)$ 依次在诸点 t_j 处交替地取 $+\|x-y\|$ 和 $-\|x-y\|$。

显然，在定义中的这 $k+1$ 个点是 6.3-1 中定义的 $x-y$ 的极值点，在这些点处 $x-y$ 的值正负交替。

根据下面的引理，交错集的重要性在于，关于 $x-y$ 的充分大的交错集的存在性蕴含 y 是 x 的最佳逼近。事实上，这一条件对 y 为 x 的最佳逼近也是必要的，但因我们不需要这一事实，故不予以证明。（该证明较之我们下面的证明更困难些，见 E. W. Cheney(1966). p.75等等）

6.4-2 引理（最佳逼近） 设 Y 是满足 Haar 条件6.3-2的实空间 $C[a,b]$ 的子空间，给定 $x\in C[a,b]$，命 y 是使 $x-y$ 存在 $n+1$ 个点组成的交错集，这里，$n=\dim Y$，那末，y 是在 Y 中的关于 x 的最佳逼近。

证明。由6.1-1 和 6.3-4，存在 Y 中的关于 x 的唯一的最佳逼近。如果这一最佳逼近不是 y，设它是另外的某一个 $y_0\in Y$，那末

$$\|x-y\|>\|x-y_0\|.$$

这个不等式蕴含，在 $n+1$ 个极值点处函数

$$y_0-y=(x-y)-(x-y_0)$$

有与 $x-y$ 相同的符号，这是因为，在这种点处，$x-y$ 等于 $\pm\|x-y\|$，而在右边的另一项 $x-y_0$ 按绝对值不超过 $\|x-y_0\|$ 且 $\|x-y_0\|$ 严格小于 $\|x-y\|$，这说明 y_0-y 在 $n+1$ 个点处正负交替，于是，它在 $[a,b]$ 中至少有 n 个零点，但这是不可能的，除非 $y_0-y=0$，因为 $y_0-y\in Y$ 而 Y 满足 Haar 条件。因此，y 必是关于 x 的在 Y 中的最佳逼近。

一个很重要的经典问题和这一引理的应用是由下式

(1) $x(t)=t^n$ $\qquad n\in N$ 是固定的

定义的 $x\in C[-1,1]$在 $Y=\mathrm{Span}\{y_0,\cdots,y_{n-1}\}$中的逼近，这里

(2) $y_j(t)=t^j$ $\qquad j=0,1,\cdots,n-1.$

显然，这意味着要求一个$[-1,1]$上的次数小于n的实多项式y去逼近x。这种多项式的形式为

$$y(t)=\alpha_{n-1}t^{n-1}+\alpha_{n-2}t^{n-2}+\cdots+\alpha_0.$$

因此，对$z=x-y$有

$$z(t)=t^n-(\alpha_{n-1}t^{n-1}+\alpha_{n-2}t^{n-2}+\cdots+\alpha_0),$$

并且要求y使$\|z\|$尽可能小。注意，$\|z\|=\|x-y\|$是x到y的距离。从最后一式知，z是一n次多项式且首项系数为1。因此，我们开初的问题等价于下面的一个问题。

在一切n次多项式中求一个多项式z，它的n次项系数为1，且在区间$[-1,1]$上与0的偏差具有最小的极大值。

如果设

(3) $t=\cos\theta$

且命θ从0变到π，那末，t在$[-1,1]$上变动，在$[0,\pi]$上，函数$\cos n\theta$有$n+1$个极值点，其极值为±1（图60）。由引理6.4-2，可以期望用$\cos n\theta$来回答我们的问题，倘若我们可以表$\cos n\theta$为

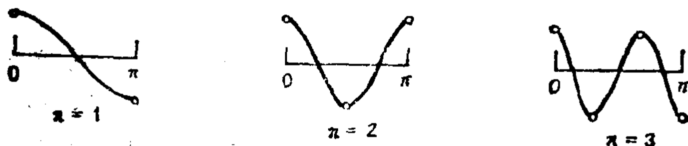


图60 在区间$[0,\pi]$上，$\cos n\theta$的$n+1$个极值点

$t=\cos\theta$的多项式的话。事实上，这是可能的：按归纳法，我们证明存在形如

(4) $$\cos n\theta=2^{n-1}\cos^n\theta+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{nj}\cos^j\theta \quad (n=1,2,\cdots)$$

的表达式，这里 β_{nj} 是常数。

证明。当 $n=1$ 时，此式为真（取 $\beta_{10}=0$）。设对 n 时为真，我们证明对 $n+1$ 时也真。由 cosine 的加法公式得

$$\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta,$$

$$\cos(n-1)\theta=\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta,$$

两端相加，得

(5) $$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta.$$

根据归纳假设，因为

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\theta&=2\cos n\theta\cos\theta-\cos(n-1)\theta\\&=2\cos\theta\left(2^{n-1}\cos^n\theta+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{nj}\cos^j\theta\right)\\&\quad-2^{n-2}\cos^{n-1}\theta-\sum_{j=0}^{n-2}\beta_{n-1,j}\cos^j\theta,\end{aligned}$$

我们看出，此式可以表为要求的形式，

$$\cos(n+1)\theta=2^n\cos^{n+1}\theta+\sum_{j=0}^{n}\beta_{n+1,j}\cos^j\theta.$$

证毕。

我们的问题实际上已获得解决，但在总结我们的结果之前，我们给出一个标准的符号和术语。

形如

(6) $T_n(t)=\cos n\theta$，$\theta=\arccos t$ $(n=0,1,\cdots)$ 的函数叫做 Chebyshev 第一型的 n 次多项式①

---

① T 由 Tchebichef 提出．Tchebichef 是 Чебышев 的音译．Chebyshev 第二型多项式定义为 $U_n(t)=\sin n\theta(n=1,2,\cdots)$.

在(4)式中，首项系数不是1，而是2^{n-1}. 记住这一点时，即得到了关于我们的结果的下面的一个公式，它表达了著名的Chebyshev 多项式的极小性质.

6.4-3 定理(Chebyshev 多项式) 按

$$(7)\quad \widetilde{T}_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\ \arccos t)\quad (n\geqslant 1)$$

定义的多项式，在$[-1,1]$上次数为n首项系数为1的一切实多项式中，在区间$[-1,1]$上与0的偏差具有最小的极大值.

回忆本节初叙述的逼近问题，我们也可以表述这一结果如下：

由$x(t)=t^n$定义的函数$x\in C[-1,1]$，在$Y=\mathrm{span}\{y_0,\cdots,y_{n-1}\}$中的最佳一致逼近是

$$(8)\qquad y(t)=x(t)-\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)\qquad (n\geqslant 1),$$

（即，逼近是次数小于n的实多项式）这里，y_j是按(2)式给出的.

注意，(8)式中最高幂t^n已不存在了，于是，作为t的函数y的次数不超过$n-1$，故合于要求.

定理6.4-3在更一般的问题中也是成立的，如果给的n次实多项式$\tilde{x}$的首项是$\beta_n t^n$，在$[-1,1]$上，我们得到$\tilde{x}$的最佳逼近$\tilde{y}$，这里，$\tilde{y}$是幂次最多为$n-1$的多项式. 于是，我们可以表

$$\tilde{x}=\beta_n x.$$

易知，x的首项为t^n，由定理6.4-3断定$\tilde{y}$必满足

$$\frac{1}{\beta_n}(\tilde{x}-\tilde{y})=\widetilde{T}_n.$$

其解是

$$(9)\qquad \tilde{y}(t)=\tilde{x}(t)-\frac{\beta_n}{2^{n-1}}T_n(t)\qquad (n\geqslant 1).$$

这是(8)式的推广。

chebyshev 多项式的前几项的明显表达式可以很容易地得到。我们看到，$T_0(t)=\cos 0=1$，继之，$T_1(t)=\cos\theta=t$。公式(6)表明(5)式可以表为

$$T_{n+1}(t)+T_{n-1}(t)=2tT_n(t).$$

这一递推公式

$$(10)\qquad T_{n+1}(t)=2tT_n(t)-T_{n-1}(t)\qquad (n=1,2,\cdots)$$

相继地导出（如图61）

$$
\begin{aligned}
&T_0(t)=1 && T_1(t)=t\\
(11^*)\quad &T_2(t)=2t^2-1 && T_3(t)=4t^3-3t\\
&T_4(t)=8t^4-8t^2+1 && T_5(t)=16t^5-20t^3+5t
\end{aligned}
$$

等等，一般的公式是

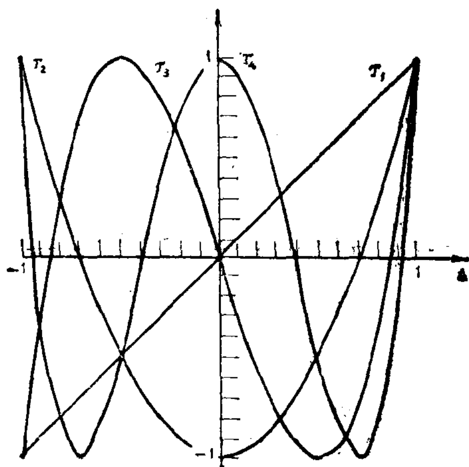


图61 Chebyshev 多项式 T_1,T_2,T_3,T_4

$$(11)\qquad T_n(t)=\frac{n}{2}\sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^j\frac{(n-j-1)!}{j!\,(n-2j)!}(2t)^{n-2j}$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

这里，$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$，当 n 为偶数时；$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$，当 n 为奇数时。

习　　题

1. 验证(11*)式，利用(a)公式(11)；(b)公式(10)。并得出T_6。

2. 试求由 $x(t)=t^3+t^2$，$t\in[-1,1]$定义的 x 的最佳二次多项式逼近 y。图示该结果。极大偏差是什么？

3. 在若干应用中，Chebyshev 多项式的零点是有趣的。证明，T_n 的全部零点是实的单重的且在区间$[-1,1]$之中。

4. T_n 的任二相邻零点之间恰有 T_{n-1} 之一零点。证明这一性质（这一性质叫零点的交织，关于其他一些函数，如 Bessel 函数也出现这一性质）。

5. 证明，T_n 和 T_{n-1} 没有公共零点。

6. 证明，首项为 $\beta_n t^n$，次数 $n\geqslant 1$ 的每一个实多项式 $x\in C[a,b]$ 满足

$$\|x\|\geqslant|\beta_n|\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}.$$

7. 证明，T_n 是微分方程

$$(1-t^2)T_n''-tT_n'+n^2T_n=0$$

的解。

8. 超几何微分方程是

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2w}{d\tau^2}+[c-(a+b+1)\tau]\frac{dw}{d\tau}-abw=0,$$

这里，a,b,c是常数。应用 Frobenius 方法（广义幂级数方法）证明其解由下式给出

$$\begin{aligned}w(\tau)&=F(a,b,c;\tau)\\&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+m-1)b(b+1)\cdots(b+m-1)}{m!c(c+1)\cdots(c+m-1)}\tau^m,\end{aligned}$$

这里，$c\neq 0,-1,-2,\cdots$。右端的级数叫做超几何级数。在什么样的条件，级数化为有穷和？$F(a,b,c;\tau)$叫做超几何函数，它已被人们详细地研究过。许多函数都可以用这种函数来表示，包括 Chebyshev 多项式在内。事实上，可以证明

$$T_n(t)=F\left(-n,n,\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right).$$

9. (正交性) 证明，在 $L^2[-1, 1]$ (参看 2.2-7和3.1-5) 中，由 $(1-t^2)^{-1/4}T_n(t)$定义的诸函数是正交的，即是

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1/2}T_n(t)T_m(t)dt=0 \quad (n\neq m).$$

证明，如果 $m=n=0$，该积分之值为 π；如果 $m=n=1,2,\cdots$，积分值为 $\pi/2$。

10. 我们指出，(3)式暗示了用 Chebyshev 多项式和用 Fourier 级数展开之间的一个关系。作为一个例子，用 Fourier *Cosine* 级数描绘由 $\tilde{x}(\theta)=|\theta|$，$-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$，定义的 $\tilde{x}$，并用 Chebyshev 多项式表示结果。图示这个函数及前几个部分和。

6.5 Hilbert 空间中的逼近

在 Hilbert 空间 H 中，对任给的 x 和一闭子空间 $Y\subset H$，存在Y中的关于 x 的唯一最佳逼近(见6.2-5)。

事实上，定理 3.3-4 给出了

(1a) $\qquad H=Y\oplus Z \qquad\qquad (Z=Y^\perp)$

于是，对每个 $x\in H$，

(1b) $\qquad x=y+z,$

这里，$z=x-y\perp y$，因此 $\langle x-y,\ y\rangle=0$.

如果 Y 是有限维的，比如说 $\dim Y=n$，我们可以用 Y 的一基 $\{y_1,\cdots,y_n\}$如下地确定 y，y 有唯一的表达式

(2) $\qquad y=\alpha_1y_1+\cdots+\alpha_ny_n,$

且 $x-y\perp Y$ 给出了 n 个条件

$$\langle y_j,\ x-y\rangle=\langle y_j,\ x-\sum\alpha_ky_k\rangle=0,$$

即是，

(3) $\qquad \langle y_j,x\rangle-\bar{\alpha}_1\langle y_j,y_1\rangle-\cdots-\bar{\alpha}_n\langle y_j,y_n\rangle=0,$

这里，$j=1,\cdots,n$. 这是n 个未知数 $\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n$ 的 n 个线性方程的非齐次组，系数行列式是

$$(4)\quad G(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}\langle y_1,y_1\rangle\langle y_1,y_2\rangle\cdots\langle y_1,y_n\rangle\\ \langle y_2,y_1\rangle\langle y_2,y_2\rangle\cdots\langle y_2,y_n\rangle\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \langle y_n,y_1\rangle\langle y_n,y_2\rangle\cdots\langle y_n,y_n\rangle\end{vmatrix}$$

因 y 存在且唯一，方程组有唯一解。因此，$G(y_1,\cdots,y_n)$ 必非零。行列式 $G(y_1,\cdots,y_n)$ 叫做 $y_1,\cdots,y_n$ 的 **Gram 行列式**，它由 J. P. Gram (1883) 引出的。当其不引起混淆时，为了简单起见，将 $G(y_1,\cdots,y_n)$ 记为 G。

由 Gram 法则得出 $\alpha_j=\bar{G}_j/\bar{G}$，这里，一横"—"表示复共轭，$G$ 由(4)式给出，G_j 是G用元$\langle y_1,x\rangle,\cdots,\langle y_n,x\rangle$ 组成的列代替G 的第 j 列而得到的。

注意一个有用的与G 有关的判别准则：

6.5-1 (线性无关)定理 Hilbert空间H中的一组元 $y_1,\cdots,y_n$ 构成 H 中的一线性无关集的充分必要条件

$$G(y_1,\cdots,y_n)\neq 0.$$

证明。前面的论述已证明，当线性无关时，$G\neq 0$；另一方面，如果 $\{y_1,\cdots,y_n\}$是线性相关的，向量中的某一个，比如说 y_j 是其余各向量的一线性组合，那末，G 的第 j 列是其余各列的线性组合，于是，$G=0$.

有趣的是 x 和它的最佳逼近 y 之间的距离$\|z\|=\|x-y\|$ 也可以用 Gram 行列式表示出来。

6.5-2 定理（距离） 如果 $\dim Y<\infty$且$\{y_1,\cdots,y_n\}$是Y的任意一基，那末

$$(5)\qquad \|z\|^2=\frac{G(x,y_1,\cdots,y_n)}{G(y_1,\cdots,y_n)}.$$

这里，按定义

$$G(x,y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}\langle x,x\rangle\langle x,y_1\rangle\cdots\ \langle x,y_n\rangle\\ \langle y_1,x\rangle\langle y_1,y_1\rangle\cdots\langle y_1,y_n\rangle\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \langle y_n,x\rangle\langle y_n,y_1\rangle\cdots\langle y_n,y_n\rangle\end{vmatrix}$$

证明。我们有$\langle y,z\rangle=0$，这里，$z=x-y$。于是，由(2)式得，

$$\|z\|^2=\langle z,z\rangle+\langle y,z\rangle=\langle x,x-y\rangle=\langle x,x\rangle-\langle x,\sum\alpha_k y_k\rangle,$$

上式可以表为

$$(6)\qquad -\|z\|^2+\langle x,x\rangle-\bar{\alpha}_1\langle x,y_1\rangle-\cdots-\bar{\alpha}_n\langle x,y_n\rangle=0$$

再注意(3)中的n个方程：

$$\langle y_j,x\rangle-\bar{\alpha}_1\langle y_j,y_1\rangle-\cdots-\bar{\alpha}_n\langle y_j,y_n\rangle=0,$$

这里，$j=1,\cdots,n$。方程(6)和(3)一起可视为$n+1$个"未知数" $1, -\bar{\alpha}_1,\cdots,-\bar{\alpha}_n$的$n+1$ 线性方程组成的齐次组。因为方程组有非平凡解，故它的系数行列式必是零，即

$$(7)\qquad \begin{vmatrix}\langle x,x\rangle-\|z\|^2 & \langle x,y_1\rangle\cdots\langle x,y_n\rangle\\ \langle y_1,x\rangle+0 & \langle y_1,y_1\rangle\cdots(y_1,y_n\rangle\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \langle y_n,x\rangle+0 & \langle y_n,y_1\rangle\cdots\langle y_n,y_n\rangle\end{vmatrix}=0,$$

我们可以表此行列式为两个行列式之和，第一个行列式是$G(x,y_1,\cdots,y_n)$，第二个行列式在第一列上的元为$-\|z\|^2$，$0,\cdots,0$；按列展开它，易知，可表(7)式为

$$G(x,y_1,\cdots,y_n)-\|z\|^2G(y_1,\cdots,y_n)=0.$$

由6.5-1，$G(y_1,\cdots,y_n)\neq 0$，这就得到(5)式。

如果(5)式中的基是规格正交的，那末，$G(y_1,\cdots,y_n)=1$（为什么？），且按第一行展开$G(x,y_1,\cdots,y_n)$，并注意$\langle x,y_1\rangle\langle y_1,x\rangle=|\langle x,y_1\rangle|^2$等等，由(5)式得

(8) $$\|z\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,y_k\rangle|^2.$$

这同 3.4 节中(11)式一致，如果这里 y_k 用 e_k 表示的话。

习　　题

1. 证明，改变$y_1,\cdots,y_n$之顺序，$G(y_1,\cdots,y_n)$之值保持不变。

2. 证明

$$G(\cdots,\alpha y_j,\cdots)=|\alpha|^2G(\cdots,y_j,\cdots)$$

这里，两端用点表示的诸 y_k 是相同的。

3. 如果 $G(y_1,\cdots,y_n)\neq 0$，证明，$G(y_1,\cdots,y_j)\neq 0$，$j=1,\cdots,n-1$。如果 $G(y_1,\cdots,y_n)=0$，求一类似的关系。

4. 用 Gram 行列式表达 Schwarz 不等式。用定理 6.5-1 得出其等号成立的条件（参看3.2-1）。

5. 证明，$G(y_1,\cdots,y_n)\geqslant 0$。由此断定，Hilbert 空间中有穷子集是线性无关的当且仅当其元的 Gram 行列式是正数。

6. 证明，

$$G(y_1,\cdots,y_{n-1},y_n+\alpha y_j)=G(y_1,\cdots,y_n)\ (j<n),$$

并指出如何用这一关系以得到定理 6.5-2。

7. 设 $M=\{y_1,\cdots,y_n\}$是 Hilbert 空间H中的线性无关集。证明，对任意子集$\{y_k,\cdots,y_m\}$（这里，$k<m<n$），

$$\frac{G(y_k,\cdots,y_n)}{G(y_{k+1},\cdots,y_n)}\leqslant\frac{G(y_k,\cdots,y_m)}{G(y_{k+1},\cdots,y_m)}.$$

为什么这个在几何上是可能的？证明，

$$\frac{G(y_m,\cdots,y_n)}{G(y_{m+1},\cdots,y_n)}\leqslant G(y_m).$$

8. 设 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 是 Hilbert 空间H中的线性无关集。证明，对 $m=1,\cdots,n-1$，有

$G(y_1,\cdots,y_n)\leqslant G(y_1,\cdots,y_m)G(y_{m+1},\cdots,y_n)$且等号成立当且仅当每个$M_1=\{y_1,\cdots,y_m\}$的元同每个$M_2=\{y_{m+1},\cdots,y_n\}$中的元正交（利用习题7）。

9. （Hadamard 行列式定理）证明，在习题 8 中，

$$G(y_1,\cdots,y_n)\leqslant\langle y_1,y_1\rangle\cdots\langle y_n,y_n\rangle,$$

且等号成立当且仅当诸 y_j 彼此正交。利用这一结果，证明，n——行实方

阵$A=(a_{jk})$的行列式满足

$$(\det A)^2\leqslant a_1\cdots a_n,\ 这里,\ a_j=\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|^2.$$

10. 证明，线性无关集$\{x_1,x_2,\cdots\}$在Hilbert空间H中稠密当且仅当对每个$x\in H$，

$$\frac{G(x,x_1,\cdots,x_n)}{G(x_1,\cdots,x_n)}\to 0\quad(n\to\infty)$$

6.6 样条函数

样条函数逼近就是逐段的多项式逼近，这即是说，用这样的函数y来逼近区间$[a,b]=J$上的一给定的函数x，此种y在$[a,b]$的一分割的每一子区间中以多项式的方式给出，(每个子区间一个多项式)，要求y在这些子区间的公共端点处还若干次可微。因此，在整个区间$[a,b]$上用一个简单多项式来作为x的逼近，现在改用n个多项式来逼近x，这里，n是分割的子区间的个数。在这一方法中，我们失去了解析性，但仍可以得逼近函数y。在许多逼近和插值问题中，这种y更为适用。比如，它们可能不象在$[a,b]$上用一个多项式逼近时通常在节点之间产生的那种振动。因为样条函数在实用上愈来愈重要。我们给出一个简单的介绍。

最简单的连续逐段多项式逼近是逐段线性的函数。但这种函数在某些点处（子区间的端点）不可微，因此，最好采用在$[a,b]$上各处有某次导数的函数。

我们考察$J=[a,b]$上三次样条函数。根据定义，就是指在$[a,b]$上两次连续可微的实值函数y；这表为

$$y\in C^2[a,b],$$

且在J的给定分割P_n：

$$(1)\qquad a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

的每一个子区间中，这一函数y与次数不超过3的多项一致。我

们叫 t_j 为 P_n 的节点且用

$$Y(P_n)$$

表示这种三次样条函数组成的相应的向量空间。

现在让我们来阐述在 $[a,b]$ 上，给出的实值函数 x 可以怎样用样条函数来逼近。首先选择形如(1)式的 $J=[a,b]$ 的一分割。要求的关于 x 的逼近可以用内插法得到，这是确定逼近函数的有效的重要方法之一。x 按 y 的**插值**意味着构造一个 y，使得在节点 $t_0, \cdots, t_n$ 的每一点处，函数 y 与 x 有相同的值。经典插值法意味着用一插值公式（比如 Lagrange, Newton 或 Everett）获得一个在 $[a,b]$ 上的简单的 n 次多项式，在每个节点处它的值与 x 的值相同。这种多项式逼近 x，在节点附近是非常良好的，但在远离节点的地方偏差可能相当大。在用三次样条函数的样条插值法中，适当地定义样条函数 y，使在每一个节点处它的值同 x 的值一致。我们证明这种 y 存在；如果我们指定在区间端点 a 和 b 处的导数 y' 的值，所给的 y 还是唯一的，这就是下述定理的内容。

6.6-1 （样条插值）定理 设 x 定义在 $J=[a, b]$ 上的实值函数，p_n 是形如(1)式的 J 的任一分割，k_0' 和 k_n' 是任二实数，那末，存在唯一的三次样条函数 $y \in Y(p_n)$ 满足 $n+3$ 个条件

$$(2)\quad \begin{array}{ll} (a) & y(t_j)=x(t_j) \\ (b) & y'(t_0)=k_0', \quad y'(t_n)=k_n' \end{array}$$

这里，$j=0, 1, \cdots, n$。

证明. 在每一个子区间 $I_j=[t_j, t_{j+1}]\subset J\ (j=0, \cdots, n-1)$ 上的样条函数 y 必须同一个三次多项式 p_j 一致且使

$$p_j(t_j)=x(t_j), \qquad p_j(t_{j+1})=x(t_{j+1}).$$

我们记 $1/(t_{j+1}-t_j)=\tau_j$ 和

$$p_j'(t_j)=k_j', \qquad p_j'(t_{j+1})=k_{j+1}',$$

k_0' 和 k_n' 是给定的常数，$k_1', \cdots, k_n'$ 是在以后待定的。通过直接

的计算可以验证，满足上述四个条件的唯一三次多项式由下式给出：

$$
\begin{aligned}
p_j(t)=&x(t_j)\tau_j^2(t-t_{j+1})^2[1+2\tau_j(t-t_j)]\\
&+x(t_{j+1})\tau_j^2(t-t_j)^2[1-2\tau_j(t-t_{j+1})]\\
&+k_j'\tau_j^2(t-t_j)(t-t_{j+1})^2\\
&+k_{j+1}'\tau_j^2(t-t_j)^2(t-t_{j+1}),
\end{aligned}
$$

微分两次，得

$$(3)\qquad p_j''(t_j)=-6\tau_j^2x(t_j)+6\tau_j^2x(t_{j+1})-4\tau_jk_j'-2\tau_jk_{j+1}',$$

$$(4)\qquad p_j''(t_{j+1})=6\tau_j^2x(t_j)-6\tau_j^2x(t_{j+1})+2\tau_jk_j'+4\tau_jk_{j+1}'.$$

因为，$y\in C^2[a,\ b]$，二相应的多项式的二阶导数在诸节点处一致：

$$p_{j-1}''(t_j)=p_j''(t_j)\qquad j=1,\cdots,n-1.$$

利用(4)式，其中$j-1$代替j，以及(3)式，易知，这$n-1$个方程为

$$\tau_{j-1}k_{j-1}'+2(\tau_{j-1}+\tau_j)k_j'+\tau_jk_{j+1}'=3[\tau_{j-1}^2\Delta x_j+\tau_j^2\Delta x_{j+1}],$$

这里，$\Delta x_j=x(t_j)-x(t_{j-1})$和$\Delta x_{j+1}=x(t_{j+1})-x(t_j)$，$j=1,\cdots,n-1$。由$n-1$个线性方程构成的这一方程组有唯一解$k_1',\cdots,k_{n-1}'$。事实上，因为系数矩阵的一切元都是非负的且在主对角线上的每一元比同一行中另外的元之和大，即由定理 5.2-1 得出这一结论。因此，我们能唯一确定出在诸节点处y的一阶导数的值$k_1',\cdots,k_{n-1}'$，证毕。▌

我们导出一个有趣的极小性性质来结束样条函数的这一导论。在定理 6.6-1 中，设$x\in C^2[a,\ b]$且(2b)式取形式

$$(5)\qquad y'(a)=x'(a)\qquad\qquad y'(b)=x'(b),$$

那末，$x'-y'$在a和b处为0，按部分积分法，我们得

$$\int_a^b y''(t)[x''(t)-y''(t)]dt=-\int_a^b y'''[x'(t)-y'(t)]dt.$$

因为，y'''在分割的每一子区间上是常数，按(2a)，右边的积分是0，这就证明了

$$\int_a^b [x''(t)-y''(t)]^2dt=\int_a^b x''(t)^2dt-\int_a^b y''(t)^2dt.$$

左边被积函数是非负的，因而，积分也是非负的。因此，如果$x\in C^2[a, b]$和y是相应于x，$[a, b]$的分割p_n及满足(2a)，(5)式的三次样条函数，我们有

$$(6)\qquad \int_a^b x''(t)^2dt\geqslant\int_a^b y''(t)^2dt.$$

等号成立的充分必要条件x是三次样条函数y。这就是样条函数的极小性性质。且说明了得名的原由。长期以来，工程技术人员用称为样条的细杆来适合通过给定点的曲线，由这样的样条而极小化的应能，几乎与样条的二阶导数平方之积分成比例。

关于高阶样条，多变数样条，收敛问题，应用及其他论题参看 A. Sard 和 S. Weintrand (1971). PP.101～119.

习　　题

1. 证明，相应于区间$[a,b]$的给定分割P_n的一切三次样条函数构成一向量空间。该空间的维数是什么?

2. 证明，对给定的形如(1)式的分割P_n，唯一存在$n+1$个样条函数$y_0,\cdots, y_n$使

$$y_j(t_k)=\delta_{jk}$$
$$y_j'(a)=y_j'(b)=0.$$

怎样利用这些结果得出$Y(P_n)$的一基?

3. 用相应于分割$P_2=\{-1,0,1\}$且满足(2a)和(5)式的三次样条函数去逼近$[-1,1]$上由$x(t)=t^4$定义的x。首先猜测y可能是什么样子的，然后再计算它。

4. 设x在$[-1,1]$上由$x(t)=t^4$确定。求次数不超过3的一切多项式空间中的x的Chebyshev逼近$\tilde{y}$。$\tilde{y}$满足(2a)和(5)式吗？图示并比较

$\bar{y}$ 和习题 3 的解答给出的样条逼近。

5. 证明，习题 4 中的 Chebyshev 逼近到 x 的偏差，比之习题 3 中的样条逼近到 x 的偏差较大。并予以评述。

6. 如果$[a,b]$上的三次样条函数 y 是三次连续可微的，证明 y 必是一多项式。

7. 有时可能发生这种情况，在$[a,b]$的相邻子区间中，样条函数用同样的多项式表示。为了说明这一情况，求一个相应于 x的关于分割$\{-\pi/2, 0, \pi/2\}$的样条函数 y，满足(2a)和(5)式，这里，$x(t)=\sin t$。

8. (6)式的几何解释是，三次样条函数使曲率平方的积分极小。并予以说明。

9. 对 x，$y\in C^2[a,b]$，定义

$$\langle x,y\rangle_2=\int_a^b x''(t)y''(t)dt,\quad p(x)=\langle x,x\rangle_2^{1/2},$$

这里，下标 2 表示我们所用的是二阶导数。证明，p 是半范数(见 2.3节，习题12)，但不是范数。用$\langle x,y\rangle_2$ 和 P 表示正文中给出的(6)式。

10. 证明，对任一 $x\in C^2[a,b]$和它的满足(2a)和(5)式的样条函数 y，我们可以用 p (见习题 9) 来估计偏差

$$\|x-y\|_2\leqslant p(x),$$

且同分割的特殊选择无关。

第 七 章

赋范空间中线性算子的谱理论

谱论是现代泛函分析及其应用的一个主要分支。粗略地说，它涉及的是某些逆算子，这些逆算子的一般性质以及它们同原算子的关系。在处理解方程的问题之中，这种算子出现得十分自然（如在线性代数方程组，微分方程，积分方程中）。例如，Sturm，Liouville 的边值问题和著名的 Fredholm 积分方程理论的研究对发展这一领域起了重要的作用。

为了了解算子本身，如我们将看到的，算子的谱论是非常重要的。

在第 7 章到 9 章中，我们给出赋范空间和内积空间上有界线性算子 $T:X\to X$ 谱论的一个导论。包含研究非常有趣的一类算子，特别是紧算子（第 8 章），自伴算子（第 9 章）。酉算子的谱论，在稍后一点的 10.5 节给出（阅读该节不用参考 10 章中其他各节）。

在 Hilbert 空间中的无界线性算子将放在第 10 章中，它们在量子力学中的应用放在第 11 章中（这两章是选读材料）。

第七章的主要内容之方向摘要

我们从有限维向量空间开始，此时的谱论实质上是矩阵的特征值理论（见 7.1 节），它比之于无限维空间中的算子来是非常

简单的。但是，它却是很重要的，在此领域中的研究论文的数量甚为庞大，而其中大量的属于数值分析。矩阵的特征值问题也暗示了一般框架的某些部分和在无限维赋范空间（如7.2节所定义）中谱论的若干概念，虽然无限维的情况比有限维情况远为复杂。

在赋范空间和Banach空间上有界线性算子谱的重要性质，放在7.3节和7.4节中讨论。

在谱论中，复分析是一有用的工具，但我们局限在一个初等的程度，在此方面，我们给出某些基本事实的一个介绍。如果读者没有这方面的准备，相应章节（7.5节）可以略去。

在7.6节和7.7节中证明的某些结果可以推广到Banach代数上去。

一般假定

我们不考察平凡向量空间$\{0\}$，除非特别申明之外，总是假定一切空间都是复的，这是为了获得一个满意的理论。

7.1 有限维赋范空间中的谱理论

设X是有限维赋范空间，$T:X\to X$是线性算子。这种算子的谱论比定义在无限维空间上的算子简单。事实上，由2.9节已知，可以用矩阵（依赖于X的基的选择）表示T。我们将看到T的谱论实质上是矩阵的特征值理论。于是，我们从矩阵开始。

注意，本节是属于代数的内容，但从下一节起，我们将应用范数的概念。

对给定的（实或复）n—行方阵$A=(\alpha_{jk})$，特征值和特征向量的概念由方程

$$(1)\qquad Ax=\lambda x$$

定义如下

7.1-1定义 （特征值，特征向量，特征空间，谱，矩阵的豫解集） 方阵的特征值是使(1)式有解 $x \neq 0$ 的数 λ。这时，x 叫做 A 的相应于特征值 λ 的特征向量。相应于特征值 λ 的诸特征向量及零向量构成 X 的一向量子空间，叫做 A 的相应于特征值 λ 的特征空间。A 的一切特征值之集 $\sigma(A)$ 叫做 A 的谱。其余集 $\rho(A)=C-\sigma(A)$ （C—复平面）叫做 A 的豫解集。

例如直接计算可证

$$x_1=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix},\quad x_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\text{是 } A=\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}$$

的分别相应于特征值 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=1$ 的特征向量。如何得到这一结果的呢？又在一般情况下，矩阵特征值存在性条件是什么呢？

为了回答这些问题，首先注意，(1)式可以表为

$$(2)\qquad (A-\lambda I)=0$$

这里，I 是 n—行单位矩阵。这是 x 的分量 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为未知数的 n 个线性方程的齐次方程组，系数行列式是 $det(A-\lambda I)$。$det(A-\lambda I)$ 必须是零时，(2)式才有解 $x\neq 0$，这就给出 A 的**特征方程**：

$$(3)\qquad det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

$det(A-\lambda I)$ 叫做 A 的**特征行列式**。展开此行列式得 λ 的一 n 次多项式，叫做 A 的特征多项式。方程(3)叫做 A 的特征方程。

基本的结果是

7.1-2 定理(矩阵的特征值) n—行方阵 $A=(a_{jk})$ 的特征

值由A的特征方程（3）的解得出。因此，A至少有一个特征值（至多n个不同的特征值）。

第二个结论成立，因为，根据代数学中的所谓基本定理和因子分解定理，正n次多项式，且其系数在**C**中，则在**C**中必有根（至多有n个不同的根），其根可以是复的，也可以是实的，甚至A是实的也如此。

在上述例子中，

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+6=0,$$

谱是$\{6, 1\}$，相应于6和1的A的特征向量分别从

$$\begin{aligned} -\xi_1+4\xi_2&=0 \\ \xi_1-4\xi_2&=0 \end{aligned} \qquad \text{和} \qquad \begin{aligned} 4\xi_1+4\xi_2&=0 \\ \xi_1+\xi_2&=0 \end{aligned}$$

得到。注意，在每一种情况下，我们只需要两个方程中的一个就可以了（为什么？）

怎样应用我们的结果于n维赋范空间X上的线性算子$T: X \to X$呢？设$\{e_1, \cdots, e_n\}=e$是X的任意一基。在此基（其中元的序取定）下，T的矩阵表示设为$T_e=(\alpha_{jk})$，则T_e的特征值叫做算子T的**特征值**，类似地可以定义谱、豫解集等，这些之所以合理是由于

7.1-3 定理（算子特征值） 在有限维赋范空间X上，在X的各种基下，表示线性算子$T: X \to X$的一切矩阵有相同的特征值。

证明．我们观察从X的一个基变到另一个基会发生什么样的结果。设$e=\{e_1, \cdots, e_n\}$，$\tilde{e}=\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n\}$是$X$的任意的基，记作行向量形式。按基的定义，每个$e_j$是诸$\tilde{e}_k$的线性组合；反之也一样。将此表为

$$(4) \qquad \tilde{e}=eC \quad \text{或} \quad \tilde{e}^{\mathsf{T}}=C^{\mathsf{T}}e^{\mathsf{T}}$$

这里，C是非奇异的n—行方阵．每个$x \in X$，关于两个基中的每

一个都有唯一的表达式，比如说

$$x=ex_1=\sum\xi_j e_j=\tilde{e}x_2=\sum\tilde{\xi}_k\tilde{e}_k,$$

这里，$x_1=(\xi_j)$，$x_2=(\tilde{\xi}_k)$是列向量. 由此和(4)式有$ex_1=\tilde{e}x_2=eCx_2$，因此

$$(5)\qquad x_1=Cx_2.$$

类似地，对$Tx=y=ey_1=\tilde{e}y_2$有

$$(6)\qquad y_1=Cy_2.$$

因此，如果T_1，T_2分别是关于e和$\tilde{e}$的T的矩阵表示，则

$$y_1=T_1x_1 \quad 和 \quad y_2=T_2x_2$$

由此和(5)式，(6)式得

$$CT_2x_2=Cy_2=y_1=T_1x_1=T_1Cx_2,$$

用C^{-1}作用得一变换规律

$$(7)\qquad T_2=C^{-1}T_1C,$$

C是由基按(4)式确定的(不依赖于T). 利用(7)式和$det(C^{-1})\times detC=1$，可以证明T_2和T_1的特征列行式是相等的;

$$\begin{aligned}det(T_2-\lambda I)&=det(C^{-1}T_1C-\lambda C^{-1}IC)\\&=det(C^{-1}(T_1-\lambda I)C)=det(C^{-1})det(T_1-\lambda I)detC\\&=det(T_1-\lambda I).\end{aligned}$$

现由定理7.1-2得出T_1和T_2的特征值相同. ▌

顺便说一下，也可以用下面的概念来表述我们的结果. $n\times n$矩阵T_2叫做与$n\times n$矩阵T_1相似，如果存在非奇异矩阵C使(7)式成立. 这时T_1和T_2叫做相似的矩阵. 按此概念，我们的证明表明:

(i) 在有限维赋范空间X上，同一线性算子关于任意二基的二表示矩阵是相似的.

(ii) 相似矩阵有相同的特征值.

因而，定理 7.1-2 和定理 7.1-3 蕴含

7.1-4 存在定理（特征值） 在有限维复赋范空间 $X\neq\{0\}$ 上的线性算子至少有一个特征值。

一般我们就不再说得更多的了（见习题13）。

而且，(8)式当 $\lambda=0$ 时得出 $\det T_2=\det T_1$。因此，行列式之值表示了算子 T 的一个内蕴性质，因此我们可以论及 $\det T$ 而不含混。

习　题

1. 求下面矩阵的特征值和特征向量，

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -8 & 11\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix},$$

这里，a 和 b 是实的且 $b\neq 0$。

2. **(Hermitiam 矩阵)** 证明，Hermitiam 矩阵的特征值是实的（定义在 3.10 节中）。

3. **(反—Hermitiam 矩阵)** 证明，反—Hermitiam 矩阵 $A=(\alpha_{jk})$ 的特征值是纯虚数或零（定义在 3.10 节中）。

4. **(酉矩阵)** 证明，酉矩阵的特征值的绝对值是 1（定义在 3.10 节中）。

5. 设 X 是有限维内积空间而 T 是 $X\to X$ 的线性算子。如果 T 是自伴的，证明，T 的谱是实的。如果 T 是酉算子，T 的特征值的绝对值为 1。

6. **(迹)** 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n—行方阵 $A=(\alpha_{jk})$ 的 n 个特征值，这里，某些或全部 λ_j 可以相等。证明，特征值之积等于 $\det A$，它们的和等于 A 的迹，即是，主对角线上元素之和：

$$\mathit{trace}A=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn}.$$

7. **(逆)** 证明，方阵 A 之逆 A^{-1} 存在当且仅当 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 非零。如果 A^{-1} 存在，证明，A^{-1} 的特征值为 $1/\lambda_1,\cdots,1/\lambda_n$。

8. 证明，二行的非奇异矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\text{有逆}\quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

由此公式，如何得出 A^{-1} 有特征值 $1/\lambda_1$，$1/\lambda_2$，这里，λ_1, λ_2 是 A 的特征值。

9. 如果方阵 $A=(\alpha_{jk})$ 有特征值 $\lambda_j, j=1,\cdots,n$，证明，kA 有特征值 $k\lambda_j$；$A^m(m\in N)$ 有特征值 λ_j^m。

10. 如果方阵 $A=(\alpha_{jk})$ 有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，$p$ 是任意一个多项式，证明，矩阵 $p(A)$ 有特征值 $p(\lambda_j)$，$j=1,\cdots,n$。

11. 如果 x_j 是 n—行方阵 A 的相应于特征值 λ_j 的特征向量，C 是任意非奇异 n—行方阵，证明，λ_j 是 $\tilde{A}=C^{-1}AC$ 的一特征值且相应的特征向量是 $y_j=C^{-1}x_j$。

12. 用一简单例子说明，n—行方阵可以没有构成 R^n（或 C^n）之基的特征向量。比如考察

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. （重数）矩阵 A 的特征值 λ 的代数重数是指 λ 作为特征多项式的根的重数。相应于 λ 的 A 的特征空间的维数叫做 λ 的几何重数。求相应于下面变换的矩阵的特征值和它的重数，并予以评述，

$$\eta_j=\xi_j+\xi_{j+1}\quad (j=1,\cdots,n-1),\quad \eta_n=\xi_n.$$

14. 证明，特征值的几何重数不超过代数重数（见习题13）。

15. 设空间 X 由次数不超过 $n-1$ 的一切多项式及多项式 $x=0$（在通常的次数讨论中，它的次数是没有定义的）组成的，T 是 X 上的微分算子。求 T 的一切特征值和特征向量，以及它们的代数重数和几何重数。

7.2 基本概念

在前节中，空间是有限维的。在本节中，考察任意维赋范空间，并将看到，在无限维空间中，谱论变得甚为复杂。

设 $X\neq\{0\}$ 是复赋范空间，且 $T:\mathscr{D}(T)\to X$ 是具定义域 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 的线性算子。与每一 T 相联系一算子

(1) $$T_\lambda=T-\lambda I,$$

这里，λ 是复数，I 是 $\mathscr{D}(T)$ 上的恒等算子。如果 T_λ 有逆，则用

$R_\lambda(T)$表示，即是

(2) $\quad R_\lambda(T)=T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1}$

并称为T的豫解算子，或者简单地叫做T的**豫解式**①。当其不产生混淆时，也简记为R_λ

"豫解"这一名称是恰当的，因为，$R_\lambda(T)$帮助我们解方程$T_\lambda x=y$．于是，$x=T_\lambda^{-1}y=R_\lambda(T)y$，倘若$R_\lambda$存在的话。

更为重要的，为了通晓算子T自身的性质，研究R_λ的性质将是一个基本的问题．自然地，T_λ和R_λ的许多性质都依赖于λ．谱论就是研究同这些性质的．例如，我们将关心复平面中使R_λ存在的一切λ组成的集．R_λ的有界性是另一个带根本性的问题．我们也将考察，对什么样的λ，R_λ的定义域在X中稠密．

进而注意，$R_\lambda(T)$是线性算子（由定理2.6-10(6)）．

为了研究T，T_λ和R_λ，我们必须下面的谱论中的基本概念．

7.2-1 定义(正则值，豫解集，谱) 设$X\neq\{0\}$是复赋范空间，$T:\mathscr{D}(T)\to X$是定义域$\mathscr{D}(T)\subset X$的线性算子．T的正则值λ是一复数，且使

(R1) $\quad R_\lambda(T)$存在，

(R2) $\quad R_\lambda(T)$有界，

(R3) $\quad R_\lambda(T)$是定义在X中之一稠密集上．T的**豫解集**$\rho(T)$是T的一切正则值λ组成之集．其余集$\sigma(T)=C-\rho(T)$叫做T的**谱**，$\lambda\in\sigma(T)$叫做T的**谱值**．谱$\sigma(T)$又分为如下三个不相交的集．

点谱或者**离散谱**$\sigma_p(T)$是使$R_\lambda(T)$不存在的一切λ组成之

---

① 有些著作者用$(\lambda I-T)^{-1}$定义豫解式，在较早的积分方程著作中用$(I-\mu T)^{-1}$定义豫解式．当然，变为(2)是简单的事，但也是一个讨厌的事．建议读者，对各种有关谱论出版物作比较之前，先行检验这一点．

集．$\lambda \in \sigma_p(T)$叫做T的特征值．

连续谱$\sigma_c(T)$是使$R_\lambda(T)$存在并满足(R_3)，但不满足(R_2)的一切λ组成之集，即$R_\lambda(T)$是无界的．

剩余谱$\sigma_r(T)$是使$R_\lambda(T)$存在（可以有界，也可以无界）但不满足(R_3)，即，$R_\lambda(T)$的定义域不在X中稠密．

为了避免不必要的误会，我们指出，定义中的某些集可以是空的．关于它们的存在问题是我们将定要讨论的．例如，在有限维的情况下，$\sigma_c(T)=\sigma_r(T)=\phi$，这在上一节中已经知道了．

定义 7.2-1 中叙述的条件可以总结在下表之中．

满　　足	不　满　足	λ　属　于
$(R_1),(R_2),(R_3)$		$\rho(T)$
	(R_1)	$\sigma_p(T)$
(R_1)　(R_3)	(R_2)	$\sigma_c(T)$
(R_1)	(R_3)	$\sigma_r(T)$

为了更进一步明瞭这些概念，我们先做如下的一些注记．

首先注意，表中列出的四个集是不相交的，其和是整个复平面：

$$C=\rho(T)\cup\sigma(T)=\rho(T)\cup\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)$$

而且，如前面所述，如果$R_\lambda(T)$存在，由定理 2.6-10 它是线性的．该定理也证明$R_\lambda(T):\mathscr{R}(T_\lambda)\to\mathscr{D}(T_\lambda)$存在当且仅当$T_\lambda x=0$蕴含$x=0$，即，$T_\lambda$的零空间是$\{0\}$，这里，$\mathscr{R}(T_\lambda)$表示$T_\lambda$的值域（见 2.6 节）．

因此，如果$T_\lambda x=(T-\lambda I)x=0$，对某个$x\neq 0$，则$\lambda\in\sigma_p(T)$，按定义，即是$\lambda$为$T$的特征值．而向量$x$叫做$T$的相应于特征值$\lambda$的**特征向量**（如果$X$是函数空间，又称$x$为$T$的**特征函**

数）．由 T 的相应于特征值 λ 的一切特征向量和0组成的 $\mathscr{D}(T)$ 的子空间叫做 T 的相应于特征值 λ 的特征子空间．

易知，特征值的这一定义同前节中的定义是一致的．也易知，有限维空间上线性算子的谱是纯点谱，即是，连续谱和剩余谱是空集．如前所述，每个谱值都是特征值．

对 Hilbert 空间重要的自伴线性算子类（见定义 3.10-1）由 $\sigma_r(T)=\phi$ 这一事实，使我们产生了将 $\sigma(T)-\sigma_p(F)$ 分解为 $\sigma_c(T)$ 和 $\sigma_r(T)$ 的动机来，这一点将在 9.2-4 中得到证明．

如果 X 是无限维的，则 T 可以有不是特征值的谱值．

7.2-2 例(具非特征值的谱值的算子) 在 Hilbert 序列空间 $X=l^2$（见 3.1-6 节）上定义线性算子 $T: l^2\to l^2$

(3) $(\xi_1, \xi_2, \cdots)\mapsto(0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$，这里，$x=(\xi_j)\in l^2$，算子 T 叫做右移算子．T 是有界的且 $\|T\|=1$，因为

$$\|Tx\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2=\|x\|^2.$$

算子 $R_0(T)=T^{-1}: T(X)\to X$ 存在；事实上，它就是左移算子：

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots)\mapsto(\xi_2, \xi_3, \cdots).$$

但 $R_0(T)$ 不满足 (R_3)，因为，(3)式表示 $T(X)$ 在 X 中不稠密；事实上，$T(X)$ 是包含一切 $y=(\eta_j)$，$\eta_1=0$ 的子空间 Y．因此，按定义 $\lambda=0$ 是 T 的谱值，而且，$\lambda=0$ 不是特征值．这点可以直接从(3)式看出，因为，$Tx=0$ 蕴含 $x=0$．而零向量不是特征向量．

在此，有界逆定理 4.12-2 给出如下的结果．如果 $T: X\to X$ 是有界线性的，X 是完备的且对某个 λ，豫解式 $R_\lambda(T)$ 存在且定义在全空间 X 上，则对此 λ 的豫解式是有界的．

而且，下述结果（后面需要）也可以帮助理解本节的概念。

7.2-3 引理(R_λ 的定义域) 设 X 是复Banach空间，$T: X\to X$是线性的，$\lambda\in\rho(T)$。假设，(a) T 是闭的，或者 (b) T是有界的，则 $R_\lambda(T)$ 定义在全空间X上且有界。

证明。(a)因 T 闭，由定理 4.13-3，T_λ 也闭．因此，R_λ 是闭的。由 (R_2)，R_λ 是有界的。因此，由4.13-5(b) 应用到 R_λ 上知，它的定义域$\mathscr{D}(R_\lambda)$是闭的。于是，(R_3) 蕴含$\mathscr{D}(R_\lambda)=\overline{\mathscr{D}(R_\lambda)}=X$。

(b) 因 $\mathscr{D}(T)=X$ 是闭的，由 4.13-5(a)，T 是闭的，所说的结论由本证明的 (a) 部分得出。

习　　题

1. (**恒等算子**) 对赋范空间 X 的恒等算子 I，求出特征值和特征空间，以及 $\sigma(I)$ 和 $R_\lambda(I)$。

2. 证明，对于给定的线性算子 T，集$\rho(T)$，$\sigma_p(T)$，$\sigma_c(T)$和$\sigma_r(T)$彼此不相交且其和是复平面。

3. (**不变子空间**) 赋范空间X的子空间 Y 叫做在线性算子$T: X\to X$下不变，如果，$T(Y)\subset Y$。证明，T 的特征空间在 T 下不变。并给出一例。

4. 如果Y 是 n—维赋范空间 X上的线性算子 $T: X\to X$ 的不变子空间，在X的基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 下，对表示T的矩阵，我们能得出些什么样的结果来呢？这里，$Y=\text{span}\{e_1,\cdots,e_m\}$。

5. 设(e_k)是可分 Hilbert 空间H中的完全规格正交序列且T在各 e_k 处定义为

$$Te_k=e_{k+1}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

然后线性连续地延拓到H上。求不变子空间。并证明T 没有特征值。

6. (**扩张**) 在算子的延拓下谱的各个部分的情况是特别有趣的。如果T是有界线性算子，T_1是 T 的线性延拓，证明，$\sigma_p(T_1)\supset\sigma_p(T)$ 且对任意$\lambda\in\sigma_p(T)$，T 的特征空间含于T_1的特征空间中。

7. 证明，在习题 6 中，$\sigma_r(T_1)\subset\sigma_r(T)$。

8. 证明，在习题 6 中，$\sigma_c(T)\subset\sigma_c(T_1)\cup\sigma_p(T_1)$。

9. 直接证明（不利用习题6和8），在习题6中，$\rho(T_1)\subset\rho(T)\cup\sigma_r(T)$。

10. 习题9中的结论，如何从习题6和8得出来？

7.3 有界线性算子的谱性质

给定算子的谱具有些什么样的一般的性质呢？这将依赖于算子定义空间的类型（比较7.1节和7.2节）和所考察的算子的类型。这就提示我们分别考察几大类具有公共谱性质的算子。本节考察的是复Banach空间X上的有界线性算子T。于是，$T\in B(X,X)$，这里，X是完备的。（参见2.10节）

下面的定理是这一领域中的一个关键性定理。

7.3-1 定理（逆） 设$T\in B(X,X)$，X是Banach空间，如果$\|T\|<1$，则$(I-T)^{-1}$作为全空间X上的有界线性算子而存在，且

$$(1)\qquad (I-T)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}T^j=I+T+T^2+\cdots$$

[右端级数按$B(X,X)$中范数收敛]。

证明。由2.7节(7)，有$\|T^j\|\leqq\|T\|^j$。我们再回忆一下，当$\|T\|<1$时，几何级数$\Sigma\|T\|^j$收敛。因此，(1)式中的级数，在$\|T\|<1$时绝对收敛，因X完备，于是，由定理2.10-2知$B(X,X)$完备。于是，由2.3节知，绝对收敛蕴含收敛。

用S表(1)式中级数之和，下证，$S=(I-T)^{-1}$。为此，通过计算知

$$(2)\qquad (I-T)(I+T+\cdots+T^n)=(I+T+\cdots+T^n)(I-T)=I-T^{n+1},$$

令$n\to\infty$，则由$\|T\|<1$知$T^{n+1}\to0$。于是得

(3) $(I-T)S=S(I-T)=I$,

这就证明 $S=(I-T)^{-1}$. ∎

作为这一定理的第一个应用，我们证明有界线性算子的谱是复平面中的闭集这一重要事实（$\sigma(T)\neq\Phi$将在7.5-4中证明）.

7.3-2 定理（谱的闭性） 在复 Banach 空间 X 上的有界线性算子T的豫解集 $\rho(T)$ 是开的；因此，谱 $\sigma(T)$ 是闭的.

证明. 如果 $\rho(T)=\Phi$，则它是开的（实际上，我们将看到，由定理 7.3-4 知 $\rho(T)\neq\Phi$）. 设 $\rho(T)\neq\Phi$，固定$\lambda_0\in\rho(T)$，任意 $\lambda\in C$，有

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)&=T-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I\\&=(T-\lambda_0 I)[I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}].\end{aligned}$$

用V 表方括号 [⋯] 中的算子，则上式可表为

(4) $T_\lambda=T_{\lambda_0}V$，其中 $V=I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}$.

因为 $\lambda_0\in\rho(T)$ 且 T 有界，引理 7.2-3 (b) 蕴含 $R_{\lambda_0}=T_{\lambda_0}^{-1}\in B(X,X)$. 因而，定理7.3-1证明了，对一切使 $\|(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\|<1$ 的 λ，V 在 $B(X,X)$ 中有逆算子

$$\text{(5a)}\qquad V^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}[(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^j=\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j$$

即是，当

$$\text{(5b)}\qquad |\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

时，$V^{-1}\in B(X,X)$. 因 $T_{\lambda_0}^{-1}=R_{\lambda_0}\in B(X,X)$，由此及 (4) 式知，对每个满足(5b)的 λ，算子 T_λ 有逆算子

(6) $R_\lambda=T_\lambda^{-1}=(T_{\lambda_0}V)^{-1}=V^{-1}R_{\lambda_0}$.

因此，(5b) 表示T的正则值 λ 组成了 λ_0 的一邻域，因为$\lambda_0\in\rho(T)$

是任意的，$\rho(T)$ 是开的，于是，余集 $\sigma(T)=C-\rho(T)$ 是闭的。∎

有趣的是，在此证明中，也得到了豫解式用 λ 的幂级数表达出来的一个基本的表示式。事实上，由(5)式和(6)式直接得到下述结果。

7.3-3 表示定理（豫解式） X 和 T 同于定理 7.3-2，对每个 $\lambda_0\in\rho(T)$，豫解式 $R_\lambda(T)$ 有表示式

$$(7)\qquad R_\lambda=\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^j R_{\lambda_0}{}^{j+1}.$$

级数对于复平面之开圆（见(5b)）

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

内的每个 λ 绝对收敛，此圆是 $\rho(T)$ 的一子集。

此定理也提供了应用复分析于谱论的一个方法，见7.5节。

定理 7.3-1 的另一个结果是可以证明有界线性算子的谱是复平面中的有界集这一重要事实。确切地说，

7.3-4 定理（谱） 复Banach 空间X上的有界线性算子T：$X\to X$ 的谱 $\sigma(T)$ 是紧集且位于圆

$$(8)\qquad |\lambda|\leqq\|T\|$$

中。因此，T 的豫解集 $\rho(T)$ 非空［$\sigma(T)\neq\Phi$，将在 7.5-4 中证明］。

证明。设 $\lambda\neq0$ 和 $k=1/\lambda$。由定理 7.3-1 得表示式

$$(9)\quad R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}(I-kT)^{-1}$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}(kT)^j=-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^j.$$

这里，由定理7.3-1，级数对一切使

$$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|=\frac{\|T\|}{|\lambda|}<1,\ \text{即是}\quad |\lambda|>\|T\|,$$

的λ收敛。同一定理也证明了，任意这样的λ必在$\rho(T)$中，因此，谱$\sigma(T)=C-\rho(T)$必在(8)式中的圆内。于是，$\sigma(T)$有界。进而，由定理7.3-2知，$\sigma(T)$是闭的，因此，$\sigma(T)$是紧的。▌

因为，由刚证明的定理知，在复Banach空间上的有界线性算子T的谱是有界的。自然地要问，包含整个谱的以原点为中心的最小圆是什么。这一问题引出了下述概念。

7.3-5 定义（谱半径） 复Banach空间X上的算子$T\in B(X,X)$的谱半径$r_\sigma(T)$是λ-平面上以原点为中心，包含$\sigma(T)$的最小闭圆的半径

$$r_\sigma(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|.$$

由(8)式易知，复Banach空间上的有界线性算子T的谱半径合于

$$(10)\quad r_\sigma(T)\leqq\|T\|$$

且在7.5节中将证明

$$(11)\quad r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

习　　题

1. 设 $X=C[0,1]$ 并由 $Tx=vx$, 定义 $T: X\to X$, 这里, $v\in X$ 是固定的. 求 $\sigma(T)$. 注意 $\sigma(T)$是闭的.

2. 求一线性算子$T: C[0,1]\to C[0,1]$, 其谱是给定的区间$[a, b]$.

3. 如果Y是相应于算子T的特征值λ的特征空间, 那末, $T|_Y$的谱是什么?

4. 设$T: l^2\to l^2$, 由$y=Tx$定义, $x=(\xi_j)$, $y=(\eta_j)$, $\eta_j=\alpha_j\xi_j$, 这里, (α_j)在$[0,1]$中稠密. 求$\sigma_p(T)$和$\sigma(T)$.

5. 如果在习题4中, 取$\lambda\in\sigma(T)-\sigma_p(T)$, 证明$R_\lambda(T)$是无界的.

6. 推广习题4, 求一线性算子$T: l^2\to l^2$, 它的特征值在给定的紧集$K\subset C$中稠密且$\sigma(T)=K$.

7. 设$T\in B(X,X)$, 证明, $\|R_\lambda(T)\|\to 0$, 当$\lambda\to\infty$时.

8. 设$X=C[0,\pi]$并定义$T: \mathscr{D}(T)\to X$, $x\mapsto x''$, 这里

$$\mathscr{D}(T)=\{x\in X \mid x',\ x''\in X,\ x(0)=x(\pi)=0\}$$

证明, $\sigma(T)$非紧.

9. 设$T: l^\infty\to l^\infty$定义为$x\mapsto(\xi_2, \xi_3, \cdots)$, 这里, x按$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$给出. (a)如果$|\lambda|>1$, 证明, $\lambda\in\rho(T)$. (b)如果$|\lambda|\leqslant 1$, 证明, λ是特征值, 且求特征空间.

10. 设$T: l^p\to l^p$定义为$x\mapsto(\xi_2, \xi_3, \cdots)$, 这里, x按$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$给出和$1\leqslant p<\infty$. 如果$|\lambda|=1$, λ是T的特征值吗?

7.4　豫解式和谱的进一步性质

豫解式的某些更为有趣的和基本的性质表述如下.

7.4-1　定理（豫解式方程，可交换性） 设X是复Banach空间, $T\in B(X,X)$且λ, $\mu\in\rho(T)$[见7.2-1]则

(a) T的豫解式R_λ满足Hilbert关系或豫解方程

$$R_\mu-R_\lambda=(\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda\quad[\lambda,\ \mu\in\rho(T)]\tag{1}$$

(b) R_λ与任何一个同T可交换的$S\in B(X,X)$可交换.

(c) 有

(2) $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda \qquad [\lambda, \mu \in \rho(T)]$

证明. (a)由 7.2-3, T_λ 的值域是整个 X. 因此, $I = T_\lambda R_\lambda$, 这里, I 是X上的恒等算子. 又, $I = R_\mu T_\mu$. 因而,

$$\begin{aligned} R_\mu - R_\lambda &= R_\mu(T_\lambda R_\lambda) - (R_\mu T_\mu) R_\lambda = R_\mu(T_\lambda - T_\mu) R_\lambda \\ &= R_\mu [T - \lambda I - (T - \mu I)] R_\lambda \\ &= (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda. \end{aligned}$$

(b) 由假设 $ST = TS$, 因此, $ST_\lambda = T_\lambda S$. 利用 $I = T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda$, 于是得

$$R_\lambda S = R_\lambda S T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda S R_\lambda = S R_\lambda.$$

(c) 由 (b), R_μ 同T可交换. 因此, R_λ 同 R_μ 可交换 (由 (b). ∎

下一个重要结果是谱映象定理. 一开始, 矩阵的特征值理论就启示了这一结果.

如果 λ 是方阵A的特征值, 则$Ax = \lambda x$, 对某个 $x \neq 0$. 用A作用于两端得

$$A^2 x = A\lambda x = \lambda^2 x,$$

继续这一方法, 对每个正整数 m 有

$$A^m x = \lambda^m x;$$

即是, 如果, λ 是 A 的一特征值, 则 λ^m 是 A^m 的特征值. 更一般地,

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

是矩阵

$$p(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I$$

的特征值.

值得注意的, 这一性质可以推广到任意维复 Banach 空间上去. 在证明这一事实中, 需要用到有界线性算子有非空谱这一结

论。而这一点将放在稍后[7.5-4]用复分析的方法加以证明。

为了叙述要证明的定理，一个方便的记号是

(3) $p(\sigma(T))=\{\mu\in C \mid \mu=p(\lambda),\ \lambda\in\sigma(T)\}$

即是，$p(\sigma(T))$ 是有某 $\lambda\in\sigma(T)$ 使 $\mu=p(\lambda)$ 的一切复数 μ 之集。$p(\rho(T))$ 的意义是类似的。

7.4-2 关于多项式的谱映象定理 设X是复Banach 空间，$T\in B(X,X)$ 且

$$p(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_0 \quad (\alpha_n\neq 0)$$

则

(4) $\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$,

即是，算子

$$p(T)=\alpha_n T^n+\alpha_{n-1}T^{n-1}+\cdots+\alpha_0 I$$

的谱 $\sigma(p(T))$ 刚好由多项式 p 在 T 的谱 $\sigma(T)$ 上的一切值组成。

证明。设 $\sigma(T)\neq\Phi$，这点将在 7.5-4 中得到证明。当 $n=0$ 时，是显然的，这时 $p(\sigma(T))=\{\alpha_0\}=\sigma(p(T))$。设 $n>0$。在(*a*)部分中，我们证明

(4a) $\sigma(p(T))\subset p(\sigma(T))$。

而在 (*b*) 部分中，我们证明

(4b) $p(\sigma(T))\subset\sigma(p(T))$。

于是得到 (4) 式。详细证明如下。

(*a*) 为了简便起见，记 $S=p(T)$ 及

$$S_\mu=p(T)-\mu I \qquad (\mu\in C)$$

那末，如果 S_μ^{-1} 存在，由 S_μ 的表示式证明 S_μ^{-1} 是 $p(T)$ 的豫解算子。固定 μ，因X是复的，由 $S_\mu(\lambda)=p(\lambda)-\mu$ 给出的多项式必可以分成线性因子，比如说

(5) $S_\mu(\lambda)=p(\lambda)-\mu=\alpha_n(\lambda-r_1)(\lambda-r_2)\cdots(\lambda-r_n)$,

这里，$r_1,\cdots,r_n$ 是 S_μ 的零点（当然，它依赖于 μ）。相应于 (5)

式有

$$S_\mu = p(T) - \mu I = \alpha_n (T - r_1 I)(T - r_2 I) \cdots (T - r_n I).$$如果每个 r_j 都在 $\rho(T)$ 中，则每个$T - r_j I$ 有有界逆，且由7.2-3，其逆定义于整个 X 上，对于 S_μ 同样成立；事实上，由 2.6 节中的 (6) 式

$$S_\mu^{-1} = \frac{1}{\alpha_n}(T - r_n I)^{-1} \cdots (T - r_1 I)^{-1}.$$

因此，在这种情况下，$\mu \in \rho(p(T))$. 由此断定，

$$\mu \in \sigma(p(T)) \Rightarrow r_j \in \sigma(T)，对某个 j.$$

现 (5) 式给出

$$S_\mu(r_j) = p(r_j) - \mu = 0,$$

于是

$$\mu = p(r_j) \in p(\sigma(T)).$$

因为 $\mu \in \sigma(p(T))$ 是任意的，这就证明了(4a)：

$$\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T)).$$

(b) 我们证明(4b)：

$$p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T)).$$

为此，证明：

(6) $\kappa \in p(\sigma(T)) \Rightarrow \kappa \in \sigma(p(T))$.

设 $\kappa \in p(\sigma(T))$，按定义，这意味着

$$\kappa = p(\beta) \quad 对某个 \beta \in \sigma(T).$$

于是有两种可能性：

(A) $T - \beta I$ 没有逆，

(B) $T - \beta I$ 有逆.

我们依次考察这些情况.

(A) 由 $\kappa = p(\beta)$，有 $p(\beta) - \kappa = 0$. 因此，β 是多项式

$$S_\kappa(\lambda) = p(\lambda) - \kappa$$

的零点. 由此，可表

$$S_\kappa(\lambda)=p(\lambda)-\kappa=(\lambda-\beta)g(\lambda),$$

这里 $g(\lambda)$ 表另外 $n-1$ 个线性因子和 α_n 的乘积．与之相应的有

(7)　$S_\kappa=p(T)-\kappa I=(T-\beta I)g(T)$.

因为，$g(T)$ 的因子全部同 $T-\beta I$ 可交换，故也有

(8)　$S_\kappa=g(T)(T-\beta I)$.

如果 S_κ 有逆，(7) 式和 (8) 式得出

$$I=(T-\beta I)g(T)S_\kappa^{-1}=S_\kappa^{-1}g(T)(T-\beta I).$$

这就证明 $T-\beta I$ 有逆，同我们的假设矛盾．因此，对此κ，$p(T)$ 的豫解式 S_κ^{-1} 不存在，于是 $\kappa\in\sigma(p(T))$．因为 $\kappa\in p(\sigma(T))$ 是任意的，这就证明了在假设 $T-\beta I$ 没有逆的情况下 (6) 式成立．

(B)　设 $\kappa=p(\beta)$，对某个 $\beta\in\sigma(T)$．如同前面一样，但现在假设逆 $(T-\beta I)^{-1}$ 存在，则对 $T-\beta I$ 的值域必有

(9)　$\mathscr{R}(T-\beta I)\neq X$.

因为，否则，由有界逆定理4.12-2应用于$T-\beta I$ 知 $(T-\beta I)^{-1}$ 必为有界算子．于是，$\beta\in\rho(T)$，这与 $\beta\in\sigma(T)$ 矛盾．由(7) 式和 (9) 式得

$$\mathscr{R}(S_\kappa)\neq X.$$

这就证明了 $\kappa\in\sigma(p(T))$，因为 $\kappa\in\rho(p(T))$ 必蕴含 $\mathscr{R}(S_\kappa)=X$ [引理 7.2-3(6) 应用于 $p(T)$ 上]．于是，在 $T-\beta I$ 有逆的假设下 (6) 式仍成立．定理得证．∎

最后考察特征值的一个基本性质．

7.4-3　定理（线性无关）　相应于向量空间 X 上线性算子T 的不同特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量 $x_1,\cdots,x_n$ 构成一线性无关集．

证明．设$\{x_1,\cdots,x_n\}$是线性相关的，就会导致矛盾．命 x_m 是第一个为前面向量的线性组合的向量，比如说

(10)　$x_m=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{m-1}x_{m-1}$

则 $\{x_1,\cdots,x_{m-1}\}$ 是线性无关的，将 $T-\lambda_m I$ 作用于 (10) 式的两端，得

$$(T-\lambda_m I)x_m=\sum_{j=1}^{m-1}a_j(T-\lambda_m I)x_j$$

$$=\sum_{j=1}^{m-1}a_j(\lambda_j-\lambda_m)x_j$$

因 x_m 是相应于 λ_m 的特征向量，左边为零。因右端各向量是线性无关的，必有

$a_j(\lambda_j-\lambda_m)=0$，因为 $\lambda_j-\lambda_m\neq 0$，因此，$a_j=0\,(j=1,\ \cdots,\ m-1)$。但是，由(10)式知 $x_m=0$。这就与 x_m 是特征向量，因而 $x_m\neq 0$ 矛盾。证毕。▮

习　　题

1. 直接证明 (2) 式，而不用 (i) 或者 7.4-1(*b*)。
2. 从 (1) 式得出 (2) 式来。
3. 如果 $S,\ T\in B(X,X)$，证明，对任意 $\lambda\in\rho(S)\cap\rho(T)$，
$$R_\lambda(S)-R_\lambda(T)=R_\lambda(S)(T-S)R_\lambda(T).$$
4. 设 X 是复 Banach 空间，$T\in B(X,X)$ 和 p 是一多项式。证明，方程
$$p(T)x=y \qquad (x,\ y\in X)$$
对每个 $y\in X$ 有唯一解当且仅当 $p(\lambda)\neq 0$，对一切 $\lambda\in\sigma(T)$。
5. 在定理 7.4-2 中，X 是复的为什么是必要的。
6. 利用定理 7.4-3，求 n 一行方阵有生成全空间 $\mathbf{C}^n$（或 $\mathbf{R}^n$）的 n 个特征向量的充分条件。
7. 证明，对复 Banach 空间 X 上的任意算子 $T\in B(X,X)$，
$$r_\sigma(\alpha T)=|\alpha|r_\sigma(T),\quad r_\sigma(T^k)=[r_\sigma(T)]^k \qquad (k\in N),$$
这里，r_σ 表示谱半径（见 7.3-5）。
8. 确定下面矩阵的特征值(i)用直接计算的方法；(ii)用证明 $A^2=I$ 的方法。

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. （幂等算子）设T是 Banach 空间上有界线性算子．T叫做幂等的，如果$T^2=T$（见 3.3 节）．试给出一些例子．证明，如果$T\neq 0$，$\neq I$，则它的谱是$\sigma(T)=\{0,1\}$；证明这一结论：(a)用7.3(b)中的(9)式；(b)用定理7.4-2．

10. 证明，矩阵

$$T_B=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

表一规格正交基B下的幂等算子$T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$．确定谱(i)用习题 9；(ii)直接计算，求特征向量和特征空间．

7.5 复分析在谱理论中的应用

谱论中一个重要的工具是复分析．借助于复的线积分或幂级数可以得到两个领域间的联系．我们将采用的仅仅是幂级数．在此情况下，我们尽可能地将讨论限定在一个较初等的水平和少许必须的基本概念和基本事实之上①．

度量空间叫连通的，如果它不是两个互不相交的非空开子集之并．度量空间的子集叫做连通的，如果它被视为子空间时是连通的．

复平面C中的**区域**G，表示G是C的连通开子集．

可以证明，C中的开子集G是连通的当且仅当G中的每一对点可以用有限多条全含于G中的直线段组成的折线连接起来（在许多复分析中，用此作为连通的定义）．

---

① 不熟悉复分析的读者可以只看结果（7.5-3，7.5-4，7.5-5）而略去证明，继而转入下一节．

映象（例如算子）的“区域”意味映象的定义域，即使映象有定义的一切点之集；因此，这是“区域”的不同的应用．

复变数 λ 的复值函数 h 叫做在复 λ—平面的区域 G 上是**全纯的**（或解析的）。如果 h 在 G 上有定义且可微，即是，h 的由下式定义的导数 h'

$$h'(\lambda)=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{h(\lambda+\Delta\lambda)-h(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

对每个 $\lambda\in G$ 存在。函数 h 叫做在 $\lambda_0\in C$ 处全纯，如果 h 在 λ_0 的某个 ε—邻域上全纯的。

h 在 G 上全纯当且仅当在每个 $\lambda_0\in G$ 处有幂级数表示式

$$h(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}C_j(\lambda-\lambda_0)^j$$

且其收敛半径非零。

这一点和定理 7.3-3 是应用复分析于谱论的关键。

豫解式 R_λ 是依赖于复参数 λ 的算子。这就提示我们现在的方法总的框架如下。

向量值函数或**算子值函数**意味着是一映象：

(1) $$S: \Lambda\to B(X,X)$$
$$\lambda\longmapsto S_\lambda$$

这里，Λ 是复 λ—平面的任一子集（我们以 S_λ 代 $S(\lambda)$，类似地，R_λ 有相同的意义，因为，后面我们将要考察的是 $S_\lambda=R_\lambda$，$\Lambda=\rho(T)$）

S 是已给定的，任取 $x\in X$，于是得一映象

(2) $$\Lambda\to X$$
$$\lambda\longmapsto S_\lambda x.$$

我们也可以取 $x\in X$ 和任一 $f\in X'$（见 2.10-3），得出一 Λ 到复平面的映象，即

(3) $$\Lambda\to \mathrm{C}$$
$$\lambda\longmapsto f(S_\lambda x)$$

公式 (3) 提示了如下的概念

7.5-1 定义（局部全纯，全纯） 设 Λ 是 C 的一开子集，X 是复 Banach 空间。(1) 式中的 S 叫做在 Λ 上局部全纯的，如果，对每个 $x\in X$ 和 $f\in X'$，泛函 h：

$$h(\lambda)=f(S_\lambda^x)$$

按通常意义下（如象开始就指出的那样）在每一 $\lambda_0\in\Lambda$ 处是全纯的。S 叫做在 Λ 上是全纯的，如果 S 是在 Λ 上局部全纯的且 Λ 是区域。S 叫做在点 $\lambda_0\in C$ 处全纯，如果在 λ_0 的某个 ε—邻域上 S 是全纯的。■

对于这个定义，要注意下述的说明。有界线性算子 T 的豫解集 $\rho(T)$ 是开的 (7.3-2)，但可能不是区域。于是，在一般情况下，它是互不相交的区域（互不相交的连通开子集）之并。我们将看到，豫解式在 $\rho(T)$ 的每一点处是全纯的，因此，它总是在 $\rho(T)$ 上局部全纯的（于是，在每个区域上，定义了一全纯算子函数）。它在 $\rho(T)$ 上全纯充分必要条件是 $\rho(T)$ 连通。即 $\rho(T)$ 是一个区域。

在详细讨论这些问题之前，注意下面的一般情况。

注：定义 7.5-1 是适合的，一个决非平凡的事实应该说明如下：回忆一下，在 4.9 节中，我们定义了三种与有界线性算子相关的收敛类型，据此，我们可以相应地定义三种类型的 S_λ 关于 λ 的导数 S'_λ：

$$\left\|\frac{1}{\Delta\lambda}[S_{\lambda+\Delta\lambda}-S_\lambda]-S'_\lambda\right\|\to 0$$

$$\left\|\frac{1}{\Delta\lambda}[S_{\lambda+\Delta\lambda}x-S'_\lambda x\right\|\to 0 \qquad (x\in X)$$

$$\left|\frac{1}{\Delta\lambda}[f(S_{\lambda+\Delta\lambda}x)-f(S_\lambda x)]-f(S'_\lambda x)\right|\to 0$$

$$(x\in X,\ f\in X').$$

在最后的一公式中，对区域 Λ 中的一切 λ 导数存在意味着 $h(\lambda)=f(S_\lambda x)$ 是 Λ 上通常意义下的全纯函数；这就是我们的导数的定义。可以证明，这种导数存在（对每个 $x\in X$ 和每个 $f\in X'$）蕴含另外两种类型导数的存在，见 E. Hille 和 R. S. Philips (1957) p.93（在附录 3 中）。这是值得十分注意的且证明定义 7.5-1 是完全合理的。同样特别重要的是象 7.5-1 中那样来定义全纯性，常常是非常容易得到验证的。

如前所述，应用复分析于谱论的关键是定理 7.3-3。该定理断定，对每个 $\lambda_0\in\rho(T)$ 在复Banach空间 X 上的算子 $T\in B(X,X)$ 的豫解式 $R_\lambda(T)$ 具有幂级数表示式

$$(4)\qquad R_\lambda(T)=\sum_{j=0}^{\infty}R_{\lambda_0}(T)^{j+1}(\lambda-\lambda_0)^j$$

且在圆（图62）

$$(5)\qquad |\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

中每个 λ 处绝对收敛。取任意一个 $x\in X$ 和 $f\in X'$，定义 h：

$$h(\lambda)=f(R_\lambda(T)x),$$

由 (4) 式，我们得幂级数表示式

$$h(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}C_j(\lambda-\lambda_0)^j,\quad C_j=f(R_{\lambda_0}(T)^{j+1}x),$$

且在 (5) 式确定的圆上绝对收敛。这就证明了

7.5-2 定理（R_λ 的全纯性） 在复 Banach 空间 X 上的有

界线性算子 $T: X \to X$ 的豫解式 $R_\lambda(T)$ 在 T 的豫解集 $\rho(T)$ 的每一点处是全纯的。因此，在 $\rho(T)$ 上是局部全纯的。

因而，$\rho(T)$ 是 T 的豫解式在其上为局部全纯的最大集。事实上，豫解式不可能解析延拓到谱点，这点从下面的 (7) 式可以看出。

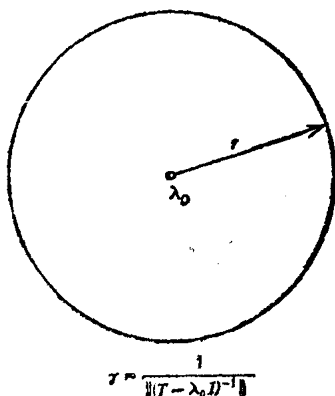


图62 在复 λ—平面上，由(5)式表示出来的半径为 $r = 1/\|R_{\lambda_0}\|$ 的开圆。

7.5-3 定理（豫解式） 如果 $T \in B(X, X)$，X 是复 Banach 空间，$\lambda \in \rho(T)$，则

$$(6) \quad \|R_\lambda(T)\| \geqslant \frac{1}{\delta(\lambda)},$$

这里，$\delta(\lambda) = \inf\limits_{s \in \sigma(T)} |\lambda - s|$ 是从 λ 到谱 $\sigma(T)$ 的距离。因此

$$(7) \quad \|R_\lambda(T)\| \to \infty, \text{ 当 } \delta(\lambda) \to 0 \text{ 时。}$$

证明。对每个 $\lambda_0 \in \rho(T)$，(5) 式中的圆是 $\rho(T)$ 的子集（见 7.3-3）。因此，设 $\sigma(T) \neq 0$（证明见下面），则 λ_0 到谱的距离至少等于该圆的半径，即是 $\delta(\lambda_0) \geqslant 1/\|R_{\lambda_0}\|$。这就蕴含 (6) 式成立。

复 Banach 空间上的有界线性算子的谱非空这一事实从理论上和实际上讲都是非常重要的。

7.5-4 定理（谱） 如果 $X \neq \{0\}$ 是复Banach空间，$T \in B(X, X)$，则 $\sigma(T) \neq \phi$

证明。由假设 $X \neq \{0\}$。如果 $T = 0$，则 $\sigma(T) = \{0\} \neq \Phi$。设

$T\neq 0$，则$\|T\|\neq 0$。7.3节中的级数(9)式为

$$(8)\qquad R_\lambda=-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^j \qquad (|\lambda|>\|T\|).$$

因为，此级数当$1/|\lambda|<1/\|T\|$时收敛，故当$\frac{1}{|\lambda|}<\frac{1}{2\|T\|}$，即$|\lambda|>2\|T\|$时绝对收敛。对这些$\lambda$，由几何级数求和公式，得

$$(9)\quad \|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\sum_{j=0}^{\infty}\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|^j=\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}\leqslant\frac{1}{\|T\|}$$

$$(|\lambda|\geqslant 2\|T\|)$$

我们证明，假设$\sigma(T)=\Phi$会导致一矛盾。$\sigma(T)=\Phi$，则$\rho(T)=C$。因此，R_λ对一切λ，按7.5-2是全纯的。因而，对固定的$x\in X$，和$f\in X'$，函数h

$$h(\lambda)=f(R_\lambda x)$$

在C上是全纯的，即是，h是一整函数。因为，全纯性蕴含连续性，故h是连续的，于是在紧圆$|\lambda|\leqslant 2\|T\|$上是有界的。但由(9)式，因$\|R_\lambda\|<\frac{1}{\|T\|}$当$|\lambda|\geqslant 2\|T\|$时，故$h$也是有界的，而且

$$|h(\lambda)|=|f(R_\lambda x)|\leqslant\|f\|\|R_\lambda x\|\leqslant\|f\|\|R_\lambda\|\|x\|$$
$$\leqslant\|f\|\|x\|/\|T\|.$$

因此，在C上h有界，于是h是常数，这是根据Liouville定理：在整个复平面上有界的整函数是常数。因为，在h中的$x\in X$和$f\in X'$是任意的，故$h=$常数蕴含R_λ与λ无关，于是，$R_\lambda^{-1}=T-\lambda I$也与$\lambda$无关。但这是不可能的，于是定理得证。▌

利用(8)式，最后证明下面的I. Gelfand定理(1941)。

7.5-5定理(谱半径) 如果T是Banach 空间上的有界线性算子，则T的谱半径$r_\sigma(T)$：

(10) $r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$.

证明。由谱映象定理7.4-2，有$\sigma(T^n)=[\sigma(T)]^n$，于是

(11) $r_\sigma(T^n)=[r_\sigma(T)]^n$.

在7.3节的(10)式中，用T^n代替T有

$$r_\sigma(T^n)\leqslant\|T^n\|$$

综合得，对每一n有

$$r_\sigma(T)=\sqrt[n]{r_\sigma(T^n)}\leqslant\sqrt[n]{\|T^n\|},$$

因此，

(12) $r_\sigma(T)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$.

我们证明最后一个式子等于$r_\sigma(T)$，那末，(12) 式蕴含(10)式了。

幂级数$\sum c_n\kappa^n$，当$|\kappa|<r$时，绝对收敛，其收敛半径r由著名的Hadamard公式

(13) $\frac{1}{r}=\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$

给出。这一公式在许多复分析书中，例如E. Hille (1973). P. 118中可以找到其证明。

命$\kappa=1/\lambda$，可以把(8)式写成为

$$R_\lambda=-\kappa\sum_{n=0}^{\infty}T^n\kappa^n \qquad (|\kappa|<r)$$

于是，记$|C_n|=\|T^n\|$，得

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}T^n\kappa^n\right\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\||\kappa|^n=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||\kappa|^n.$$

Hadamard公式(13)证明，当$|\kappa|<r$时，级数绝对收敛。因此，当

$$|\lambda|=\frac{1}{|\kappa|}>\frac{1}{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|T^n\|}$$

时绝对收敛。

由定理7.5-2和7.5-3知，如前所述，R_λ正好在复λ—平面中的豫解集$\rho(T)$上局部全纯。对于$\rho(T)$，有复κ—平面中的一集M与之对应。由复分析知，收敛半径r是以$\kappa=0$为中心，整个在M中的最大开圆的半径（例如，见E. Hille(1973)，P.197；注意，我们的级数的收敛中心为$\kappa=0$）。因此，$\frac{1}{r}$是λ—平面上，以$\lambda=0$为中心，外部在$\rho(T)$中的最小圆的半径。按定义，这就意味着$\frac{1}{r}$是T的谱半径。因此，由(13)式

$$r_\sigma(T)=\frac{1}{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|T^n\|}$$

由此及(12)式得(10)式。

习　　题

1. （幂零算子）线性算子T叫做幂零的，如果存在一正整数m使其$T^m=0$。求复Banach空间$X\neq\{0\}$上的幂零算子$T:X\to X$之谱。

2. 习题1中的结论如何从(8)式得出来？

3. 由(8)式确定$(A-\lambda I)^{-1}$，这里，A是下面的矩阵(利用$A^2=I$)

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

4. 显然，定理7.3-4蕴含

$$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|.$$

从定理7.5—5如何得出这一结果来？

5. 如果X是复Banach空间，S，$T\in B(X,X)$和$ST=TS$，证明

$$r_\sigma(ST)\leqslant r_\sigma(S)r_\sigma(T).$$

6. 证明，在习题5中，交换性$ST=TS$是不可以省略的。

7. 值得注意的是(10)式中的序列 $(\|T^n\|^{1/n})$不必是单调的。为了说明这一点，考察由下式定义的映象T：$l^1\to l^1$

$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\longmapsto(0,\xi_1,2\xi_2,\xi_3,2\xi_4,\xi_5,\cdots)$

8. (Schur不等式)设$A=(\alpha_{jk})$是n一行方阵且命 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是它的特征值。那末，可以证明Schur不等式

$$\sum_{m=1}^{n}|\lambda_m|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|^2$$

成立，这里，等号成立当且仅当A是正规的（参看3.10-2）。从这一不等式诱导出A的谱半径的一上界。

9. 设T是Hilbert空间H上的正规算子，证明，$r_\sigma(T)=\|T\|$。(见定义.3.10-1)

10. 证明，(10)式中的极限存在性已能从$\|T^{m+n}\|\leqslant\|T^m\|\|T^n\|$得出；参看 2.7 节中之 (7) 式。(命 $a_n=\|T^n\|$，$b_n=\ln a_n$，$\alpha=\inf(b_n/n)$，并证明$b_n/n\to\alpha$)

7.6 Banach 代数

注意到谱也与Banach代数有关是有趣的。所谓Banach代数就是同时又是一代数的Banach空间。在描述这一事实前，先叙述某些有关的概念。

域K上的代数 A 是K上的一向量空间A，使得对每一对有序元$x,y\in A$，定义了唯一的一个积$xy\in A$，具有性质

(1) $(xy)z=x(yz)$，

(2a) $x(y+z)=xy+xz$，

(2b) $(x+y)z=xz+yz$，

(3) $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$，

对一切$x,y,z\in A$和数α成立。

如果$K=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$，则A分别叫实的或复的代数。

A叫做可交换的（或 Abelian），如果乘法是可交换的，即是，对一切$x,y\in A$，

(4) $xy=yx$.

A叫做具有单位元的代数，如果A含有一个元e，使得对一切$x\in A$，

(5) $ex=xe=x$,

该元e叫A的**单位元**。

如果A有单位元，则单位元是唯一的。

事实上，如果e'是A的另一单位元，则有$e'=e$。因为

$$ee'=e(\text{因为}e'\text{是单位元}),$$

$$ee'=e'(\text{因为}e\text{是单位元}).$$

7.6-1 定义(赋范代数，Banach代数) 赋范代数A是一赋范空间，且该赋范空间是一代数，使得对一切$x,y\in A$

(6) $\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$.

且如果A有单位元e

(7) $\|e\|=1$.

Banach代数是一赋范代数且作为赋范空间是完备。

注意，联系乘法与范数的(6)式表明，其积是两个因子的连续函数。这一点可由下看出：

$$\begin{aligned}\|xy-x_0y_0\|&=\|x(y-x_0)+(x-x_0)y_0\|\\&\leqslant\|x\|\|y-y_0\|+\|x-x_0\|\|y\|\end{aligned}$$

下面的例子说明，许多重要的空间都是Banach代数

例.

7.6-2 空间R和C 实直线R和复平面C都是具有单位元$e=1$的可交换的Banach代数。

7.6-3 空间C[a,b] 空间$C[a,b]$是具有单位元($e=1$)的可交换的Banach代数，其积xy按通常的方式定义：

$$(xy)(t)=x(t)y(t), \quad t\in[a,b],$$

易知，关系式(6)成立。

由一切多项式组成的$C[a,b]$的一子空间是具有单位元($e=1$)的可交换的赋范代数。

7.6-4 矩阵 一切$n\times n$矩阵的向量空间X（$n>1$是固定的）是具有单位元I(n—行单位阵)的不可交换的代数，按X上定义的范数得一Banach代数（这种范数，见2.7节习题12)。

7.6-5 空间B(X,X) 在复Banach空间$X\neq\{0\}$上一切有界线性算子的Banach空间$B(X,X)$是具有单位元I（X上的恒等算子）的Banach代数，其乘法定义为算子的复合，关系式(6)是

$$\|T_1T_2\|\leqslant\|T_1\|\cdot\|T_2\|,$$

(见2.7节之(7))。$B(X,X)$是不可交换的，除$\dim X=1$之外。

设A是具有单位元的代数，$x\in A$叫**可逆的**①，如果，它在A中有一逆，即是，如果A含有一元，记为x^{-1}，使得

$$(8) \qquad x^{-1}x=xx^{-1}=e.$$

如果，x是可逆的，其逆是唯一的。事实上，$yx=e=xz$蕴含

$$y=ye=y(xz)=(yx)z=ez=z$$

①有的作者用术语“正则的”(代替可逆的)并用“奇异的”(代替不可逆的)。

利用这些概念，可以描述以下的定义。

7.6-6 定义(豫解集，谱) 设A是复Banach代数且具有单位元e，则$x\in A$的豫解集$\rho(x)$是复平面中使$x-\lambda e$可逆的一切λ组成的集。x的谱$\sigma(x)$是$\rho(x)$关于复平面的余集；于是$\sigma(x)=C-\rho(x)$。任一$\lambda\in\sigma(x)$叫做x的谱值。

因此，$x\in A$的谱值是使$x-\lambda e$不可逆的那些λ。

如果X是复Banach空间，则$B(X,X)$是Banach代数，于是，定义7.6-6是适用。但立刻发生了一个问题，此时，定义7.6-6同早先的定义7.2-1是否是一致的呢？我们证明这两个定义是一致的。

设$T\in B(X,X)$，λ是按7.6-6定义的豫解集$\rho(T)$中的一值，则由定义，$R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$存在且是$B(X,X)$中的元，即是，$R_\lambda(T)$是定义在$X$上的有界线性算子。因此，$\lambda\in\rho(T)$，这里，$\rho(T)$是按7.2-1定义的。

反之，设$\lambda\in\rho(T)$，这里，$\rho(T)$是按7.2-1定义的。则$R_\lambda(T)$存在且是线性的(据2.6-10)，有界的且定义在X的稠密子集上。但因T是有界的，引理7.2-3(*b*)蕴含$R_\lambda(T)$是在整个X上有定义的。因此，$\lambda\in\rho(T)$，这里，$\rho(T)$是按7.6-6定义的。这就证明了关于豫解集定义7.2-1与7.6-6的一致性。因此，关于豫解集的余集，即谱也是一致的。

习 题

1. 例7.6-4中之X为什么是完备的？
2. 证明，在例7.6-3中，(6)式成立。
3. 怎样使有序的n-元复数组的向量空间成为Banach代数。
4. (*a*)在7.6-2中；(*b*)在7.6-3中；(*c*)在7.6-4中的可逆元是什么？

5. 证明，对7.6-4中的X的元，按7.6-6定义的谱同按7.1-1定义谱一致。

6. 求$x\in C[0,2\pi]$的谱$\sigma(x)$，这里，$x(t)=\sin t$。对任意$x\in C[a,b]$，求$\sigma(x)$。

7. 证明，向量空间到自身中的一切线性算子之集构成一代数。

8. 设A是具有单位元e的复Banach代数。如果对$x\in A$，存在$y, z\in A$使$yx=e$和$xz=e$，证明，x是可逆的且$y=z=x^{-1}$。

9. 如果$x\in A$是可逆的且同$y\in A$可交换，证明，x^{-1}同y也是可交换的。

10. 一代数A的子集A_1叫做A的子代数，如果，应用代数运算于A_1中的元所产生的元仍在A_1中。A的中心C是由A中那些同A的一切元可交换的元组成的集。证明，C是A的可交换的子代数。

7.7 Banach 代数的进一步的性质

我们指出一个有趣的事实，本章前几节中的某些结果和证明可以推广到Banach代数上去。

7.7-1 定理(逆) 设A是具有单位元e的复Banach代数，如果$x\in A$满足$\|x\|<1$，则$e-x$是可逆的且

$$(1)\qquad (e-x)^{-1}=e+\sum_{j=1}^{\infty}x^j.$$

证明，由前节中(6)式知，$\|x^j\|\leqslant\|x\|^j$。因为$\|x\|<1$，于是$\sum\|x\|^j$收敛。因此，(1)中级数绝对收敛。因为A完备，故级数收敛(见2.3节)。命S表示其和，我们证明$S=(e-x)^{-1}$。直接计算

$$(2)\qquad (e-x)(e+x+\cdots+x^n)=(e+x+\cdots+x^n)(e-x)$$
$$=e-x^{n+1}.$$

现命$n\to\infty$，因$\|x\|<1$，故$x^{n+1}\to 0$。(2)式给出

$$(e-x)S=S(e-x)=e,$$

因为，在A中乘法是连续的。因此，$S=(e-x)^{-1}$且(1)式成立。∎

具给定的单位元e的复Banach 代数A，可以考察A的一切可逆元组成的子集G。因为G是一个群，故以G表示之。

事实上，$e\in G$，如果$x\in G$，则x^{-1}存在，因$(x^{-1})^{-1}=x$，故x^{-1}在G中。而且，如果x，$y\in G$，因为$y^{-1}x^{-1}$是xy的逆：

$$(xy)(y^{-1}x^{-1})=x(yy^{-1})x^{-1}=xex^{-1}=e,$$

类似地，$(y^{-1}x^{-1})(xy)=e$，故$xy\in G$。

我们证明G是开集。

7.7-2 定理(可逆元) 设A是复Banach代数且具有单位元，则A的一切可逆元之集G是A的一开子集；因此，A的一切不可逆元组成之子集$M=A-G$是闭的。

证明。命$x_0\in G$，必须证明每个充分接近x_0的$x\in A$，比如说

$$\|x-x_0\|<\frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$$

属于G。设$y=x_0^{-1}x$，$z=e-y$，利用上节中的(6)式得

$$\|z\|=\|-z\|=\|y-e\|=\|x_0^{-1}x-x_0^{-1}x_0\|$$

$$=\|x_0^{-1}(x-x_0)\|\leqslant\|x_0^{-1}\|\|x-x_0\|<1.$$

于是$\|z\|<1$，由7.7-1知$e-z$可逆。因此，$e-z=y\in G$。因为，G是群，亦有

$$x_0y=x_0x_0^{-1}x=x\in G.$$

因为$x_0\in G$是任意的，这证明G是开的，其余集M是闭的。∎

参考定义7.6-6，我们定义元$x\in A$的谱半径$r_\sigma(x)$为

$$r_\sigma(x)=\sup_{\lambda\in\sigma(x)}|\lambda|, \tag{3}$$

并证明

7.7-3 定理(谱) 设A是具有单位元e的复Banach代数，则对任一$x\in A$，谱$\sigma(x)$是紧集，谱半径满足

(4) $$r_\sigma(x)\leqslant\|x\|.$$

证明。如果$|\lambda|>\|x\|$，则$\|\lambda^{-1}x\|<1$。于是由7.7-1，$e-\lambda^{-1}x$是可逆的。因此，$-\lambda(e-\lambda^{-1}x)=x-\lambda e$也是可逆的. 于是，$\lambda\in\rho(x)$。这就证明了(4)式成立。

因此，$\sigma(x)$是有界的。我们用证明$\rho(x)=C-\sigma(x)$是开的来证明$\sigma(x)$是闭的。

如果$\lambda_0\in\rho(x)$，则按定义$x-\lambda_0 e$可逆。由7.7-2，存在$x-\lambda_0 e$的一个邻域$N\subset A$，全由可逆元组成。现固定x，映象$\lambda\mapsto x-\lambda e$是连续的。因此，对充分接近$\lambda_0$的$\lambda$，比如说，$|\lambda-\lambda_0|<\delta$ $(\delta>0)$的一切元$x-\lambda e$落于N中。于是，这些$x-\lambda e$是可逆的，这即是说，相应的λ是属于$\rho(x)$的。因$\lambda_0\in\rho(x)$是任意的，故$\rho(x)$是开的，即$\sigma(x)=C-\rho(x)$是闭的。

定理证明了$\rho(x)\neq\phi$。我们也有

7.7-4 定理(谱) 在前一定理的假设下，$\sigma(x)\neq\phi$。

证明。命$\lambda,\mu\in\rho(x)$且

$$v(\lambda)=(x-\lambda e)^{-1},w=(\mu-\lambda)v(\lambda),$$

则 $$x-\mu e=x-\lambda e-(\mu-\lambda)e=(x-\lambda e)(e-w).$$

两端取逆

(5) $$v(\mu)=(e-w)^{-1}v(\lambda).$$

现利用此公式。设μ充分接近λ，以致$\|w\|<\frac{1}{2}$，则由(1)式

$$\|(e-w)^{-1}-e-w\|=\|\sum_{j=2}^{\infty}w^j\|$$

$$\leqslant\sum_{j=2}^{\infty}\|w\|^j=\frac{\|w\|^2}{1-\|w\|}\leqslant 2\|w\|^2.$$

由此及(5)式

$$\|v(\mu)-v(\lambda)-(\mu-\lambda)v(\lambda)^2\|=\|(e-w)^{-1}v(\lambda)-(e+w)v(\lambda)\|\leqslant\|v(\lambda)\|\|(e-w)^{-1}-(e+w)\|\leqslant 2\|w\|^2\|v(\lambda)\|.$$

$\|w\|^2$含因子$|\mu-\lambda|^2$，因此，用$|\mu-\lambda|$除不等式且命$\mu\to\lambda$，知$\|w\|^2/|\mu-\lambda|\to 0$，左边也如此．故

$$(6)\qquad \frac{1}{\mu-\lambda}[v(\mu)-v(\lambda)]\to v(\lambda)^2.$$

这点在下面要用到．

设$f\in A'$，A'是A的共轭空间，亦考虑为Banach空间．定义h：$\rho(x)\to C$，$h(\lambda)=f(v(\lambda))$．因为，f是连续的，于是，h是连续的．应用f于(6)式，于是得

$$\lim_{\mu\to\lambda}\frac{h(\mu)-h(\lambda)}{\mu-\lambda}=f(v(\lambda)^2).$$

这证明h在$\rho(x)$的每一点处是全纯的．

如果$\sigma(x)$是空的，则$\rho(x)=C$．于是，h是整函数．因为$v(\lambda)=-\lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}x)^{-1}$且$(e-\lambda^{-1}x)^{-1}\to e^{-1}=e$ $(|\lambda|\to\infty)$，我们得

$$(7)\qquad |h(\lambda)|=|f(v(\lambda))|\leqslant\|f\|\|v(\lambda)\|=\|f\|\frac{1}{|\lambda|}\|(e-\frac{1}{\lambda}x)^{-1}\|\to 0$$

$(|\lambda|\to\infty)$．这就证明了h在C上有界．因此，根据Liouville定理

(见7.5节)，h是常数，且由(7)式，此常数为0。因为$f\in A'$是任意的，$h(\lambda)=f(v(\lambda))=0$，由 4.3-4蕴含 $v(\lambda)=0$。但这是不可能的，因为，这将意味着

$$\|e\|=\|(x-\lambda e)v(\lambda)\|=\|0\|=0$$

这与$\|e\|=1$发生矛盾。因此，$\sigma(x)=\phi$不可能成立。

单位元e的存在性是我们讨论中不可缺少的。在许多应用中，A可能有单位元，也可能没有单位元。在此情况下，可以按下面的典型方式赋予A一个单位元。

设$\tilde{A}$是一切有序对(x,α)之集，这里，$x\in A$，且α是数。定义

$$(x,\alpha)+(y,\beta)=(x+y,\alpha+\beta)$$
$$\beta(x,\alpha)=(\beta x,\beta\alpha)$$
$$(x,\alpha)(y,\beta)=(xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta)$$
$$\|(x,\alpha)\|=\|x\|+|\alpha|$$
$$\tilde{e}=(0,1).$$

则$\tilde{A}$是具有单位元$\tilde{e}$的Banach代数。事实上，在7.6节中的(1)至(3)式及(6)，(7)式是容易验证的，而完备性从A和C得出。

而且，映象$x\mapsto(x,0)$是A到$\tilde{A}$的一个子空间上的同构（两者都视为赋范空间）。此子空间有余维数 1. 如果将x与$(x,0)$等同，则$\tilde{A}$由A简单地加上一个由$\tilde{e}$产生的一维向量空间而得到。

习　题

1. 如果$\|x-e\|<1$，证明，x是可逆的且

$$x^{-1}=e+\sum_{i=1}^{\infty}(e-x)^i.$$

2. 证明，在定理7.7-1中，

$$\|(e-x)^{-1}-e-x\| \leqslant \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}.$$

3. 如果x是可逆的且y使$\|yx^{-1}\|<1$，证明，$x-y$是可逆的，且对任意$a \in A$，记$a^0=e$则有

$$(x-y)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty} x^{-1}(yx^{-1})^i.$$

4. 证明，形如

$$x=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

之一切复矩阵之集构成一切复2×2矩阵的代数之子代数，并求$\sigma(x)$。

5. 应该注意，Banach 代数A的元x的谱$\sigma(x)$依赖于A。事实上试证明，如果B是A的一子代数，则$\tilde{\sigma}(x) \supset \sigma(x)$，这里，$\tilde{\sigma}(x)$是将$x$视为$B$的元的谱。

6. 命$\lambda, \mu \in \rho(x)$，证明，豫解方程

$$v(\mu)-v(\lambda)=(\mu-\lambda)v(\mu)v(\lambda),$$

这里，$v(\lambda)=(x-\lambda e)^{-1}$。

7. 可除代数是具有单位元的代数并使每一非零元可逆。如果，复Banach 代数A是可除代数，证明，A是单位元的一切数量倍组成之集。

8. 设G与7.7-2中所定义的一样。证明，由$x \to x^{-1}$确定的映象$G \to G$是连续的。

9. 一元$x \in A$的左逆是指使$yx=e$的元$y \in A$。类似地，如果，$xz=e$，那末，z叫做x的右逆。如果代数A的每一元$x \neq 0$有左逆，证明，A是可除代数。

10. 如果(x_n)和(y_n)是赋范代数A中的Cauchy 序列，证明，$(x_n y_n)$是A中的Cauchy序列。其次，如果$x_n \to x$和$y_n \to y$，证明，$x_n y_n \to xy$。

第 八 章

赋范空间上的紧线性算子及其谱

紧线性算子在应用中是非常重要的。比如在积分方程理论和各种数学物理中，它们起着重要的作用。

紧线性算子理论可作为早期泛函分析的一种模式。它们的性质非常类似有限维空间上的算子的那些性质。对于紧线性算子，谱论可以圆满地将线性积分方程的Fredholm的著名理论推广到具有参变数λ的线性泛函方程$Tx-\lambda x=y$上去。这个推广了的理论叫做Riesz-Schauder理论，见F.Riesz-1918和J.Shauder-1930。

主要内容方向摘要

线性算子的紧性（定义8.1-1）由积分方程已提示出来，它具有Fredholm理论中的基本性质。我们将在8.1节和8.2节中讨论紧线性算子的重要的一般性质。在8.3节和8.4节中讨论谱性质。Riesz-Shauder理论是以8.3节和8.4节为基础的，关于算子方程的结果，陈述在8.5节和8.7节中，这里，在8.7节中还包含了对积分方程的应用。

8.1 赋范空间上的紧线性算子

紧线性算子定义如下。

8.1-1 定义（紧线性算子） 设X，Y是赋范空间，算子T：$X\to Y$叫做紧线性算子（或全连续算子），如果T是线性的且对每一有界集$M\subset X$，$T(M)$是相对紧的，即闭包$\overline{T(M)}$是紧的（见定义2.5-1）。

分析中的许多线性算子都是紧的。紧线性算子的系统理论是从形如

$$(1)\qquad (T-\lambda I)x(s)=y(s)\text{，这里，}Tx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt$$

的积分方程理论中提出来的，其中，$\lambda\in C$是参数①，y和核$K(s,t)$是给定的函数（满足一定的条件），x是未知函数。这种方程在常微分方程和偏微分方程理论中也起着作用。D.Hilbert(1912) 发现了一个意想不到的事实。关于(1)式的可解性的基本结果（"Fredholm理论"）不依赖于(1) 式中T的积分表达式的存在，只依赖于(1)式中的T是紧线性算子这一事实。F.Riesz (1918) 在他的著名的1918年的论文中将Fredholm理论抽象地公理化（我们将在8.7节中考察积分方程）。

"紧性"一词以定义的方式提了出来，旧名词"全连续"则可以由下述引理诱导出来，并证明了紧线性算子是连续的，但其逆常通是不真的。

---

① 我们假设$\lambda\neq 0$.则称(1)式为第二型的，$\lambda=0$时，叫做第一型的，两种方程相应的理论差别很大.少数几句话不可能说明其原因；见R.Courant和D.Hilbert (1953—62)卷Ⅰ，P.159.引入参变数λ是H.Poincaré的思想(1896)。

8.1-2 引理（连续性） 设X, Y是赋范空间，则

(a) 每个紧线性算子$T: X\to Y$是有界的，因此是连续的。

(b) 如果$\dim X=\infty$，恒等算子$I: X\to X$是非紧的（它是连续的）。

证明：(a)单位球面$U=\{x\in X \mid \|x\|=1\}$是有界的。因为$T$是紧的，故$\overline{T(U)}$是紧的。由2.5-2，它是有界的，于是

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|<+\infty,$$

因此，T是有界的，且由2.7-9证明它是连续的。

(b) 显然，闭单位球$M=\{x\in X \mid \|x\|\leqq 1\}$是有界的。如果$\dim X=\infty$，则2.5-5蕴含$M$是非紧的，于是，$I(M)=M=\overline{M}$不是相对紧的。

由集的紧性定义(2.5-1)，易得算子紧性的一个有用的判别法。

8.1-3 定理（紧性判别准则） 设X, Y是赋范空间，$T: X\to Y$是线性算子，则T是紧的当且仅当映X中每一有界序列(x_n)为Y中具有收敛子序列的序列。

证明。如果T是紧的，(x_n)是有界的，则(Tx_n)在Y中的闭包是紧的，定义2.5-1证明(Tx_n)含有收敛的子序列。

反之，设每一有界序列(x_n)含有子序列(x_{n_k})使(Tx_{n_k})在Y中收敛。考察任意有界子集$B\subset X$，设(y_n)是$T(B)$中的任一序列。则$y_n=Tx_n$对某个$x_n\in B$，且因B有界，故(x_n)有界。按假设，(Tx_n)含有收敛的子序列。因为(y_n)是$T(B)$中任意的序列，由定义2.5-1，因此，$\overline{T(B)}$是紧的。按定义，这表明T是紧的。

由此定理，几乎显然地，二紧线性算子$T_j: X\to Y$的和T_1+T_2是紧的（见习题2），类似地，αT_1是紧的，α是数。因此，有

下列结果。

从X到Y中的紧线性算子构成一向量空间。

另外,定理8.1-3还蕴含了有限维空间中某些更为简洁的结果。

8.1-4 定理(有限维定义域或值域) 设X, Y是赋范空间, $T:X\to Y$是线性算子, 则

(a) 如果T是有界的且$\dim T(X)<\infty$, 则算子T是紧的;

(b) 如果$\dim X<\infty$, 则算子T是紧的。

证明。(a) 设(x_n)是X中任意有界序列, 则不等式$\|Tx_n\|\leqslant\|T\|\|x_n\|$表明$(Tx_n)$是有界的。因此, 由$\dim T(X)<\infty$, 按2.5-3, (Tx_n)是相对紧的。于是(Tx_n)有收敛子序列。因为(x_n)是X中任意有界序列, 按8.1-3算子T是紧的。

(b) 注意,由2.7-8, $\dim X<\infty$蕴含T的有界性, 并由2.6-9 (b)有$\dim T(X)\leqslant\dim X$, 于是从(a)得出(b)。

我们应提及,一算子$T\in B(X,Y)$, $\dim T(X)<\infty$[见8.1-4]常常叫做有限秩的算子。

下面的定理建立了紧线性算子序列的极限是紧线性算子的条件。该定理也是用紧线性算子序列的一致算子极限去证明给定算子的紧性的重要工具。

8.1-5 定理(紧线性算子序列) 设(T_n)是从赋范空间X到Banach空间Y中的紧线性算子序列, 如果(T_n)是一致算子收敛的, 比如说, $\|T_n-T\|\to 0$ (见4.9节), 则极限算子T是紧的。

证明。采用"对角线方法", 我们证明, 对X中任意有界序列(x_m), 其像(Tx_m)有收敛子序列, 然后应用定理8.1-3。

因为T_1是紧的，(x_m)有子序列$(x_{1,m})$使$(T_1x_{1,m})$是Cauchy序列，类似地，$(x_{1,m})$有子序列$(x_{2,m})$使$(T_2x_{2,m})$是Cauchy序列，继续这一方法，得"对角线序列"$(y_m)=(x_{m,m})$是(x_m)的子序列，使得对每个固定的正整数n，序列$(T_ny_m)_{m\in N}$是Cauchy序列。(x_m)是有界的，比如说，$\|x_m\|\leqslant c$，对一切m。因此，$\|y_m\|\leqslant c$，对一切m。设$\varepsilon>0$，因$T_m\to T$，存在$n=p$，使$\|T-T_p\|<\varepsilon/3c$。因$(T_py_m)_{m\in N}$是Cauchy序列，存在N使

$$\|T_py_j-T_py_k\|<\varepsilon/3 \qquad (j,k>N)$$

因此，当$j,k>N$时得

$$\|Ty_j-Ty_k\|\leqslant\|Ty_j-T_py_j\|+\|T_py_j-T_py_k\|+$$

$$+\|T_py_k-Ty_k\|\leqslant\|T-T_p\|\cdot\|y_j\|+\varepsilon/3+\|T_p-T\|\cdot\|y_k\|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c=\varepsilon.$$

这就证明了(Ty_m)是Cauchy序列。因Y完备，故收敛。注意(y_m)是任意有界序列(x_m)的子序列，定理8.1-3蕴含算子T的紧性。∎

注意，本定理如果用强算子收敛$\|T_nx-Tx\|\to0$代替一致算子收敛是不正确的。这可以从$T_n: l^2\to l^2$，$T_nx=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,0\cdots)$看出，这里，$x=(\xi_j)\in l^2$。因为，$T_n$是线性的且有界，由8.1-4(a)，$T_n$是紧的。显然，$T_nx\to x=Ix$，但$I$不是紧的，因为，$\dim l^2=\infty$（见8.1-2(b)）。

下面的例子说明如何应用本定理证明算子的紧性。

8.1-6例 （空间l^2） 证明T的紧性，$T: l^2\to l^2$，$y=(\eta_j)=Tx$，这里，$\eta_j=\xi_j/j$，$j=1,2,\cdots$

解：T是线性的，如果$x=(\xi_j)\in l^2$，则$y=(\eta_j)\in l^2$。命$T_n: l^2\to l^2$

$$T_n x = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \cdots\right).$$

T_n是线性有界的，由8.1-4(a)，T是紧的而且有

$$\|(T-T_n)x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\eta_j|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}|\xi_j|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \leqslant \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2},$$

对范数为1的一切x取上确界，得

$$\|T-T_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

因此，$T_n \to T$.由定理8.1-5知T是紧的。

紧线性算子的另一个有趣的基本的性质是它变弱收敛序列为强收敛序列。

8.1-7 定理(弱收敛) 设X,Y是赋范空间，$T: X \to Y$是紧线性算子。设(x_n)在X中是弱收敛的，比如说，$x_n \xrightarrow{w} x$.则(Tx_n)在Y中是强收敛且极限$y=Tx$.

证明。记$y_n = Tx_n$，$y = Tx$.首先证明

$$y_n \xrightarrow{w} y; \tag{2}$$

然后证明

$$y_n \longrightarrow y. \tag{3}$$

设g是Y上任意有界线性泛函.在X上定义泛函f，

$$f(z) = g(Tz) \qquad (z \in X),$$

f是线性的.因为T是紧的，因此有界，故f是有界的，且

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leqslant \|g\| \cdot \|Tz\| \leqslant \|g\| \cdot \|T\| \cdot \|z\|.$$

按定义，$x_n \xrightarrow{w} x$蕴含$f(x_n)\to f(x)$。因此，由定义$g(Tx_n)\to g(Tx)$，即是$g(y_n)\to g(y)$。因g是任意的，这就证明了(2)式。

现在证明(3)式。设(3)式不成立，则(y_n)有子序列(y_{n_k})使

$$\|y_{n_k}-y\|\geqslant\eta, \tag{4}$$

对某个$\eta>0$。因(x_n)弱收敛，由4.8-3(c)，(x_n)是有界的，于是(x_{n_k})也有界。现由8.1-3，T的紧性蕴含(Tx_{n_k})有收敛的子序列，比如说，$(\tilde{y}_j)$。设$\tilde{y}_j\to\tilde{y}$。当然$\tilde{y}_j \xrightarrow{w} \tilde{y}$。由(2)式及4.8-3(b)，因此，$\tilde{y}=y$。因而$\|\tilde{y}_j-y\|\to 0$，但由(4)式，$\|\tilde{y}_j-y\|\geqslant\eta>0$。这一矛盾证明(3)式必定成立。▌

习　　题

1. 证明，任何赋范空间上的零算子都是紧的。

2. 如果T_1和T_2是从赋范空间X到赋范空间Y中的紧线性算子，证明，T_1+T_2是紧线性算子。证明，从X到Y中的紧线性算子构成$B(X,Y)$的一子空间$C(X,Y)$。

3. 如果Y是Banach空间，证明，习题2中的$C(X,Y)$是$B(X,Y)$的闭子集。

4. 如果Y是Banach空间，证明，习题2中的$C(X,Y)$是Banach空间。

5. 在正文中已证明，如果用强算子收敛来代替一致算子收敛，定理8.1-5是不正确的。试证，用以证明上述结论的算子T_n是有界的。

6. 值得注意的，8.1-1中的条件可以减弱而不影响紧线性算子这一概念。事实上，证明，线性算子$T: X\to Y$(X, Y是赋范空间)是紧的当且仅当单位球$M\subset X$之像$T(M)$在Y中是相对紧的。

7. 证明，线性算子$T:X\to X$是紧的当且仅当对范数不超过1的每一向量序列(x_n)，序列(Tx_n)有收敛子序列。

8. 如果z是赋范空间X中之一固定元且$f\in X'$，证明，由$Tx=f(x)z$定义的算子$T: X\to X$是紧的。

9. 如果X是内积空间，证明，对固定的y和z，$Tx=\langle x,y\rangle z$定义了X上的一紧线性算子。

10. 设Y是Banach空间且$T_n: X \to Y$, $n=1,2,\cdots$,是有限秩算子。如果(T_n)是一致算子收敛的，证明，极限算子是紧的。

11. 证明，Hilbert空间H到H的有限维子空间上的投影是紧的。

12. 证明，由$Tx=y=(\eta_j)$，$\eta_j=\xi_j/2^j$定义的T：$l^2 \to l^2$是紧的。

13. 证明，由$y=(\eta_j)=Tx, \eta_j=\xi_j/j$定义的$T$：$l^p \to l^p$，$1 \leqslant p < \infty$是紧的。

14. 证明，由$y=(\eta_j)=Tx, \eta_j=\xi_j/j$定义的$T$：$l^\infty \to l^\infty$是紧的。

15. （连续映象）.如果$T: X \to Y$是度量空间X到度量空间Y中的连续映象，证明，相对紧集$A \subset X$的象是相对紧的。

8.2 紧线性算子的进一步的性质

在本节中，我们证明，赋范空间上的紧线性算子有可分的值域及紧共轭算子。在下节一开始的紧线性算子的谱论研究中，需要用到这些性质。

我们的研究依据两个与集的紧性相关的有趣的概念。

8.2-1 定义(ε—网，全有界) 设B是度量空间X的一子集，$\varepsilon>0$是给定的正数。集$M_\varepsilon \subset X$叫做B的ε—网，如果，对每一点$z \in B$，存在M_ε中的点其到z的距离小于ε。集B叫做全有界的，如果对每个$\varepsilon>0$都存在B的有穷ε—网$M_\varepsilon \subset X$，这里，“有穷”表示M_ε是有穷集（即含有限多个点）。∎

因而，B的全有界性意味着，对每个给定的$\varepsilon>0$，集B含于有穷多个半径为ε的开球之并中。

从下面的在本节的证明中起关键作用的引理，可以看出这些概念的意义和作用。

8.2-2 引理(全有界性) 设B是度量空间X的子集，则

(a) 如果B是相对紧的，则B是全有界的；

(b) 如果B是全有界的且X是完备的，则B是相对紧的；

(c) 如果B是全有界的，则对每个$\varepsilon>0$，有有穷ε—网$M_\varepsilon\subset B$。

(d) 如果B是全有界的，则B是可分的。

证明：(a) 设B是相对紧，证明，任意固定$\varepsilon_0>0$，存在B的有穷ε_0—网。如果$B=\Phi$则Φ是B的ε_0—网。如果$B\neq\Phi$，任取$x_1\in B$，如果$d(x_1,z)<\varepsilon_0$，对一切$z\in B$，则$\{x_1\}$是B的ε_0—网。否则，命$x_2\in B$，且使$d(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$，如果对一切$z\in B$

$$d(x_j,z)<\varepsilon_0\quad(j=1\text{或}2)\tag{1}$$

则$\{x_1,x_2\}$是B的一个ε_0—网。否则，设$z=x_3\in B$且不满足(1)式。如果对一切$z\in B$

$$d(x_j,z)<\varepsilon_0\qquad(j=1,2,\text{或}3),$$

则$\{x_1,x_2,x_3\}$是B的一个ε_0—网。否则，又可以选择一个$x_4\in B$，等等。我们断定存在一个正整数n，使其n步之后而得到的集$\{x_1,\cdots,x_n\}$是B的一个ε_0—网。事实上，如果这种n不存在，则可以构造出一序列$\{x_j\}$满足

$$d(x_j,x_k)\geqslant\varepsilon_0\qquad(j\neq k)$$

易知，(x_j)没有Cauchy子序列。因此，(x_j)不可能存在在X中收敛的子序列，这就与B的相对紧性矛盾，因为，由构造法知(x_j)为B中的点列。因此，必有B的有穷ε_0—网。因$\varepsilon_0>0$是任意的，故B是全有界的。

(b) 设B是全有界的，X是完备的。考察B中的任意一序列(x_n)，并证明它在X中有收敛的子序列；于是B是相对紧的。按假设，对$\varepsilon=1$，B有一有限的ε—网。因此，B含于有穷多个半径为1的开球的并中。从这些球中取一个球B_1，使B_1含有(x_n)的无限多个项。设$(x_{1,n})$是在B_1中的(x_n)的子序列。类似地，按假设，B也含于有限多个半径为1/2的开球之并中。从这些球中又取一球B_2，B_2含有子序列$(x_{1,m})$的一子序列$(x_{2,m})$，继续这一过程，取$\varepsilon=1/3$，

$1/4,\cdots$ 且命$y_n=x_{n,n}$。则对每一给定的$\varepsilon>0$，存在一个N(依赖于ε)，使得当$n>N$时，一切y_n都在一个半径为ε的球中。因此，(y_n)是 Cauchy 序列。因为X是完备的，故(y_n)在X中收敛，比如说，$y_n\to y\in X$。又，$y_n\in B$蕴含$y\in\overline{B}$。其次，按闭包的定义，对$\overline{B}$中的每一序列(z_n)存在B中的一序列(x_n)满足$d(x_n,z_n)\leqslant 1/n$，对每个n成立。因为(x_n)在B中，它有一子序列在$\overline{B}$中收敛（如刚才所证明的）。因此，(z_n)也有一子序列在$\overline{B}$中收敛（因为$d(x_n,z_n)\leqslant 1/n$）。于是$\overline{B}$是紧的，故B是相对紧的。

(*c*) $B=\Phi$时是显然的。命$B\neq\Phi$。按假设，对给定的$\varepsilon>0$，存在B的有限ε_1—网$M_{\varepsilon_1}\subset X$，这里，$\varepsilon_1=\varepsilon/2$。因此，$B$含于有限多个以$M_{\varepsilon_1}$中元为中心，$\varepsilon_1$为半径的开球的并中。命$B_1,\cdots,B_n$是那些同$B$相交的球，$x_1,\cdots,x_n$是它们的中心。选择点$z_j\in B\cap B_j$，见图63，则$M_\varepsilon=\{z_1,\cdots,z_n\}\subset B$是$B$的$\varepsilon$—网，因为，对每个$z\in B$，存在一个$B_j$含$z$，且

$$d(z,z_j)\leqslant d(z,x_j)+d(x_j,z_j)<\varepsilon_1+\varepsilon_1=\varepsilon.$$

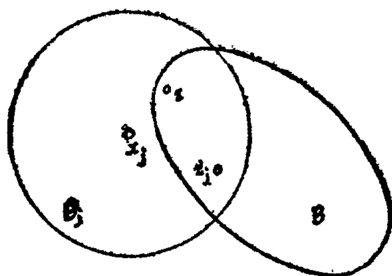


图63 引理8.2-2(*c*)部分证明的示意图

(*d*) 设B是全有界的，则由(*c*)，集B含有自己的一个有穷ε—网$M_{1/n}$，这里，$\varepsilon=\varepsilon_n=1/n$，$n=1,2,\cdots$。所有这些网之并$M$是可数的，$M$在$B$中稠密。事实上，对任给的$\varepsilon>0$，存在这样的$n$，使$1/n<\varepsilon$；因此，对任意$z\in B$，存在$a\in M_{1/n}\subset M$，使$d(z,a)<\varepsilon$，这就证明了$B$是可分的。▌

全有界性蕴含有界性，其逆一般不成立。

事实上，第一个结论几乎是显然的。而第二个结论即得，如果注意闭单位球$U=\{x\mid \|x\|\leqslant 1\}\subset l^2$是有界的，但不是全有界的。因为，$l^2$是无限维的且完备的，于是$U$不是紧的（见2.5-5），因此，由8.2-2$(b)$不是全有界的。

引理8.2-2所包含的那些性质，在以后的研究中是必须的。其他一些性质虽然有趣但对我们的目的来说不是必须的将陈述于习题中，特别，见习题2到4。

应用引理，现在易证下面的定理。

8.2-3 定理(值域可分性) 紧线性算子$T:X\to Y$的值域$\mathscr{R}(T)$是可分的，这里，X,Y是赋范空间。

证明。考察球$B_n=B(0,n)\subset X$，因为T是紧的，值域$C_n=T(B_n)$是相对紧的，按引理8.2-2，C_n是可分的。任何元$x\in X$的范数是有限的，于是，对充分大的n，有$\|x\|<n$。因此，$x\in B_n$，因而

$$(2)\qquad (a)\ X=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,\quad (b)\ T(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}T(B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n.$$

因C_n是可分的，它有可数稠密子集D_n，其并

$$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$$

是可数的。故(2b)证明D在值域$\mathscr{R}(T)=T(X)$中稠密。▌

在下一定理中，我们证明在赋范空间X上的紧线性算子可以延拓到X的完备化空间上，延拓算子是紧线性算子。

8.2-4 定理(紧延拓) 由赋范空间X到Banach空间Y中的紧线性算子$T:X\to Y$具有紧线性延拓$\tilde{T}:\hat{X}\to Y$，这里，$\hat{X}$是X的

完备化（见2.3-2）.

证明. 可以认为X是$\hat{X}$的子空间，见定理2.3-2.因为T是有界的（见8.1-2），故它具有有界线性延拓$\tilde{T}:\hat{X}\to Y$，见2.7-11.我们证明T的紧性蕴含$\tilde{T}$也是紧的. 为此，考察$\hat{X}$中任有界序列$(\hat{x}_n)$，并证明$(\tilde{T}\hat{x}_n)$有收敛的子序列.

因X在$\hat{X}$中稠密，故在X中存在序列(x_n)使$\hat{x}_n-x_n\to 0$.显然，(x_n)也是有界的.因T是紧的，故(Tx_n)有收敛子序列(Tx_{n_k}).命

$$Tx_{n_k}\to y_0\in Y. \tag{3}$$

现因$\hat{x}_n-x_n\to 0$蕴含$\hat{x}_{n_k}-x_{n_k}\to 0$.$\tilde{T}$是线性和有界的，故它也是连续的.于是得（见1.4—8）

$$\tilde{T}\hat{x}_{n_k}-Tx_{n_k}=\tilde{T}(\hat{x}_{n_k}-x_{n_k})\to\tilde{T}0=0.$$

由(3)式，这点就蕴含$\tilde{T}\hat{x}_{n_k}\to y_0$.我们证明了任何有界序列$(\hat{x}_n)$有子序列$(\hat{x}_{n_k})$使$(\tilde{T}\hat{x}_{n_k})$收敛.由8.1-3，这就证明了$\tilde{T}$的紧性. ▮

本章末我们将看到紧线性算子出现在实际和理论上都极重要的一些算子方程中. 这些方程的可解性的一般理论，实质上又要利用到伴随算子. 最关键的联系是紧线性算子的伴随算子本身是紧的这一事实. 下面证明紧线性算子的这一重要性质，然后，在下一节中，着手讨论这些算子的谱.

8.2-5 定理(伴随算子) 设$T:X\to Y$是线性算子. 如果T是紧的，则它的伴随算子$T^{\times}:Y'\to X'$也是紧的，这里，X, Y是赋范空间，X',Y'分别是X,Y的对偶空间（见2.10-3）.

证明. 考察Y'的任意有界集B，比如说，

$$\|g\|\leqslant c,\quad \forall g\in B,$$

并证明值域$T^{\times}(B)\subset X'$是全有界的，因为X'是完备的（见2.10-4），由8.2-2(b)，于是$T^{\times}(B)$是相对紧的.

因此，必须证明，对任意固定的$\varepsilon_0>0$，值域$T^{\times}(B)$有有穷

ε_0—网。因为T是紧的，单位球

$$U=\{x \mid \|x\|\leqslant 1, x\in X\}$$

的值域$T(U)$是相对紧的。因此，由8.2-2(a)，$T(U)$是全有界的。从8.2-2(c)得出，存在$T(U)$的有穷ε_1—网$M\subset T(U)$，这里，$\varepsilon_1=\varepsilon_0/4c$。这意味着$U$含有点$x_1,\cdots, x_n$，使得对每个$x\in U$，满足

(4) $\|Tx-Tx_j\|<\varepsilon_0/4c$，对某个$j$。

定义线性算子$A: Y'\to \mathbf{R}^n$

(5) $$Ag=(g(Tx_1),\cdots,g(Tx_n)).$$

按假设g是有界的，由8.1-2(a)，T是有界的。因此，由8.1-4，A是紧的。因B是有界的，$A(B)$是相对紧的。因此，由8.2-2(a)，$A(B)$是全有界的。由8.2-2(c)，它自身含有一个有穷ε_2—网$\{Ag_1,\cdots,Ag_m\}$，这里，$\varepsilon_2=\varepsilon_0/4$。这意味着，对每个$g\in B$满足

(6) $\|Ag-Ag_k\|_0<\frac{1}{4}\varepsilon_0$，对某个$k$。

这里，$\|\cdot\|_0$是R^n上的范数。我们将证明$\{T^\times(B)g_1,\cdots T^\times g_m\}$是所要求的$T^\times$的$\varepsilon_0$—网。于是证明完成。

$$X \xrightarrow{T} Y$$

$$T^\times(B)\subset X' \xleftarrow{T^\times} Y'\supset B$$

$$Y' \xrightarrow{A} \mathbf{R}^n$$

图64 定理8.2-5证明中的符号

从(5)式和(6)式立即看出，对每个j和每个$g\in B$存在一个k使得

(7) $$|g(Tx_j)-g_k(Tx_j)|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}|g(Tx_j)-g_k(Tx_j)|^2$$

$$=\|A(g-g_k)\|_0^2<\left(\frac{1}{4}\varepsilon_0\right)^2,$$

命$x\in U$是任意的，则存在一个j使(4)式成立。命$g\in B$是任意的，则存在一个k使(6)式成立。因而对此k和每个j，(7)式成立。于是，得

$$|g(Tx)-g_k(Tx)|\leqslant|g(Tx)-g(Tx_j)|$$
$$+|g(Tx_j)-g_k(Tx_j)|+|g_k(Tx_j)-g_k(Tx)|$$

$$<\|g\|\|Tx-Tx_j\|+\frac{1}{4}\varepsilon_0+\|g_k\|\|Tx_j-Tx\|$$

$$\leqslant c\frac{\varepsilon_0}{4c}+\frac{\varepsilon_0}{4}+c\frac{\varepsilon_0}{4c}<\varepsilon_0.$$

因为此式对每个$x\in U$成立，且按$T^\times$的定义有$g(Tx)=(T^\times g)(x)$，等等，于是我们最后得到

$$\|T^\times g-T^\times g_k\|=\sup_{\|x\|=1}|(T^\times(g-g_k))(x)|$$
$$=\sup_{\|x\|=1}|g(Tx)-g_k(Tx)|<\varepsilon_0.$$

这证明$\{T^\times g_1,\cdots,T^\times g_n\}$是$T^\times(B)$的$\varepsilon_0$—网。因$\varepsilon_0>0$是任意的，则$T^\times(B)$是全有界的。因此，由8.2-2(b)，它是相对紧的。因为B是Y'的任意有界子集，由定义8.1-1，这就证明了$T^\times$的紧性。▮

习　　题

1. 设X是全有界度量空间，证明，每一无限子集$Y\subset X$，有直径小于给定的$\varepsilon>0$的无限子集Z。

2. 如果度量空间X是紧的，证明，X是完备的。证明，完备性并不蕴含紧性。

3. 举例说明，对紧性而言，全有界是必要的，但不是充分的。

4. 证明，度量空间X是紧的当且仅当它是完备的且全有界的。

5. 如果度量空间(X,d)是紧的，证明，对任意$e>0$，空间X有一个有限子集M，使其每一点$x\in X$到M的距离$\delta(x,M)=\inf\limits_{y\in M}d(x,y)<e$。

6. 由$Tx=y=(\eta_j)$，这里，$x=(\xi_j)$且

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{jk}\xi_k,\qquad\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{jk}|^2<\infty,$$

定义算子$T:l^2\to l^2$，证明，T是紧的（利用8.1-5）。

7. 证明，习题6定义的那种类型的算子构成$B(l^2,l^2)$的一子空间。举例说明，习题6中，对于紧性而言，条件是充分的，但不必要。

8. 是否存在满射的紧线性算子$T: l^\infty \to l^\infty$?

9. 如果$T \in B(X,Y)$是非紧的，T在X的无限维子空间上的限制能否是紧的?

10. 设(λ_n)是数序列，使其$\lambda_n \to 0 (n \to \infty)$，由$Tx = y = (\eta_j)$，这里，$x = (\xi_j)$和$\eta_j = \lambda_j \xi_j$，定义$T: l^2 \to l^2$。试证明$T$是紧的。

8.3 赋范空间上紧线性算子的谱性质

在本节和下一节中，考察在赋范空间X上的紧线性算子T: $X \to X$的谱性质。为此目的，我们将再次采用算子

(1) $$T_\lambda = T - \lambda I \qquad (\lambda \in C)$$

以及如7.2节中所定义的谱论的基本概念。

紧线性算子的谱论是有限矩阵的特征值理论（见7.1节）直接的推广，且在许多方面与有限维的情况相似。这一点可以从下面的8.3节和8.4节的摘要可以看到，我们把它安排在这里是为了给读者指出一个方向，通过对这部分的阅读找出学习的门路。在摘要中，也给出了若干相应的定理（正文中，它们的顺序是按证明过程中的相互依赖性而安排的）。

摘要。在赋范空间X上的紧线性算子$T: X \to X$有下列性质。

T的特征值之集是可数的（也可能有限或者空，见8.3-1）。

只有$\lambda = 0$才有可能是特征值之集的聚点（见8.3-1）

每一个谱值$\lambda \neq 0$都是特征值（见8.4-4）。如果X是无限维的，则$0 \in \sigma(T)$。

对$\lambda \neq 0$，T的任何特征空间的维数是有限的（见8.3-3）。

对$\lambda \neq 0$，T_λ，T_λ^2，T_λ^3，…的零空间是有限维的（见8.3-3，8.3-4）且这些算子的值域是闭的（见8.3-5，8.3-6）。

存在数r（依赖于λ，这里，$\lambda \neq 0$）使

$$X = \mathcal{N}(T_\lambda^r) \oplus T_\lambda^r(X)$$

（见8.4-5），而且，零空间满足

$$\mathcal{N}(T_\lambda^r)=\mathcal{N}(T_\lambda^{r+1})=\mathcal{N}(T_\lambda^{r+2})=\cdots$$

而值域满足

$$T_\lambda^r(X)=T_\lambda^{r+1}(X)=T_\lambda^{r+2}(X)=\cdots$$

（见8.4-3）；如果$r>0$，真包含式

$$\mathcal{N}(T_\lambda^0)\subset\mathcal{N}(T_\lambda)\subset\cdots\subset\mathcal{N}(T_\lambda^r)$$

和

$$T_\lambda^0(X)\supset T_\lambda(X)\supset\cdots\supset T_\lambda^r(X)$$

成立（见8.4-3）．

第一个定理是关于特征值的，它指出紧线性算子的点谱并不复杂。立刻会看到，这一定理是非常有用的。事实上，下一节将看到，紧线性算子的每一谱值$\lambda\neq0$（或者没有）只可能是特征值。这表明紧线性算子的谱在很大程度上与有限维空间上的算子的谱是相似的．

8.3-1 定理(特征值) 赋范空间X上的紧线性算子$T:X\to X$的特征值之集是可数的（也可能有限或空）且仅可能有一个聚点$\lambda=0$。

证明．显然，只须证明，对每个实数$k>0$，一切$\lambda\in\sigma_p(T)$，$|\lambda|\geqslant k$，的集是有限的即可以了．

假设对某个$k_0>0$不真。那末，存在无限多个互不相同的使$|\lambda_n|\geqslant k_0$的特征值组成的序列(λ_n)．设$Tx_n=\lambda_n x_n$，对某个$x_n\neq0$。则按定理7.4-3，一切x_n组成的集是线性无关的。命$M_n=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$。则每个$x\in M_n$有唯一的表达式

$$x=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n.$$

应用$T-\lambda_nI$及利用$Tx_j=\lambda_jx_j$得

$$(T-\lambda_nI)x=\alpha_1(\lambda_1-\lambda_n)x_1+\cdots+\alpha_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_{n-1}.$$

我们看出，x_n不再出现在右端。因此

(2) $(T-\lambda_nI)x\in M_{n-1}$，对一切$x\in M_n$。

诸M_n是闭的(见2.4-3)由 Riesz 引理2.5-4，存在一序列(y_n)使

$$y_n\in M_n,\ \|y_n\|=1,\ \|y_n-x\|\geqslant\frac{1}{2},\ \text{对一切}\ x\in M_{n-1}.$$

我们证明

$$(3)\qquad \|Ty_n-Ty_m\|\geqslant\frac{1}{2}k_0\qquad (n>m).$$

于是，因$k_0>0$，(Ty_n)无收敛的子序列，这与T的紧性冲突，因为，(y_n)是有界的。

用加一项和减一项的方法，可以表

$$(4)\qquad Ty_n-Ty_m=\lambda_n y_n-\tilde{x},$$

这里 $$\tilde{x}=\lambda_n y_n-Ty_n+Ty_m.$$

设$m<n$，我们证明$\tilde{x}\in M_{n-1}$。因为，$m\leqslant n-1$，我们看出，$y_m\in M_m\subset M_{n-1}=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}$。因为$Tx_j=\lambda_j x_j$，因此，$Ty_m\in M_{n-1}$。由(2)式

$$\lambda_n y_n-Ty_n=-(T-\lambda_n I)y_n\in M_{n-1}.$$

综合得$\tilde{x}\in M_{n-1}$。因此也有$x=\lambda_n^{-1}\tilde{x}\in M_{n-1}$。于是

$$(5)\qquad \|\lambda_n y_n-\tilde{x}\|=|\lambda_n|\,\|y_n-x\|\geqslant\frac{1}{2}|\lambda_n|$$

$$\geqslant\frac{1}{2}k_0$$

(因为$|\lambda_n|\geqslant k_0$)。由此式及(4)式得到(3)式。因此，假设存在无限多个满足$|\lambda_n|\geqslant k_0$(对某个$k_0>0$)的特征值是不正确的。定理得证。▌

这一定理表明，如果在赋范空间上的紧线性算子有无限多个特征值，则可以将这些特征值排成一个收敛于零的序列。

紧线性算子和有界线性算子的复合仍然是紧线性算子。这一有趣的结果就是下面引理的内容。它有许多应用，本节将用它去

证明紧线性算子的基本性质(下面的 8.3-4)。

8.3-2 引理(积之紧性) 设 $T:X\to X$ 是紧线性算子。$S:X\to X$ 是赋范空间 X 上的有界线性算子。则 TS 和 ST 都是紧的。

证明. 设 $B\subset X$ 是任意的有界集。因为 S 是有界算子，则 $S(B)$ 是有界集。因为 T 是紧的，则集 $T(S(B))=TS(B)$ 是相对紧的，因此，TS 是紧线性算子。

我们证明 ST 也是紧的。命 (x_n) 是 X 中任意一有界序列，则由 8.1-3，(Tx_n) 有收敛子序列 (Tx_{n_k})，且由 1.4-8，(STx_{n_k}) 收敛。因此，由 8.1-3，ST 是紧的。∎

本章一开始曾指出，紧线性算子的谱理论几乎同有限维空间（即是有限矩阵的特征值理论，见 7.1 节）的线性算子的谱理论一样简单。支持我们的结论的一个重要的性质如下。紧线性算子的每一非零特征值有有限维特征空间。实际上，这一结论蕴含在下面定理中。

8.3-3 定理(零空间) 设 $T:X\to X$ 是赋范空间 X 上的紧线性算子，则对每个 $\lambda\neq 0$，$T_\lambda=T-\lambda I$ 的零空间 $\mathcal{N}(T_\lambda)$ 是有限维的。

证明. 我们证明 $\mathcal{N}(T_\lambda)$ 中的闭单位球 M 是紧的，然后应用定理 2.5-5。

设 (x_n) 是 M 中之点列。则 (x_n) 是有界的($\|x_n\|\leqslant 1$)，且由 8.1-3，(Tx_n) 有收敛子序列 (Tx_{n_k})。现因 $x_n\in M\subset\mathcal{N}(T_\lambda)$ 蕴含 $T_\lambda x_n=Tx_n-\lambda x_n=0$。于是，$x_n=\lambda^{-1}Tx_n$ (因 $\lambda\neq 0$)。因而，$(x_{n_k})=(\lambda^{-1}Tx_{n_k})$ 也收敛。因 M 是闭的，其极限仍然在 M 中。因此，由定义 2.5-1 及 (x_n) 在 M 中的任意性知，M 是紧的。此即证明了 $\dim\mathcal{N}(T_\lambda)<\infty$ (由 2.5-5)。∎

8.3-4 推论(零空间) 在定理8.3-3中

(6) $\dim \mathcal{N}(T_\lambda^n) < \infty \qquad n=1,2,\cdots$

和

(7) $\{0\} = \mathcal{N}(T_\lambda^0) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^1) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^2) \subset \cdots$

证明. 因 T_λ 是线性的，故它映 0 为 0[见 2.6 节(3)式]. 因此，$T_\lambda^n x=0$ 蕴含$T_\lambda^{n+1} x=0$，故(7)式成立.

我们证明(6). 由二项式定理

$$T_\lambda^n = (T-\lambda I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k (-\lambda)^{n-k}$$

$$= (-\lambda)^n I + T \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k}.$$

此式可表为

$$T_\lambda^n = w - \mu I \qquad \mu = -(-\lambda)^n,$$

这里，$w=TS=ST$，S 表前一式右端的和. T是紧的，又由 8.1-2 (a)，T 是有界的，故 S 有界. 因此，由引理8.3-2，w 是紧的，将定理 8.3-3 应用于 $w-\mu I$ 得出(6)式. ▌

现在我们对紧线性算子 T 和任意的 $\lambda \neq 0$ 考察 T_λ，T_λ^2，…的值域. 就此而论，首先注意，对有界线性算子而言，零空间总是闭的但值域不必闭，[见 2.7-10 (b) 及 2.7 节的习题 6]. 然而，如果T是紧的，则对每个 $\lambda \neq 0$，T_λ 的值域是闭的. 对T_λ^2, T_λ^3，…结论同样成立. 我们首先对 T_λ 予以证明，对任一$n \in N$，将结果推广到T_λ^n 上去将是直接的.

8.3-5 定理(值域) 设 $T: X \to X$ 是赋范空间X上的紧线性算子，则对每个 $\lambda \neq 0$，$T_\lambda = T - \lambda I$ 的值域是闭的.

证明. 证明是间接的. 设值域$T_\lambda(X)$非闭，则由此导出一矛盾. 证明思路如下.

(a) 考察在$T_\lambda(X)$的闭包中但不在$T_\lambda(X)$中的y，序列$(T_\lambda x_n)$收敛于y. 我们证明，$x_n \notin \mathcal{N}(T_\lambda)$，但$\mathcal{N}(T_\lambda)$包含有使$\|x_n - z_n\| < 2\delta_n$的序列$(z_n)$，这里，$\delta_n$是$x_n$到$\mathcal{N}(T_\lambda)$的距离.

(b) 证明 $a_n \to \infty$，这里，$a_n = \|x_n - z_n\|$.

(c) 考察序列(w_n)，$w_n = a_n^{-1}(x_n - z_n)$，我们得到预期的矛盾.

详细的证明如下.

(a) 设$T_\lambda(X)$非闭，则存在$y \in \overline{T_\lambda(X)}$，$y \notin T_\lambda(X)$. 及$X$中的序列$(x_n)$使

(8) $\quad y_n = T_\lambda x_n \to y.$

因为$T_\lambda(X)$是向量空间，$0 \in T_\lambda(X)$. 但$y \notin T_\lambda(X)$，于是，$y \neq 0$. 这就蕴含$y_n \neq 0$和$x_n \notin \mathcal{N}(T_\lambda)$，对充分大的$n$. 不失一般性，可以假设对一切$n$成立. 因为，$\mathcal{N}(T_\lambda)$是闭的，$x_n$到$\mathcal{N}(T_\lambda)$的距离$\delta_n$是正的，即是

$$\delta_n = \inf_{z \in \mathcal{N}(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0.$$

由 inf 的定义，存在$\mathcal{N}(T_\lambda)$中的一序列(z_n)使

(9) $\quad a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n.$

(b) 我们证明

(10) $\quad a_n = \|x_n - z_n\| \to \infty \qquad (n \to \infty)$

设(10)式不成立. 则$(x_n - z_n)$有有界子序列. 因为T是紧的，由 8.1-3 得知$(T(x_n - z_n))$有收敛子序列. 现由$T_\lambda = T - \lambda I$，$\lambda \neq 0$，有$I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$. 利用$T_\lambda z_n = 0$ [注意$z_n \in \mathcal{N}(T_\lambda)$]，于是得

$$x_n - z_n = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)(x_n - z_n)$$

$$=\frac{1}{\lambda}[T(x_n-z_n)-T_\lambda x_n].$$

$(T(x_n-z_n))$ 有收敛子序列且由(8)式，$(T_\lambda x_n)$收敛；因此，(x_n-z_n)有收敛子序列，比如说，$x_{n_k}-z_{n_k}\to v$。因为T是紧的，于是T是连续的。因而T_λ也是连续的。因此，定理1.4-8给出

$$T_\lambda(x_{n_k}-z_{n_k})\to T_\lambda v.$$

这里，$T_\lambda z_{n_k}=0$，因为$z_n\in\mathcal{N}(T_\lambda)$。于是，由(8)式也有

$$T_\lambda(x_{n_k}-z_{n_k})=T_\lambda x_{n_k}\to y.$$

因此，$T_\lambda v=y$。于是，$y\in T_\lambda(X)$，而这同$y\notin T_\lambda(X)$[见(a)部分证明的开头]矛盾。此矛盾由假设(10)式不成立而得出，于是(10)式成立。

(c) 再次利用(10)式中定义的a_n且命

$$(11)\qquad w_n=\frac{1}{a_n}(x_n-z_n),$$

则有$\|w_n\|=1$。因为$a_n\to\infty$，而$T_\lambda z_n=0$和$(T_\lambda x_n)$收敛，于是得出，

$$(12)\qquad T_\lambda w_n=\frac{1}{a_n}T_\lambda x_n\to 0.$$

再次利用$I=\lambda^{-1}(T-T_\lambda)$，我们得

$$(13)\qquad w_n=\frac{1}{\lambda}(Tw_n-T_\lambda w_n).$$

因为T是紧的和(w_n)是有界的，故(Tw_n)有收敛子序列。其次，由(12)式，$(T_\lambda w_n)$收敛。因此，(13)证明(w_n)有收敛子序列，比如说，

$$(14)\qquad w_{n_j}\to w.$$

同(12)比较得$T_\lambda w=0$。因此，$w\in\mathcal{N}(T_\lambda)$。因为，$z_n\in\mathcal{N}(T_\lambda)$，故也有

$$u_n=z_n+a_nw\in\mathcal{N}(T_\lambda).$$

因此，对于 x_n 到 u_n 的距离必有

$$\|x_n - u_n\| \geqslant \delta_n.$$

具体写出 u_n 并利用(11)式，(9)式，于是得

$$\begin{aligned}\delta_n &\leqslant \|x_n - z_n - a_n w\| \\ &= \|a_n w_n - a_n w\| \\ &= a_n \|w_n - w\| \\ &< 2\delta_n \|w_n - w\|.\end{aligned}$$

用 $2\delta_n > 0$ 去除，我们有 $\frac{1}{2} < \|w_n - w\|$. 这与(14)式矛盾，定理得证. ▌

8.3-6 推论(值域) 在定理 8.3-5 的假设下，对每个 $n=0, 1, 2, \cdots$, T_λ^n 的值域是闭的，而且

$$X = T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset T_\lambda^2(X) \supset \cdots.$$

证明. 第一个结论从定理 8.3-5 得出，注意在 8.3-4 证明中的 w 是紧的. 第二个结论由归纳法得出. 实际上，$T_\lambda^0(X) = I(X) = X \supset T_\lambda(X)$，并应用 T_λ 作用于 $T_\lambda^{n-1}(X) \supset T_\lambda^n(X)$ 得出 $T_\lambda^n(X) \supset T_\lambda^{n+1}(X)$. ▌

习　　题

1. 证明定理 8.3-1，假设对某个正整数 p，T^p 是紧线性算子.

2. 设 X, Y 和 Z 是赋范空间且命 $T_1: X \to Y$ 和 $T_2: Y \to Z$. 如果 T_1 和 T_2 都是紧线性算子，证明，$T_2 T_1: X \to Z$ 是紧线性算子.

3. 如果 T 是紧线性算子，证明，对任意给的数 $k > 0$，至多存在有限多个线性无关的相应于绝对值大于 k 的特征值的特征向量.

4. 设 $T_j: X_j \to X_{j+1}$，$j = 1, 2, 3$ 是赋范空间上的有界线性算子. 如果 T_2 是紧的，证明，$T = T_3 T_2 T_1: X_1 \to X_4$ 是紧的.

5. 在考察有界序列的基础上，给出引理 8.3-2 中 TS 的紧性的一个证明.

6. 设 H 是 Hilbert 空间，$T:H\to H$ 是有界线性算子，T^* 是 T 的 Hilbert 伴随算子。证明，T 是紧的当且仅当 T^*T 是紧的。

7. 在习题 6 中，如果 T 是紧的，证明 T^* 是紧的。

8. 如果在无限维赋范空间 X 上的紧线性算子 $T:X\to X$ 有定义于全空间 X 上的逆，证明，其逆不可能为有界的。

9. 利用 Riesz 引理 2.5-4(代替定理 2.5-5)证明定理 8.3-3。

10. 在 $p\in N$，T^p 是紧线性算子的这一较弱的假设下，证明定理 8.3-3(利用习题 9 中的证明)。

11. 用一个简单的例子证明，在定理 8.3-3 中 T 是紧的和 $\lambda\neq 0$ 的条件是不可以省略的。

12. 如果 X 是 Hilbert 空间，给定理 8.3-3 一个独立的证明。

13. 在 $p\in N$，T^p 是紧线性算子的这一较弱假设下，证明推论 8.3-4。

14. 设 $T:X\to X$ 是赋范空间上的紧线性算子，如果 $\dim X=\infty$，证明，$0\in\sigma(T)$。

15. 设 $T:l^2\to l^2$ 定义为 $y=(\eta_j)=Tx$，$x=(\xi_j)$，$\eta_{2k}=\xi_{2k}$ 和 $\eta_{2k-1}=0$，这里，$k=1,2,\cdots$ 求 $\mathcal{N}(T_\lambda^n)$。T 是否紧？

8.4 紧线性算子的进一步的谱性质

从前节已知，对赋范空间 X 上的紧线性算子 T 和 $\lambda\neq 0$，零空间 $\mathcal{N}(T_\lambda^n)$，$n=1,2,\cdots$，是有限维的且满足 $\mathcal{N}(T_\lambda^n)\subset\mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$；值域 $T_\lambda^n(X)$ 是闭的且满足 $T_\lambda^n(X)\supset T_\lambda^{n+1}(X)$。

进一步说，从某个 $n=r$ 起，这些零空间全是相等的（引理 8.4-1）；从某个 $n=q$ 起，这些值域也是相等的(引理 8.4-2)，并且 $q=r$(定理 8.4-3；这里，q 和 r 是具这些性质的最小整数)。让我们从下面的引理开始。

8.4-1 引理(零空间) 设 $T:X\to X$ 是赋范空间 X 上的紧线性算子，$\lambda\neq 0$，则存在一个最小的整数 r（依赖于 λ）使得从 $n=r$ 起，一切零空间 $\mathcal{N}(T_\lambda^n)$ 全是相等的；如果 $r>0$，则包含式

$$\mathcal{N}(T_\lambda^0)\subset\mathcal{N}(T_\lambda)\subset\cdots\subset\mathcal{N}(T_\lambda^r)$$

是真包含式。

证明．为了简便起见，命 $\mathcal{N}_n=\mathcal{N}(T_\lambda^n)$。证明的思路如下

(a) 设没有 m 使 $\mathcal{N}_m=\mathcal{N}_{m+1}$，则必导出一矛盾。一个本质的工具是 Riesz 引理 2.5-4。

(b) 证明 $\mathcal{N}_m=\mathcal{N}_{m+1}$ 蕴含 $\mathcal{N}_n=\mathcal{N}_{n+1}$，对一切 $n>m$。

详细证明如下。

(a) 由 8.3-4已知 $\mathcal{N}_m\subset\mathcal{N}_{m+1}$。假设没有 m 使 $\mathcal{N}_m=\mathcal{N}_{m+1}$，则对每个 n，$\mathcal{N}_n$ 是 $\mathcal{N}_{n+1}$ 的真子空间，因为这些零空间是闭的，于是 Riesz 引理 2.5-4 蕴含存在一序列 (y_n) 使其

(1) $\qquad y_n\in\mathcal{N}_n,\quad \|y_n\|=1,\quad \|y_n-x\|\geqslant\dfrac{1}{2},$

对于一切 $x\in\mathcal{N}_{n-1}$ 成立。

我们证明

(2) $\qquad \|Ty_n-Ty_m\|\geqslant\dfrac{1}{2}|\lambda|\qquad (m<n),$

于是，因为 $|\lambda|>0$，(Ty_n) 没有收敛的子序列。因为 (y_n) 是有界的，这就与 T 的紧性矛盾。

由 $T_\lambda=T-\lambda I$ 有 $T=T_\lambda+\lambda I$ 且

(3) $Ty_n-Ty_m=\lambda y-\tilde{x}$，这里，$\tilde{x}=T_\lambda y_m+\lambda y_m-T_\lambda y_n$。

命 $m<n$。我们证明 $\tilde{x}\in\mathcal{N}_{n-1}$。因为 $m\leqslant n-1$，显然有 $\lambda y_m\in\mathcal{N}_m\subset\mathcal{N}_{n-1}$。又 $y_m\in\mathcal{N}_m$ 蕴含

$$0=T_\lambda^m y_m=T_\lambda^{m-1}(T_\lambda y_m).$$

即是，$T_\lambda y_m\in\mathcal{N}_{m-1}\subset\mathcal{N}_{n-1}$。类似地，$y_n\in\mathcal{N}_n$ 蕴含 $T_\lambda y_n\in\mathcal{N}_{n-1}$。综合这些结果得，$\tilde{x}\in\mathcal{N}_{n-1}$。

又 $x=\lambda^{-1}\tilde{x}\in\mathcal{N}_{n-1}$，于是由(1)式

$$\|\lambda y_n-\tilde{x}\|=|\lambda|\,\|y_n-x\|\geqslant\frac{1}{2}|\lambda|.$$

由此式及(3)式，我们有(2)式。因此，设没有m使$\mathcal{N}_m=\mathcal{N}_{m+1}$是错误的，故对某个$m$，必有$\mathcal{N}_m=\mathcal{N}_{m+1}$，

(*b*) 我们证明$\mathcal{N}_m=\mathcal{N}_{m+1}$蕴含$\mathcal{N}_n=\mathcal{N}_{n+1}$，对一切$n>m$。设此式不成立，则对某个$n>m$，$\mathcal{N}_n$是$\mathcal{N}_{n+1}$的真子空间。考察$x\in\mathcal{N}_{n+1}-\mathcal{N}_n$，按定义

$$T_\lambda^{n+1}x=0,\ \text{但}\ T_\lambda^n x\neq 0.$$

因$n>m$，故$n-m>0$。设$z=T_\lambda^{n-m}x$，则

$$T_\lambda^{m+1}z=T_\lambda^{n+1}x=0,\ \text{但}\ T_\lambda^m z=T_\lambda^n x\neq 0.$$

因此，$z\in\mathcal{N}_{m+1}$，但$z\notin\mathcal{N}_m$，于是$\mathcal{N}_m$是$\mathcal{N}_{m+1}$的真子空间．这与$\mathcal{N}_m=\mathcal{N}_{m+1}$矛盾。第一个结论得证，这里，$r$是使$\mathcal{N}_n=\mathcal{N}_{n+1}$成立的最小$n$。因而，如果$r>0$，引理中的包含式是真包含。∎

刚才证明的引理是与算子$T_\lambda, T_\lambda^2, \cdots$的零空间相关的，这里，$T$是紧线性算子，$\lambda\neq 0$。现证明对这些算子的值域的类似结论也是真的。

8.4-2 引理(值域) 在引理8.4-1的假设下，存在一个最小的整数q（依赖于λ）使其从$n=q$起，值域$T_\lambda^n(X)$全是相等的；如果$q>0$，包含式

$$T_\lambda^0(X)\supset T_\lambda(X)\supset\cdots\supset T_\lambda^q(X)$$

是真包含的。

证明．证明仍然是间接的，且和前一引理是平行的。简单地表$\mathcal{R}_n=T_\lambda^n(X)$，设没有$s$使$\mathcal{R}_s=\mathcal{R}_{s+1}$，则$\mathcal{R}_{n+1}$是$\mathcal{R}_n$的真子空间，对每个$n$(见8.3-6)。因为，由8.3-6这些值域是闭的，于是，Riesz引理蕴含存在一序列(x_n)使其

$$(4)\qquad x_n\in\mathcal{R}_n,\quad \|x_n\|=1,\quad \|x_n-x\|\geqslant\frac{1}{2},$$

对一切 $x\in\mathscr{R}_{n+1}$.

设 $m<n$，因为 $T=T_\lambda+\lambda I$，可以表

(5) $$Tx_m-Tx_n=\lambda x_m-(-T_\lambda x_m+T_\lambda x_n+\lambda x_n).$$

在右端，$\lambda x_m\in\mathscr{R}_m$，$x_m\in\mathscr{R}_m$，于是 $T_\lambda x_m\in\mathscr{R}_{m+1}$ 且因 $n>m$，故 $T_\lambda x_n+\lambda x_n\in\mathscr{R}_n\subset\mathscr{R}_{n+1}$。因此，(5)式有如下的形式

$$Tx_m-Tx_n=\lambda(x_m-x),\quad x\in\mathscr{R}_{m+1}.$$

因而，由(4)式

(6) $$\|Tx_m-Tx_n\|=|\lambda|\,\|x_m-x\|\geqslant\frac{1}{2}|\lambda|>0.$$

(x_n)是有界的，T 是紧的，因此，(Tx_n)有收敛的子序列。这与(6)式矛盾，于是证明了，对某 s，必有 $\mathscr{R}_s=\mathscr{R}_{s+1}$。命 q 是使 $\mathscr{R}_s=\mathscr{R}_{s+1}$ 成立的最小 s，那末，如果 $q>0$，引理中的包含式是真包含。

而且，$\mathscr{R}_{q+1}=\mathscr{R}_q$ 意味着 T_λ 映 $\mathscr{R}_q$ 到自身上，因此，反复应用 T_λ 得出 $\mathscr{R}_{n+1}=\mathscr{R}_n$，对每个 $n>q$。▌

综合引理 8.4-1 和 8.4-2，我们得一重要定理。

8.4-3 定理(零空间和值域) 设 $T:X\to X$ 是赋范空间 X 上的紧线性算子，$\lambda\neq0$，则存在最小整数 $n=r$（依赖于 λ）使其

(7) $$\mathscr{N}(T_\lambda^r)=\mathscr{N}(T_\lambda^{r+1})=\mathscr{N}(T_\lambda^{r+2})=\cdots$$

和

(8) $$T_\lambda^r(X)=T_\lambda^{r+1}(X)=T_\lambda^{r+2}(X)=\cdots;$$

如果 $r>0$，下面包含式是真包含式

(9) $$\mathscr{N}(T_\lambda^0)\subset\mathscr{N}(T_\lambda^1)\subset\cdots\subset\mathscr{N}(T_\lambda^r),$$

和

(10) $$T_\lambda^0(X)\supset T_\lambda^1(x)\supset\cdots\supset T_\lambda^r(X).$$

证明. 由引理8.4-1得(7)和(9)；由引理8.4-2得(8)和(10)，在那里以q代替r. 余下只需证明的是$q=r$. 在证明的(a)部分中，我们证$q\geqslant r$；在(b)部分中，我们证$q\leqslant r$. 如同前面一样，简记$\mathcal{N}_n=\mathcal{N}(T_\lambda^n)$，$\mathcal{R}_n=T_\lambda^n(X)$.

(a) 由引理8.4-2，我们有$\mathcal{R}_{q+1}=\mathcal{R}_q$. 这意味着$T_\lambda(\mathcal{R}_q)=\mathcal{R}_q$. 因此，

(11) $y\in\mathcal{R}_q \Longrightarrow y=T_\lambda x$，对某个$x\in\mathcal{R}_q$.

我们证明

(12) $T_\lambda x=0$，$x\in\mathcal{R}_q \Longrightarrow x=0$.

设(12)式不成立. 则对某个非零的$x_1\in\mathcal{R}_q$有$T_\lambda x_1=0$. 现在(11)式中取$y=x_1$即得$x_1=T_\lambda x_2$，对某个$x_2\in\mathcal{R}_q$. 类似地，对某个$x_3\in\mathcal{R}_q$，有$x_2=T_\lambda x_3$，等等. 对每个n，用这种取代的方法，于是得

$$0\neq x_1=T_\lambda x_2=\cdots=T_\lambda^{n-1}x_n,\quad 但\ 0=T_\lambda x_1=T_\lambda^n x_n.$$

因此，$x_n\notin\mathcal{N}_{n-1}$但$x_n\in\mathcal{N}_n$. 由于8.4-1有$\mathcal{N}_{n-1}\subset\mathcal{N}_n$. 我们的这一结果证明，包含式对每个$n$（因$n$是任意的）是真包含式，这与8.4-1矛盾，(12)式得证.

当其注意到，由8.4-2有$\mathcal{R}_{q+1}=\mathcal{R}_q$，我们现在证明$\mathcal{N}_{q+1}=\mathcal{N}_q$. 于是由8.4-1，因为$r$是使等式成立的最小整数，这就蕴含了$q\geqslant r$.

由8.3-4，我们有$\mathcal{N}_{q+1}\supset\mathcal{N}_q$. 我们只需证明$\mathcal{N}_{q+1}\subset\mathcal{N}_q$，即是，$T_\lambda^{q+1}x=0$蕴含$T_\lambda^q x=0$. 设此结论不真. 对某个$x_0$

$$y=T_\lambda^q x\neq 0,\quad 但\quad T_\lambda y=T_\lambda^{q+1}x_0=0$$

因此，$y\in\mathcal{R}_q$，$y\neq 0$且$T_\lambda y=0$. 但这与(12)式矛盾，(在那里，取$x=y$.)于是证明了$\mathcal{N}_{q+1}\subset\mathcal{N}_q$，因此，$\mathcal{N}_{q+1}=\mathcal{N}_q$，且有$q\geqslant r$.

(b) 我们证明$q\leqslant r$. 如果$q=0$，此式当然真. 设$q\geqslant 1$，用证明$\mathcal{N}_{q-1}$是$\mathcal{N}_q$的真子空间的方法，证明$q\leqslant r$. 因r是使

$\mathcal{N}_n=\mathcal{N}_{n+1}$ 成立的最小的数 n，见 8.4-1。这一点蕴含 $q\leqslant r$。

按 8.4-2 中 q 的定义，包含式 $\mathcal{R}_q\subset\mathcal{R}_{q-1}$ 是真包含。命 $y\in\mathcal{R}_{q-1}-\mathcal{R}_q$，则 $y\in\mathcal{R}_{q-1}$。于是，对某个 x，有 $y=T_\lambda^{q-1}x$。又 $T_\lambda y\in\mathcal{R}_q=\mathcal{R}_{q+1}$ 蕴含 $T_\lambda y=T_\lambda^{q+1}z$，对某个 z。因为 $T_\lambda^q z\in\mathcal{R}_q$ 但 $y\notin\mathcal{R}_q$，我们有

$$T_\lambda^{q-1}(x-T_\lambda z)=y-T_\lambda^q z\neq 0.$$

因此，$x-T_\lambda z\notin\mathcal{N}_{q-1}$。但 $x-T_\lambda z\in\mathcal{N}_q$，因为

$$T_\lambda^q(x-T_\lambda z)=T_\lambda y-T_\lambda y=0.$$

这就证明了 $\mathcal{N}_{q-1}\neq\mathcal{N}_q$。于是，$\mathcal{N}_{q-1}$ 是 $\mathcal{N}_q$ 的真子空间。因此，$q\leqslant r$。因在(a)部分已证明了 $q\geqslant r$，故 $q=r$。■

下面的 Banach 空间上紧线性算子谱的重要特征几乎是本定理的直接结果（在 8.6-4 中，我们将看到，如果空间不是完备的，结论仍然成立）.

8.4-4 定理(特征值) 设 $T:X\to X$ 是 Banach空间X 上的紧线性算子，则 T 的每一个谱值 $\lambda\neq 0$(如果存在的话[①])都是T的特征值.(这一结论甚至对一般赋范空间也成立,证明在8.6-4中.)

证明. 如果 $\mathcal{N}(T_\lambda)\neq\{0\}$，则 λ 是 T 的特征值。设 $\mathcal{N}(T_\lambda)=\{0\}$，这里，$\lambda\neq 0$。则 $T_\lambda x=0$ 蕴含 $x=0$，且由 2.6-10，T_λ^{-1}：$T_\lambda(X)\to X$ 存在。因为

$$\{0\}=\mathcal{N}(I)=\mathcal{N}(T_\lambda^0)=\mathcal{N}(T_\lambda)$$

由 8.4-3，有 $r=0$。因此,$X=T_\lambda^0(X)=T_\lambda(X)$,仍然根据8.4-3。于是得出，$T_\lambda$ 是双射。因为 X是完备的,故按有界逆定理4.12-2，T_λ^{-1}是有界的，于是按定义 $\lambda\in\rho(T)$。

① 习题 5 证明，T 可以没有特征值．复 Hilbert 空间 $H\neq\{0\}$上的自伴紧线性算子 T，通常至少有一个特征值，我们将在 9.2 节中看到.

值 $\lambda=0$ 在本章中许多定理里予以排除，于是自然地要问，在复赋范空间 X 上的紧线性算子 $T:X\to X$ 的情况下，关于 $\lambda=0$ 能有些什么样的情况发生呢？如果 X 是有限维的，则 T 可以用矩阵来表示出。显然，0 可以属也可以不属于 $\sigma(T)=\sigma_p(T)$；即是，如果 $\dim X<\infty$，我们可能有 $0\notin\sigma(T)$，即可能 $0\in\rho(T)$。但是，如果 $\dim X=\infty$，则必有 $0\in\sigma(T)$，见前一节的习题 14。并且所有三种情况

$$0\in\sigma_p(T),\ 0\in\sigma_c(T),\ 0\in\sigma_r(T)$$

都可能发生，这正如本节习题 4 和 5 及 9.2 节习题 7 所述。∎

作为定理 8.4-3 的另外的有趣而重要的应用是表 X 为两个闭子空间的直接和（3.3节），即，表为 T_λ^r 的零空间和值域的直接和。

8.4-5 定理（直接和） 设 X，T，λ 和 r 与定理 8.4-3 中的相同，则 X 可以表示为①

$$X=\mathcal{N}(T_\lambda^r)\oplus T_\lambda^r(X) \tag{13}$$

证明．考察任意 $x\in X$，我们必须证明 x 有唯一的表达式

$$x=y+z\quad(y\in\mathcal{N}_r,\ z\in\mathcal{R}_r),$$

这里，如同前面一样，$\mathcal{N}_n=\mathcal{N}(T_\lambda^n)$，$\mathcal{R}_n=T_\lambda^n(X)$。命 $z=T_\lambda^r x$，则 $z\in\mathcal{R}_r$。由定理 8.4-3，现有 $\mathcal{R}_r=\mathcal{R}_{2r}$。因此，$z\in\mathcal{R}_{2r}$，于是，$z=T_\lambda^{2r}x_1$，对某个 $x_1\in X$。命 $x_0=T_\lambda^r x_1$。则 $x_0\in\mathcal{R}_r$ 且

$$T_\lambda^r x_0=T_\lambda^{2r}x_1=z=T_\lambda^r x.$$

这就证明了 $T_\lambda^r(x-x_0)=0$。因此，$x-x_0\in\mathcal{N}_r$ 且

① 如果 X 是向量空间，则对任意子空间 $Y\subset X$ 存在子空间 $Z\subset X$ 使 $X=Y\oplus Z$；见 3.3 节．如果 X 是赋范空间（甚至 Banach 空间）及 $Y\subset X$ 是闭子空间，可以不存在闭子空间 $Z\subset X$ 使其 $X=Y\oplus Z$（例如，见附录 3 F. J. Murray(1937) 和 A. Sobczyk(1941)）．如果 X 是 Hilbert 空间，则对每一个闭子空间 Y 恒有 $X=Y\oplus Z$，这里，$Z=Y^\perp$ 是闭的（见 3.3-3 和 3.3-4）．注意，(13)式中的子空间都是闭的．

(14) $x=(x-x_0)+x_0 \qquad (x-x_0\in\mathcal{N}_r,\ x_0\in\mathcal{R}_r)$。

倘若(14)式是唯一的，则(13)式得证.

我们证明唯一性。如果，除了(14)式之外，又有

$$x=(x-\tilde{x}_0)+\tilde{x}_0 \quad (x-\tilde{x}_0\in\mathcal{N}_r,\ \tilde{x}_0\in\mathcal{R}_r)$$

命 $v_0=x_0-\tilde{x}_0$，因 $\mathcal{R}_r$ 是向量空间，故 $v_0\in\mathcal{R}_r$。因此，对某个 $v\in X$，$v_0=T_\lambda^r v$。又因

$$v_0=x_0-\tilde{x}_0=(x-\tilde{x}_0)-(x-x_0),$$

故，$v_0\in\mathcal{N}_r$ 且 $T_\lambda^r v_0=0$，连同

$$T_\lambda^{2r}v=T_\lambda^r v_0=0$$

和 $v\in\mathcal{N}_{2r}=\mathcal{N}_r$(见8.4-3)，这就蕴含

$$v_0=T_\lambda^r v=0,$$

即是，$v_0=x_0-\tilde{x}_0=0$，$x_0=\tilde{x}_0$。表达式(14)式是唯一的且 $\mathcal{N}_r+\mathcal{R}_r$ 是直接和。∎

习　题

1. 在 $p\in N$，T^p 是紧的这一较弱假设下，证明引理8.4-1。

2. 在引理8.4-1的证明中，已证明 $\mathcal{N}_m=\mathcal{N}_{m+1}$ 蕴含 $\mathcal{N}_n=\mathcal{N}_{n+1}$，对一切 $n>m$。其证明是间接的，试给出一个直接的证明。

3. 为了得到一般赋范空间的定理8.4-4，我们可能试图用8.2-4中关于 $\tilde{T}$ 所介绍的证明，然后做出关于 T 的结论。困难在什么地方？

4. 证明，用

$$Tx=\left(\frac{\xi_2}{1},\ \frac{\xi_3}{2},\ \frac{\xi_4}{3},\ \cdots\right)$$

定义的 $T: l^2\to l^2$ 是紧的并且 $\sigma_p(T)=\{0\}$；这里，$x=(\xi_1,\ \xi_2,\cdots)$。

5. 在定理8.4-4中，我们必须用"如果它存在"的语句，因为，紧线性算子可以没有特征值。证明，用

$$Tx=\left(0,\frac{\xi_1}{1},\ \frac{\xi_2}{2},\ \frac{\xi_3}{3},\ \cdots\right)$$

定义的 $T:l^2 \to l^2$ 是这种类型的算子，这里，$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$。证明，$\sigma(T)=\sigma_r(T)=\{0\}$(注意，习题 4 证明，0 可以属于点谱，0 也可以属于连续谱，这将在 9.2 节中看到)。

6. 求由

$$T_n x=\left(0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \cdots, \frac{\xi_{n-1}}{n-1}\right)$$

定义的 $T_n: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 的特征值，这里，$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$。同习题 5 比较并说明，当 $n \to \infty$ 时，会发生什么情况？

7. 设 $T:l^2 \to l^2$ 定义为 $y=Tx$，$x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$，$\eta_j=\alpha_j \xi_j$，这里，(α_j) 在 $[0, 1]$ 上稠密。证明，T 非紧。

8. 设 $T:l^2 \to l^2$ 定义为

$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots) \mapsto Tx=(\xi_2, \xi_3, \cdots)$，命 $m=m_0$ 和 $n=n_0$ 是使 $\mathscr{N}(T^m)=\mathscr{N}(T^{m+1})$ 和 $T^{n+1}(X)=T^n(X)$ 的最小数。求 $\mathscr{N}(T^m)$。是否存在有限的 m_0？求 n_0

9. 设 $T:C[0,1] \to C[0,1]$ 定义为 $Tx=vx$，这里，$v(t)=t$。证明 T 非紧。

10. 在由矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

表示出来的线性算子 $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 的情况下，导出表达式(13)式。

8.5 含紧线性算子的算子方程

I. Fredholm (1903) 研究了线性积分方程，他的著名的工作提出了某种含紧线性算子的方程的可解性理论。我们将给读者介绍的理论主要是由 F. Riesz (1918) 发展起来的，并由 J. Schauder (1930) 作出了重要贡献的理论。

我们将考察在赋范空间 X 上的紧线性算子 $T:X \to X$，以及在 4.5-1 中定义的伴随算子 $T^{\times}:X' \to X'$。

方程

(1) $Tx-\lambda x=y$ ($y \in X$ 是给定的，$\lambda \neq 0$)

相应的齐次方程

（2） $Tx-\lambda I=0$ （$\lambda\neq 0$）

和两个含伴随算子的类似的方程，即，

（3） $T^{\times}f-\lambda f=g$ （$g\in X'$ 是给定的，$\lambda\neq 0$）

相应的齐次方程

（4） $T^{\times}f-\lambda f=0$ （$\lambda\neq 0$），

这里，$\lambda\in C$是任意固定的，且非零的，我们分别研究解 x 和 f 的存在性.

为什么要同时考察这四个方程呢？答案可以从所得的结论的摘要中看出。这些结论证明了这些方程可解性的相互关系。

（括号中的数字代表要考察的相应的定理。）

摘要 设$T:X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子，$T^{\times}:X'\to X'$是T的伴随算子．设$\lambda\neq 0$，则

(1) 式是正规可解的，即是 (1) 式有解 x 的充分必要条件是对 (4) 式的一切解 f 有 $f(y)=0$。因此，如果 $f=0$ 是 (4) 式的仅有的解，则对每一个 y，方程(1)式都可解（见 8.5-1.）

(3)式有解 f 的充分必要条件是：对(2)式的一切解 x 有$g(x)=0$。因此，如果 $x=0$ 是(2)式的仅有的解，则对每一个 g，方程(3)式都是可解的（见8.5-3.）

(1) 式对每个 $y\in X$ 有解 x 充分必要条件 $x=0$ 是 (2) 式的仅有的解（见8.6-1a.）

(3) 式对每个 $g\in X'$ 有解 f 充分必要条件是 $f=0$ 是(4)式的仅有的解（见8.6-1b.）

(2)式和(4)式的线性无关解的数目相同（见8.1-3.）

$T\lambda$ 满足 Fredholm 的择一律（见8.7-2.）

第一个定理给出关于 (1) 式可解性的必要充分条件：

8.5-1 定理（(1) 式的解） 设 $T: X \to X$ 是赋范空间 X 上的紧线性算子，$\lambda \neq 0$，则 (1) 式有解 x 的充分必要条件是 y 使得对一切满足(4)式的 $f \in X'$ 有

(5)　$f(y)=0$.

因此，如果 (4) 式仅有平凡解$f=0$，则 (1) 式对任意给定的 $y \in X$可解.

证明. (*a*) 设(1)式有解 $x=x_0$，即是

$$y=Tx_0-\lambda x_0=T_\lambda x_0$$

命 f 是(4)式的任意一解，则首先有

$$f(y)=f(Tx_0-\lambda x_0)=f(Tx_0)-\lambda f(x_0).$$

按伴随算子的定义（见 4.5-1，那里，g 起这里 f 的作用）现有 $f(Tx_0)=(T^\times f)(x_0)$. 因此，由(4)式

$$f(y)=(T^\times f)(x_0)-\lambda f(x_0)=0.$$

(*b*)　反之，设(1)式中的 y 满足(5)式，对(4)式的每个解成立。那末，我们证明(1)式有解.

设 (1) 式无解。则没有 x 使 $y=T_\lambda x$。因此，$y \notin T_\lambda(X)$. 由 8.3-5，因 $T_\lambda(X)$ 是闭的，y 到 $T_\lambda(X)$ 的距离是正的。由引理 4.6-7，存在 $\tilde{f} \in X'$ 使$\tilde{f}(y)=\delta$ 且 $\tilde{f}(z)=0$，对每个 $z \in T_\lambda(X)$. 因 $z \in T_\lambda(X)$，则对某个 $x \in X$，有$z=T_\lambda x$，于是，$\tilde{f}(z)=0$，成为

$$\begin{aligned}\tilde{f}(T_\lambda x)&=\tilde{f}(Tx)-\lambda\tilde{f}(x)\\&=(T^\times\tilde{f})(x)-\lambda\tilde{f}(x)=0.\end{aligned}$$

因为 $z \in T_\lambda(X)$ 是任意的，此式对每个 $x \in X$ 成立。因此，是 (4) 式的解。按假设，它满足 (5) 式，即是 $\tilde{f}(y)=0$. 但这同 $\tilde{f}(y)=\delta>0$ 矛盾。因而，(1) 式必有解。这就证明了定理的第一个结论，而此结论又直接蕴含第二个结论。∎

本定理刻划的情况提出了下面的概念。命

(6) $Ax=y$ (y是给定的),

这里，$A:X\to X$ 是赋范空间X上的有界线性算子。设(6)式有解 $x\in X$ 的充分必要条件是：y 满足 $f(y)=0$，对方程

(7) $A^\times f=0$

的每一个解 f 成立，这里，$A^\times$ 是A的伴随算子。那末，(6)式叫做**正规可解的**。

定理 8.5-1 证明，具有紧算子T，$\lambda\neq 0$ 的(1)式是正规可解的。

对方程(3)，有与定理8.5-1相类似的定理，这从下面的引理即可得到。引理中的正实数 c 依赖于所给定的 λ。应注意，(8)式对某一解——叫做极小范数解——成立，但不必对一切解成立。因此，引理不蕴含 $R_\lambda=T_\lambda^{-1}$ 的存在性(2.7节习题7)。

8.5-2 引理（关于(1)式某种解的界） 设$T:X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子，$\lambda\neq 0$ 是已给的，则存在一个与(1)式中的y无关的正实数$c>0$，使其对每个使(1)式有解的y，在这些解中至少有一个，比如 $x=\tilde{x}$，满足

(8) $\|\tilde{x}\|\leqslant c\|y\|$,

这里，$y=T_\lambda\tilde{x}$。

证明。证明分为两步。

(*a*) 首先我们证明，如果(1)式对给定的y有解，则在这些解的集中包含一极小范数解，此解记为$x=\tilde{x}$。

(*b*) 其次我们证明，存在$c>0$使(8)式成立。其中$\tilde{x}$是相应于使(1)式有解的任一$y=T_\lambda\tilde{x}$的极小范数解。

详细证明如下。

(*a*) 设x_0是(1)式的一解。如果x是(1)式的任一另外的解，差$z=x-x_0$满足(2)式。因此，(1)式的每一解可以表为

$x=x_0+z$，这里，$z\in\mathcal{N}(T_\lambda)$。

反之，对每个 $z\in\mathcal{N}(T_\lambda)$，和 x_0+z 是(1)式的一个解。对一固定的 x_0，x 的范数依赖于 z。让我们表

$$p(z)=\|x_0+z\| \text{ 和 } k=\inf_{z\in\mathcal{N}(T_\lambda)} p(z).$$

按 inf 的定义，$\mathcal{N}(T_\lambda)$ 含有一序列 (z_n) 使

$$(9)\qquad p(z_n)=\|x_0+z_n\|\to k \qquad (n\to\infty).$$

因为，$(p(z_n))$ 收敛，故有界。(z_n) 也是有界的，因为

$$\|z_n\|=\|(x_0+z_n-x_0\|\leqslant\|x_0+z_n\|+\|x_0\|$$
$$=p(z_n)+\|x_0\|.$$

因为 T 是紧的，故(Tz_n) 有收敛的子序列。但 $z_n\in\mathcal{N}(T_\lambda)$ 意味着$T_\lambda z_n=0$，即是，$Tz_n=\lambda z_n$，这里 $\lambda\neq0$。因此，(z_n) 有收敛的子序列，比如说，

$$z_{n_j}\to z_0.$$

由 2.7-10，$\mathcal{N}(T_\lambda)$ 是闭的，这里，$z_0\in\mathcal{N}(T_\lambda)$。又因 p 是连续的

$$p(z_{n_j})\to p(z_0).$$

于是，由 (9) 式得

$$p(z_0)=\|x_0+z_0\|=k.$$

这就证明了，如果 (1) 式对给定的 y 有解，这些解之集包含一个极小范数解 $\tilde{x}=x_0+z_0$.

(*b*) 我们证明，存在一个 $c>0$（不依赖于 y）使 (8) 式成立，$\tilde{x}$ 是相应于使 (1) 式可解的任一 $y=T_\lambda\tilde{x}$ 的极小范数解.

假设我们结论不成立。则存在一序列 (y_n) 使其

$$(10)\qquad \frac{\|\tilde{x}\|}{\|y_n\|}\to\infty \quad (n\to\infty),$$

这里，$\tilde{x}_n$ 是极小范数解，且满足 $y_n=T_\lambda\tilde{x}_n$。用 α 乘之得知，与 αy_n 相应的 $\alpha\tilde{x}_n$ 是极小范数解。因此，我们可以设 $\|\tilde{x}_n\|=1$ 而不失一般性。那末，(10)式蕴含 $\|y_n\|\to0$。因为 T 是紧的，$(\tilde{x}_n)$ 是

有界的，则 $(T\tilde{x}_n)$ 有收敛的子序列，比如说，$T\tilde{x}_{n_j}\to v_0$，或者为了方便起见，记为 $v_0=\lambda\tilde{x}_0$

$$(11)\quad T\tilde{x}_{n_j}\to\lambda\tilde{x}_0\qquad(j\to\infty).$$

因为，$y_n=T_\lambda\tilde{x}_n=T\tilde{x}_n-\lambda\tilde{x}_n$，我们有 $\lambda\tilde{x}_n=T\tilde{x}_n-y_n$。利用(11)式和 $\|y_n\|\to 0$，注意 $\lambda\neq 0$，于是得

$$(12)\quad \tilde{x}_{n_j}=\frac{1}{\lambda}(T\tilde{x}_{n_j}-y_{n_j})\to\tilde{x}_0.$$

由此，因T是连续的，我们有

$$T\tilde{x}_{n_j}\to T\tilde{x}_0.$$

因此，由(11)式，$T\tilde{x}_0=\lambda\tilde{x}$。因为$T_\lambda\tilde{x}_n=y_n$，我们看出，$x=\tilde{x}_n-\tilde{x}_0$ 满足 $T_\lambda x=y_n$。因 $\tilde{x}_n$ 是极小范数的解，故

$$\|x\|=\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_0\|\geqslant\|\tilde{x}_n\|=1.$$

但这与(12)式中的收敛矛盾。因此，(10)不可能成立，而(10)式中之商必有界，即是，必有

$$c=\sup_{y\in T_\lambda(X)}\frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|}<\infty,$$

这里，$y=T_\lambda\tilde{x}$。此式蕴含(8)式。∎

利用这一引理，可以类似于在定理8.5-1中对(1)式给出的可解性特征那样，给出(3)式的可解性特征。

8.5-3 定理 ((3)式的解) 设$T:X\to X$是赋范空间 X 上的紧线性算子，$\lambda\neq 0$，则(3)式有解 f 的充分必要条件是 g 使得对一切满足(2)式的 $x\in X$ 有

$$(13)\quad g(x)=0.$$

因此，如果(2)式仅有平凡解 $x=0$，则(3)式对任意给的 $g\in X'$ 可解。

证明。(a)如果(3)式有解 f 且 x 满足(2)式，则(13)式成立，

因为

$$g(x)=(T^{\times}f)(x)-\lambda f(x)=f(Tx-\lambda x)=f(0)=0.$$

(*b*) 反之，设(2)式的每一解 x, g 满足(13)式．则我们证明，(3)式有解 f．考察任意 $x\in X$，且命 $y=T_\lambda x$，则 $y\in T_\lambda(X)$．在 $T_\lambda(X)$ 上定义泛函 f_0为

$$f_0(y)=f_0(T_\lambda x)=g(x).$$

这一定义是确定的，因为，如果$T_\lambda x_1=T_\lambda x_2$，则 $T_\lambda(x_1-x_2)=0$．于是，x_1-x_2 是 (2) 式的解．因此，按假定，$g(x_1-x_2)=0$，即 $g(x_1)=g(x_2)$．

因为 T_λ 和 g 都是线性的，故 f_0 是线性的．我们证明 f_0 是有界的．引理 8.5-2 蕴含对每个 $y\in T_\lambda(X)$，至少有一个相应的 x 满足

$$\|x\|\leqslant c\|y\| \qquad (y=T_\lambda x),$$

这里，c 不依赖于 y．f_0 的有界性现可以从

$$|f_0(y)|=|g(x)|\leqslant\|g\|\|x\|\leqslant c\|g\|\cdot\|y\|\leqslant\tilde{c}\|y\|.$$

得出，这里，$\tilde{c}=c\|g\|$．按 Hahn-Banach 定理 4.3-2，泛函f_0在X上有一延拓f，它是定义在全空间X上的有界线性泛函．按f_0的定义

$$f(Tx-\lambda x)=f(T_\lambda x)=f_0(T_\lambda x)=g(x).$$

在左端，按伴随算子的定义，对一切 $x\in X$ 有

$$f(Tx-\lambda x)=f(Tx)-\lambda f(x)=(T^{\times}f)(x)-\lambda f(x).$$

综合前面的公式，这就证明了 f 是 (3) 式的一解，定理的第一个结论得证．第二个结论很容易从第一个结论得出．∎

下面一节是本节的直接的继续．

关于这两节的习题一并放在下一节的末尾．

8.6 进一步的Fredholm型定理

本节介绍算子方程

(1) $Tx-\lambda x=y$ (y是给定的)

(2) $Tx-\lambda x=0$

(3) $T^{\times}f-\lambda f=g$ (g是给定的)

(4) $T^{\times}f-\lambda f=0$

的可解性的进一步的结果。假设条件同前节中的完全一样，换言之，$T:X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子，算子$T^{\times}$是T的伴随算子，$\lambda\neq 0$是固定的。

上一节和本节中的理论推广了以前曾提到过的Fredholm的著名的积分方程理论。

上一节的主要结果是用(4)式刻划(1)式的可解性（定理8.5-1)，利用(2)式刻划(3)式的可解性（定理8.5-3)。自然期望得到(1)式和(2)式，(3)式和(4)之间的类似关系。

8.6-1 定理((1)式的解) 设$T:X\to X$是赋范空间X上的紧线算子，$\lambda\neq 0$，则

(a) 方程(1)式对每个$y\in X$有解充分必要条件是齐次方程(2)只有平凡解$x=0$。此时，(1)式的解是唯一的且T_λ有有界逆。

(b) 方程(3)对每个$g\in X'$有解的充分必要的条件是(4)式只有平凡解$f=0$。此时，(3)式的解是唯一的。

证明。(a)我们证明，如果对每个$y\in X$，方程(1)是可解的，则$x=0$是(2)式的仅有的解。

否则，(2)式有解$x_1\neq 0$。因为，(1)式对任意y是可解的，$T_\lambda x=x_1$有解$x=x_2$，即是，$T_\lambda x_2=x_1$。同样理由，存在一个x_3使

$T_\lambda x_3 = x_2$，等等。按这种取代的方法，于是，对每个 $k=2,3,\cdots$

$$0 \neq x_1 = T_\lambda x_2 = T_\lambda^2 x_3 = \cdots = T_\lambda^{k-1} x_k$$

且

$$0 = T_\lambda x_1 = T_\lambda^k x_k.$$

因此，$x_k \in \mathcal{N}(T_\lambda^k)$，但$x_k \notin \mathcal{N}(T_\lambda^{k-1})$。这意味着，对一切 k，零空间 $\mathcal{N}(T_\lambda^{k-1})$ 是 $\mathcal{N}(T_\lambda^k)$ 的真子空间，但这同定理 8.4-3 矛盾。因此，$x=0$ 必是(2)式仅有的解。

反之，设 $x=0$ 是(2)式仅有的解，则根据定理8.5-3，(3)式对任何 g 是可解的。现因 $T^\times$ 是紧的（见 8.2-5），于是，本证明的第一部分可以应用到 $T^\times$ 上，并断定 $f=0$ 必是 (4) 式的仅有的解。于是对任意 y，(1) 式的可解性从定理 8.5-1 得出。

唯一性可从(1)式的二解之差是(2)式的解这一事实得出来。显然，这种唯一的解 $x=T_\lambda^{-1}y$ 是极小范数解，因而T_λ^{-1} 的有界性从引理 8.5-2 得出，即

$$\|x\| = \|T_\lambda^{-1}y\| \leqq c\|y\|.$$

(b) (b)是(a)的结果，因为，$T^\times$ 是紧的（见 8.2-5）。∎

齐次方程(2)和(4)式也是有联系的，我们将看到，它们有相同数目的线性无关的解。对这一结果的证明，还需要 X 和 X' 中的，由 (5) 式相联系的那种集的存在性，现介绍如下，常称它们为双正交组。

8.6-2 引理(双正交组) 在赋范空间 X 的共轭空间 X' 中，给定的一线性无关集 $\{f_1,\cdots,f_m\}$，则存在X中的元 $z_1,\cdots,z_m$ 使

$$(5)\qquad f_j(z_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j=k) \end{cases} \qquad (j,k=1,\cdots,m)$$

证明。因与如何安排诸 f_j 的次序毫无关系，故我们只需依次证明，存在 z_m 使

$$(6)\qquad f_m(z_m)=1,\quad f_j(z_m)=0 \quad (j=1,\cdots,m-1)$$ 就可以了。

当 $m=1$ 时，因由线性无关性知 $f_1\neq 0$。于是，对某个 x_0，$f_1(x_0)\neq 0$，且命 $z_1=\alpha x_0$，$\alpha=1/f_1(x_0)$，则 $f_1(z_1)=1$。故 $m=1$ 时成立。

现命 $m>1$，按归纳法假设，引理对 $m-1$ 成立，即是，X 含有元 $z_1,\cdots,z_{m-1}$ 使

(7) $f_k(z_k)=1$，$f_n(z_k)=0$，$n\neq k$ $(k,\ n=1,\ \cdots,\ m-1)$。

考察集

$$M=\{x\in X\,|\,f_1(x)=0,\ \cdots,\ f_{m-1}(x)=0\},$$

并证明 M 含有 $\tilde{z}_m$ 使 $f_m(\tilde{z}_m)=\beta\neq 0$，命 $z_m=\beta^{-1}\tilde{z}_m$，显然得出(6)式。

否则，对一切 $x\in M$ 有 $f_m(x)=0$，现取任意 $x\in X$，设

(8) $$\tilde{x}=x-\sum_{j=1}^{m-1}f_j(x)z_j,$$

则由 (7) 式，对 $k\leqslant m-1$，

$$f_k(\tilde{x})=f_k(x)-\sum_{j=1}^{m-1}f_j(x)f_k(z_j)=f_k(x)-f_k(x)=0.$$

这就证明了 $\tilde{x}\in M$，于是由假设 $f_m(\tilde{x})=0$。由(8)式，

$$\begin{aligned}f_m(x)&=f_m(\tilde{x}+\Sigma f_j(x)z_j)\\&=f_m(\tilde{x})+\Sigma f_j(x)f_m(z_j)\\&=\Sigma\alpha_j f_j(x)\qquad[\alpha_j=f_m(z_j)]\end{aligned}$$

(从 1 到 $m-1$ 求和)。因为，$x\in X$ 是任意的，这表示 f_m 是 $f_1,\cdots,f_{m-1}$ 的线性组合，因而，同 $\{f_1,\cdots,f_m\}$ 线性无关性矛盾。因此，$f_m(x)=0$ 对一切 $x\in M$ 是不可能的，于是，M 必含有 z_m 使(6)式成立，引理得证。▌

利用这一引理，我们现在可以证明 $\dim\mathcal{N}(T_\lambda)=\dim\mathcal{N}(T_\lambda^\times)$，

这里，$T_\lambda^\times=(T-\lambda I)^\times=T^\times-\lambda I$. 用研究算子方程的语言来说，这些维数等式意味着下面的结论。

8.6-3 定理(T_λ和$T_\lambda^\times$的零空间) 设$T:X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子，$\lambda\neq0$，则方程(2)和(4)有相同数目的线性无关解。

证明. T和$T^\times$是紧的（见8.2-5），由8.3-3于是$\mathcal{N}(T_\lambda)$和$\mathcal{N}(T_\lambda^\times)$是有限维的，比如说，

$$\dim\mathcal{N}(T_\lambda)=n,\quad \dim\mathcal{N}(T_\lambda^\times)=m.$$

我们把证明分为(a)，(b)，(c)三个部分

(a) $m=n=0$的情况和关于$m>0$，$n>0$的一个预备性结果。

(b) 证明$n<m$不可能。

(c) 证明$n>m$不可能。

详细证明如下。

(a) 如果$n=0$，(2)式只有一解$x=0$，则对任意g，(3)式是可解的，见8.5-3. 由8.6-1(b)，这蕴含$f=0$是(4)式的仅有的解。因此，$m=0$. 类似地，从$m=0$出发也能得出$n=0$.

设$m>0$，$n>0$. $\{x_1,\cdots,x_n\}$是$\mathcal{N}(T_\lambda)$的一基。显然，$x_1\notin Y_1=\operatorname{span}\{x_2,\cdots,x_n\}$. 由引理4.6-7，存在一个$\tilde{g}_1\in X'$，它在$Y_1$上处处为零，且$\tilde{g}_1(x_1)=\delta$，这里，$\delta>0$是$x_1$到$Y_1$的距离。因此，$g_1=\delta^{-1}\tilde{g}_1$满足$g_1(x_1)=1$且$g_1(x_2)=0,\cdots,g_1(x_n)=0$. 类似地，存在一个$g_2$使$g(x_2)=1$且$g_2(x_j)=0$，$j\neq2$，等等。因此，$X'$含有$g_1,\cdots,g_n$使

$$(9)\qquad g_k(x_j)=\delta_{jk}=\begin{cases}0 & \text{如果}\ j\neq k\\ 1 & \text{如果}\ j=k\end{cases}\qquad(j,k=1,\cdots,n)$$

类似地，如果$\{f_1,\cdots,f_m\}$是$\mathcal{N}(T_\lambda^\times)$的一基，则按引理8.6-2，存在$X$的元$z_1,\cdots,z_m$使

(10) $f_j(z_k)=\delta_{jk}$ $(j,k=1,\cdots,m)$。

(b) 我们证明，$n<m$ 是不可能的．如果 $n<m$ 于是定义 $S:X\to X$ 为

$$(11)\qquad Sx=Tx+\sum_{j=1}^{n} g_j(x)z_j.$$

S 是紧的，因为，$g_j(x)z_j$ 按 8.1-4(a) 表示紧线性算子．紧线性算子之和是紧的．让我们证明，

(12) (a) $S_\lambda x_0=Sx_0-\lambda x_0=0\Rightarrow$ (b) $x_0=0$

由(12a)，有 $f_k(S_\lambda x_0)=f_k(0)=0$，$k=1,\cdots,m$。因此，由 (11) 式和(10)式，我们得

$$0=f_k(S_\lambda x_0)=f_k\left(T_\lambda x_0+\sum_{j=1}^{n} g_j(x_0)z_j\right)$$

$$(13)\qquad =f_k(T_\lambda x_0)+\sum_{j=1}^{n} g_j(x_0)f_k(z_j)$$

$$=(T_\lambda^\times f_k)(x_0)+g_k(x_0).$$

因为，$f_k\in\mathcal{N}(T_\lambda^\times)$，故我们有 $T_\lambda^\times f_k=0$。因此，(13) 式给出

(14) $g_k(x_0)=0$，$k=1,\cdots,n$。

由(11)式，这蕴含 $Sx_0=Tx_0$ 且由 (12a) 有 $T_\lambda x_0=S_\lambda x_0=0$。因此，$x_0\in\mathcal{N}(T_\lambda)$。因为 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是 $\mathcal{N}(T_\lambda)$ 的一基，故

$$x_0=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,$$

这里，α_j 是适当的数．用 g_k 作用于上式两端，并利用 (14) 式，(9)式，我们有

$$0=g_k(x_0)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_k(x_j)=\alpha_k\quad(k=1,\cdots,n).$$

因此，$x_0=0$。这就证明了(12)式成立。定理8.6-1(a)现蕴含$S_\lambda x=y$对任意y是可解的。我们选择$y=z_{n+1}$。设$x=v$是相应的解，即是$S_\lambda v=z_{n+1}$。如同在(13)式中那样，利用(10)式，(11)式，我们计算：

$$1=f_{n+1}(z_{n+1})=f_{n+1}(S_\lambda v)$$

$$=f_{n+1}(T_\lambda(v)+\sum_{j=1}^{n} g_j(v)z_j)$$

$$=(T_\lambda^\times f_{n+1})(v)+\sum_{j=1}^{n} g_j(v)f_{n+1}(z_j)$$

$$=(T_\lambda^\times f_{n+1})(v)。$$

因为我们假设$n<m$，故我们有$n+1\leqslant m$且$f_{n+1}\in\mathcal{N}(T_\lambda^\times)$。因此，$T_\lambda^\times f_{n+1}=0$。这同前面的方程矛盾，故证明了$n<m$是不可能的。

(c) 我们证明$n>m$也是不可能的。推证同(b)部分类似。设$n>m$，定义$\widetilde{S}:X'\to X'$

$$(15)\qquad \widetilde{S}f=T^\times f+\sum_{j=1}^{m} f(z_j)g_j,$$

由8.2-5，$T^\times$是紧的，且$\widetilde{S}$是紧的，因为由8.1-4(a) $f(z_j)g_j$表示紧线性算子。代替(12)式，现在我们证明：

$$(16)\qquad (a)\ \widetilde{S}_\lambda f_0=\widetilde{S}f_0-\lambda f_0=0\Rightarrow\ (b)\ f_0=0.$$

利用(16a)，然后(15)式中取$f=f_0$，然后用伴随算子的定义以及最后的(9)式，对每个$k=1,\cdots,m$，我们得

$$(17)\qquad 0=(\widetilde{S}f_0)(x_k)=(T_\lambda^\times f_0)(x_k)+\sum_{j=1}^{m} f_0(z_j)g_j(x_k)$$

$$=f_0(T_\lambda x_k)+f_0(z_k)。$$

我们的假设$m<n$蕴含$x_k\in\mathcal{N}(T_\lambda)$，$k=1,\cdots,m$。[注意$\{x_1,\cdots,$

$x_n\}$ 是 $\mathcal{N}(T_\lambda)$ 的一基] 因此，$f_0(T_\lambda x_k)=f_0(0)=0$，于是，(17) 式给出

(18) $f_0(z_k)=0 \qquad (k=1,\cdots,m)$.

因而，由 (15) 式 $\tilde{S}f_0=T^\times f_0$。由此及 (16a) 得出 $T^\times_\lambda f_0=\tilde{S}_\lambda f_0$。因此，$f_0\in\mathcal{N}(T^\times_\lambda)$。因为 $\{f_1,\cdots,f_m\}$ 是 $\mathcal{N}(T^\times_\lambda)$ 的基，故

$$f_0=\sum_{j=1}^{m}\beta_j f_j,$$

这里，β_j 是适当的数。利用 (18) 式和 (10) 式，于是，对每个 $k=1,\cdots,m$，我们得

$$0=f_0(z_k)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j f_j(z_k)=\beta_k.$$

因此，$f_0=0$。这证明了 (16) 式。定理 8.6-1 (b) 现蕴含 $\tilde{S}_\lambda f=g$ 对任意 g 是可解的。我们选取 $g=g_{m+1}$。设 $f=h$ 是相应的解，即是，$\tilde{S}_\lambda h=g_{m+1}$。利用 (9) 式，(15) 式和再次利用 (9) 式，我们得

$$\begin{aligned}1=g_{m+1}(x_{m+1})&=(\tilde{S}_\lambda h)(x_{m+1})\\&=(T^\times_\lambda h)(x_{m+1})+\sum_{j=1}^{m}h(z_j)g_j(z_{m+1})\\&=(T^\times_\lambda h)(x_{m+1})\\&=h(T_\lambda x_{m+1}).\end{aligned}$$

我们的假设 $m<n$ 蕴含 $m+1\leqslant n$，于是，$x_{m+1}\in\mathcal{N}(T_\lambda)$。因此，$h(T_\lambda x_{m+1})=h(0)=0$，这与前面的方程矛盾，故证明了 $m<n$ 是不可能的。因为，由 (b) 部分，$n<m$ 也不可能，故断定必有 $n=m$。∎

定理 8.6-1 (a) 也可用以证明我们早先关于 Banach 空间的一结果（定理8.4-4）甚至对一般的赋范空间也成立。

8.6-4 定理 (特征值) 设$T:X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子，则如果T有非零谱值，它们中的每一个必是T的特征值。

证明。如果豫解式$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$不存在，按定义$\lambda\in\sigma_p(T)$。设$\lambda\neq 0$且$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$存在，则由2.6-10，$T_\lambda x=0$蕴含$x=0$。这意味着(2)式仅有平凡解。定理8.6-1(a)现在证明(1)式对任意y是可解的，即是，R_λ是定义在全空间X上且有界的。因此，$\lambda\in\rho(T)$。∎

习　　题

1. 证明，在定理8.5-3的证明中的泛函f_0是线性的。

2. 在n个未知数的n个线性方程组的情况下，定理8.5-1蕴含着什么?

3. 考察n个未知数的n个线性方程组$Ax=y$。假设方程组有解x，证明，y必满足形如8.5节中(5)式的条件。

4. 对给定的y，n个未知数的n个线性方程组有（唯一的）解当且仅当$Ax=0$仅有平凡解$x=0$。如何从我们现有的一定理得出这一结论来。

5. n个未知数的n个线性方程组成的方程组$Ax=y$有解x当且仅当增广矩阵

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \eta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \eta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \eta_n \end{bmatrix}$$

的秩与系数矩阵$A=(\alpha_{jk})$的秩相同；这里，$y=(\eta_j)$。从定理8.5-1得出这一著名的准则。

6. 如果(2)式有一解$x\neq 0$且(1)式是可解的，证明，(1)式的解不可能是唯一的；类似地，如果(4)式有一解$f\neq 0$且(3)式是可解的，证明，(3)式的解不可能是唯一的。

7. 证明，定理8.6-1中的第一个结论也可以描述如下。$R_\lambda(T):X\to X$，$\lambda\neq 0$，存在当且仅当$Tx=\lambda x$蕴含$x=0$。

8. 二序列$(z_1,z_2,\cdots)$（在赋范空间X中）和$(f_1,f_2,\cdots)$（在对偶空间X'中）叫做双正交系，如果，它们满足$f_j(z_k)=\delta_{jk}$，这里，$j,k=1,2,\cdots$参看(5)式。给定(z_k)，证明，存在X'中的一序列(f_j)使(z_k)，(f_j)是

双正交系当且仅当对一切 $m\in N$，$z_m\notin A_m$，这里，

$$A_m=\text{span}\{z_k|k=1,2,\cdots;\ k\neq m\}.$$

9. 证明，在正文中定义的有限双正交系，习题 8 中的条件是自动满足的。

10. 如果内积空间中二集 $\{z_1,\cdots,z_n\}$ 和 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 满足 $\langle z_k,y_l\rangle=\delta_{kl}$，证明它们中每一个是线性无关的。

11. 在 Hilbert 空间中，双正交系取什么样的形式？

12. 如果 X 是 Hilbert 空间 H，叙述并证明引理 8.6-2。

13. 在 n 个未知数的 n 个线性方程的情况下，定理8.6-3蕴含着什么？

14. 如果赋范空间 X 上的线性算子 $T:X\to Y$ 具有有限维值域 $\mathscr{R}(T)=T(X)$，证明，T 有形如

$$Tx=f_1(x)y_1+\cdots+f_n(x)y_n$$

的表达式，这里，$\{y_1,\cdots,y_n\}$ 和 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 分别是 Y 和 X'（X 的对偶空间）中的线性无关集。

15. 如果 $\lambda=0$，我们可能想知道我们现有的定理将会有什么结果，此时，(1)式和(2)式分别将是

$$Tx=y \quad 和 \quad Tx=0.$$

对这些方程，定理8.6-1 可能不再成立。为了看出这一点，试考察由下式定义的算子 $T:C[0,\ \pi]\to C[0,\ \pi]$，

$$Tx(s)=\int_0^\pi k(s,t)x(t)dt,$$

$$k(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin ns\sin nt.$$

8.7 Fredholm 择一律（或择一定理）

前两节研究了紧线性算子方程可解性问题，所得结果提出了下面的概念．

8.7-1 定义（Fredholm 择一律（或择一定理）） 线性赋范空间 X 上的有界线性算子 $A:X\to X$ 叫做满足 Fredholm 择一律，

如果A使得不是(Ⅰ)成立就是(Ⅱ)成立。

（Ⅰ） 非齐次方程

$$Ax=y, \qquad A^{\times}f=g$$

（$A^{\times}:X'\to X'$是A的伴随算子）分别对每个$y\in X$和$g\in X'$有解x和f，且解唯一。

相应齐次方程

$$Ax=0 \qquad A^{\times}f=0$$

分别仅有平凡解。

（Ⅱ） 齐次方程

$$Ax=0 \qquad A^{\times}f=0$$

分别有相同数目的线性无关解

$$x_1, \cdots, x_m \text{ 和 } f_1, \cdots, f_m \qquad (n\geqslant 1).$$

非齐次方程

$$Ax=y \qquad A^{\times}f=g$$

并不是对一切y和g是可解的，它们有解的充分必要条件分别是使

$$f_k(y)=0 \qquad g(x_k)=0$$

$$(k=1, 2, \cdots, n). \blacksquare$$

我们看出，此概念可以用来综合前两节的结果。

8.7-2 定理(Fredholm 择一律) 设$T:X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子，$\lambda\neq 0$，则$T_\lambda=T-\lambda I$满足 Fredholm 择一律。

择一律这一结果对于应用是特别重要的，因为，证明齐次方程仅有平凡解代替解的存在的直接的证明，常常是较为简单的。

我们已经谈到的（在 8.5 节中）紧线性算子的 Riesz 理论是受到第二型积分方程

(1) $x(s)-\mu\int_a^b k(s,\ t)x(t)dt=\tilde{y}(s)$

的Fredholm理论的启示而提出的，并推广了Fredholm的著名结果，另外，这一结果先于了Hilbert空间和Banach空间理论的发展。我们将给出应用紧线性算子理论到形如(1)式的方程的一个简单的介绍。

设 $\mu=\frac{1}{\lambda}$，$\tilde{y}(s)=-y(s)/\lambda$，这里，$\lambda\neq 0$，我们有

(2) $Tx-\lambda x=y \qquad (\lambda\neq 0)$，

其中T定义为

(3) $(Tx)(s)=\int_a^b k(s,\ t)x(t)dt$.

一般理论结果现在可以转移到(2)式上去。事实上，我们有如下的结果

8.7-3 定理（关于积分方程的Fredholm择一律） 如果(1)式中的k使得(2)式和(3)式中的$T:X\to X$是赋范空间X上的紧线性算子，则对于T_λ，Fredholm择一律成立；于是，或者(1)式对一切$\tilde{y}\in X$有唯一解，或者相应于(1)的齐次方程有有限多个非平凡的（即是，解$x\neq 0$）线性无关解。

设(2)式中T是紧的（T为紧的条件下面给出），那末，如果λ是T的豫解集$\rho(T)$中的数，则豫解式$R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$存在，定义在全空间$X$上，有界[见8.6-1(b)]且对每个$y\in X$，(2)式的唯一解由

$$x=R_\lambda(T)y$$

给出。因为$R_\lambda(T)$是线性的，$R_\lambda(T)0=0$蕴含齐次方程$Tx-\lambda x=0$仅有平凡解$x=0$。因此，$\lambda\in\rho(T)$给出Fredholm择一律的情况(Ⅰ)。

设 $|\lambda|>\|T\|$. 又设 X 是复 Banach 空间，由定理 7.3-4 知，$\lambda\in\rho(T)$. 其次，由7.3节中的(9)式得出

$$(4)\qquad R_\lambda(T)=-\lambda^{-1}(I+\lambda^{-1}T+\lambda^{-2}T^2+\cdots),$$

因而，对于解 $x=R_\lambda(T)y$，有表达式

$$(5)\qquad x=-\frac{1}{\lambda}\left(y+\frac{1}{\lambda}Ty+\frac{1}{\lambda^2}T^2y+\cdots\right),$$

此表达式叫做 Neumann 级数.

如果取非零 $\lambda\in\sigma(T)$（如果这种λ存在的话），这里，$\sigma(T)$ 是T的谱，则得到 Fredholm 择一律的情况(Ⅱ). 定理8.6-4蕴含λ是特征值. 由定理8.3-3，相应的特征空间的维数是有限的，且由定理 8.6-3 它等于$T_\lambda^\times$的相应的特征空间的维数.

同定理 8.7-3 相联系的两个特别有趣的空间是

$$X=L^2[a,\ b]\quad 和\quad X=C[a,\ b].$$

为了应用这一定理，(1)式中的核k必须具备一定的条件，以保证T是紧的.

如果 $X=L^2[a,\ b]$. 这种条件是k在$L^2[J\times J]$中，这里，$J=[a,\ b]$.此证明要用到测度论中的知识,这超出了本书的范围.

在$X=C[a,\ b]$的情况下，这里，$[a,\ b]$是紧的，K的连续性蕴含T的紧性.

利用下面建立起来的标准定理（下面的，8.7-4）我们将得到这一结论.

$C[a,\ b]$中序列(x_n)叫做**等度连续的**，如果对每个$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$（仅依赖于ε），使得对一切x_n及一切满足$|s_1-s_2|<\delta$的s_1，$s_2\in[a,\ b]$有

$$|x_n(s_1)-x_n(s_2)|<\varepsilon.$$

由此定义看出，每个x_n在$[a,b]$上是一致连续的且δ不依赖于n.

8.7-4 Ascoli 定理（等度连续序列） $C[a,b]$中有界等度连

续序列(x_n)有收敛的子序列（依$C[a,b]$中的范数）。

关于它的证明，见 E. J. Mcshane(1944), p.336. 利用这一定理，我们得到$X=C[a,b]$情况下所要求的结果如下。

8.7-5 定理（紧积分算子） 设$J=[a,b]$是任一紧区间，k在$J\times J$上连续，则按(3)式定义的算子$T:X\to X$，$X=C[a,b]$，是紧线性算子。

证明. T是线性的。T的有界性从

$$\|Tx\|=\max_{s\in J}\left|\int_a^b k(s,\ t)x(t)dt\right|$$

$$\leqslant\|x\|\cdot\max_{s\in J}\int_a^b|k(s,\ t)|dt$$

得出，即可以表示为$\|Tx\|\leqslant\tilde{c}\|x\|$。设$(x_n)$是$X$中任意有界序列，比如说，$\|x_n\|\leqslant c$，对一切$n$。命$y_n=Tx_n$，则$\|y_n\|\leqslant\|T\|\|x_n\|$。因此，$(y_n)$也是有界的。我们证明$(y_n)$是等度连续的。因为，按假设，$k$在$J\times J$上连续且$J\times J$是紧的，则$k$在$J\times J$上一致连续. 因此，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对一切$t\in J$和一切满足$|s_1-s_2|<\delta$的$s_1$，$s_2\in J$有

$$|k(s_1,\ t)-k(s_2,\ t)|<\varepsilon/(b-a)c.$$

因而，对前面的s_1，s_2和每个n，我们得

$$|y_n(s_1)-y_n(s_2)|=\left|\int_a^b[k(s_1,\ t)-k(s_2,\ t)]\cdot x_n(t)dt\right|$$

$$<(b-a)\frac{\varepsilon}{(b-a)c}\cdot c=\varepsilon.$$

这就证明了(y_n)的等度连续性。Ascoli 定理蕴含(y_n)有收敛的子序列. 因(x_n)是任意有界序列且$y_n=Tx_n$，T的紧性从定理8.1-3得出来。 ∎

习　　题

1. 叙述n个未知数的n个线性方程组的 Fredholm 择一律。

2. 直接证明，(1)式可以不总是有解的。

3. 在(3)式中给定一不连续核k的例子，使其对一连续函数x，象Tx是不连续的。试讨论之。

4. (Neumann 级数) 证明，在(1)式中采用 $\mu=\frac{1}{\lambda}$和 $\tilde{y}$，Neumann 级数取下面的形式

$$x=\tilde{y}+\mu T\tilde{y}+\mu^2T^2\tilde{y}+\cdots.$$

试在$C[a, b]$中考察(1)式。如果，k在$[a,b]\times[a, b]$上是连续的，于是，比如说，$|k(s, t)|<M$，且如果$|\mu|<1/M(b-a)$，试证明 Neumann级数收敛。

5. 试解下面的积分方程，将结果同习题4中的Neumann级数比较。

$$x(s)-\mu\int_0^1 x(t)dt=1.$$

求出相应的齐次方程的一切解。并讨论之。

6. 解下面的方程并证明，如果$|\mu|<1/k_0(b-a)$，相应Neumann级数收敛。

$$x(s)-\mu\int_a^b k_0(xt)dt=\tilde{y}(s).$$

这里，k_0是常数。

7. (迭核，豫解核) 证明，在习题4的 Neumann 级数中，我们可以表

$$(T^n\tilde{y})(s)=\int_a^b k_{(n)}(s, t)\tilde{y}(t)dt,$$

这里，$n=2, 3, \cdots$，且迭核$k_{(n)}$由

$$k_{(n)}(s,t)=\int_a^b\cdots\int_a^b k(s,t_1)k(t_1, t_2)\cdots k(t_{n-1},t)dt_1\cdots dt_{n-1}$$

给出，于是习题4的 Neumann 级数可以表为

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_a^b k(s, t)\tilde{y}(t)dt$$

$$+\mu^2\int_a^b k_{(2)}(s,t)\tilde{y}(t)dt+\cdots$$

证明，这一表达式可以表成为一积分方程

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_a^b \tilde{k}(s,t,\mu)\tilde{y}(t)dt,$$

这里，豫解核$\tilde{k}$①由

$$\tilde{k}(s,\ t;\ \mu)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j k_{(j+1)}(s,\ t)\quad [k_{(1)}=k]$$

给出。证明，迭核满足

$$k_{(n)}(s,\ t)=\int_a^b k_{(n-1)}(s,\ u)k(u,\ t)du.$$

8． 对(1)式，取 $a=0$，$b=\pi$ 且

$$k(s,\ t)=a_1\sin s\sin 2t+a_2\sin 2s\sin 3t.$$

确定豫解核。

9． 利用习题 4 中的 Neumann 级数，解(1)式，这里，$a=0$，$b=2\pi$ 且

$$k(s,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin ns\cos nt\quad\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\right).$$

10． 在(1)式中，设$k(s,\ t)=s(1+t)$和$a=0$，$b=1$。确定特征值和特征函数。当$\lambda=1/\mu$不是特征值时，解此方程

11． 在(1)式中，设$k(s,\ t)=2e^{s+t}$和$\tilde{y}(s)=e^s$以及 $a=0$，$b=1$，求特征值和特征函数。

12． 解

$$x(s)-\mu\int_0^{2\pi}\sin s\cos t\,x(t)dt=\tilde{y}(s).$$

13． Ascoli 定理8.7-4 涉及按 $C[a,b]$ 中范数收敛的子序列。我们知道，这就是$[a,b]$上的一致收敛，见 1.5-6。举例说明，连续函数序列可以在$[a,b]$的每一点处收敛，但可以不含有$[a,b]$上的一致收敛的子序列。

14． (退化核)形如

---

① 绝不能将算子的豫解核同豫解式(见7.2节)混淆起来。

$$k(s,\ t)=\sum_{j=1}^{n}a_j(s)b_j(t)$$

的核k叫做退化核。这里，我们可以假设二集$\{a_1,\ \cdots,\ a_n\}$和$\{b_1,\cdots,b_n\}$的每一个在$[a,b]$上线性无关。因为，否则和式的项数可以减少。如果具这种核的方程(1)式有解，证明，它必取下面的形式

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\sum_{j=1}^{n}c_ja_j(s),\qquad c_j=\int_a^b b_j(t)x(t)dt,$$

且未知常数必满足

$$c_j-\mu\sum_{k=1}^{n}a_{jk}c_k=y_j,\quad a_{jk}=\int_a^b b_j(t)a_k(t)dt,$$

这里，$y_j=\int_a^b b_j(t)\tilde{y}(t)dt\qquad j=1,\ \cdots,\ n.$

15\. 考察

$$x(s)-\mu\int_0^1(s+t)x(t)dt=\tilde{y}(s).$$

(a)假设，$\mu^2+12\mu-12\neq0$，并利用习题14，解方程；(b)求特征值和特征函数。

第 九 章

有界自伴线性算子的谱理论

Hilbert 空间上的有界自伴线性算子在 3.1 节中已作了定义和讨论。本章从事其谱理论的研究。因为这些算子在应用中特别重要，故其谱理论已得到很好的阐述和发展。

重要概念，主要内容方向提要

在 9.1 和 9.2 节中，我们将讨论有界自伴线性算子的谱的性质，在9.3到9.8节我们所阐述的内容不仅其本身是有兴趣的，而且在9.9和9.10节中对于建立这些算子的“谱表示”也是必需的。

有界自伴线性算子T的谱是实的（见 9.1-3)，而且位于区间$[m, M]$中，这里m和M分别是$\langle Tx, x\rangle$在一切范数为1的x上所取得的下确界和上确界（见 9.2-1)，而且对应于不同固有值的固有向量是正交的(见9.1-1)。

这样一类算子 T 可以用一积分来表示（“谱定理 9.9-1 和 9.10-1)，这种积分包含一与T 有关的**谱族**$\mathscr{E}$（见 9.8-3)，而这里的谱族或单位分解（见9.7-1）是具有某种性质的一投影算子族。我们记得，投影算子在 3.3 节中已被用过，可是为了现在的目的，我们不仅需要这些算子的各种一般的性质（9.5,9.6节)，而且还需要**正算子**（9.3节）及其**平方根**（9.4节）的概念。

在9.11节我们将刻划有界自伴线性算子的谱族在豫解集的点

处，在固有值处以及在连续谱的点处的性质。（该算子的剩余谱是空的，见9.2-4.）

9.1 有界自伴线性算子的谱性质

在本章我们将处处考察定义在复 Hilbert 空间H上并映H到其自身的有界线性算子，而且这些算子是自伴的，我们稍加追述第三章中两个有关的定义。

设$T:H\to H$是复 Hilbert 空间H上的有界线性算子。则**Hilbert伴随算子**T^*：$H\to H$定义为满足次之条件

$$\langle Tx, y\rangle=\langle x, T^*y\rangle, \text{对一切} x, y\in H$$

的算子，这就是定义 3.9-1（其中$H_1=H_2=H$）。另由 3.9-2 知，T^*存在而且是H上范数$\|T^*\|=\|T\|$的有界线性算子，并是唯一的。

其次，T称为**自伴的**或Hermitian[①]，如果

$$T=T^*.$$

这就是定义3.10-1．于是$\langle Tx, y\rangle=\langle x, T^*y\rangle$变成

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x, Ty\rangle. \quad (1)$$

如果T是自伴的，则对一切$x\in H$，$\langle Tx, x\rangle$是实的。反之，因H是复的，这一条件就推出T的自伴性。（见 3.10-3）。

这就是我们主要复习的内容，现在我们着手关于有界自伴线性算子的谱的研究。我们将看到这种谱具有某些在实用上非常重要的一般性质。

有界自伴线性算子T可以没有固有[②]值（见习题9），但是，如果T有固有值，则下面的基本事实可以很容易地被建立。

---

① 在无界算子理论中，这两个术语有点不同，我们说T是有界的，这直接得自于(1)和我们的假定：T是定义在整个H上．（见习题10）．

② 译者注：遵照习俗，这里及以后把特徵值和特徵向量称为固有值和固有向量．

9.1-1 定理(固有值，固有向量) 设$T:H\to H$是复Hilbert空间H上的有界自伴线性算子．则

(a) T的一切固有值（如果存在的话）是实的．

(b) 相应于T的（数值上）不同的固有值的固有向量是正交的．

证．(a)设λ是T的任一固有值，x是相应的固有向量，则$x\neq 0$且$Tx=\lambda x$．利用T的自伴性，得

$$\lambda\langle x, x\rangle=\langle \lambda x, x\rangle=\langle Tx, x\rangle$$
$$=\langle x, Tx\rangle=\langle x, \lambda x\rangle=\bar{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

这里$\langle x, x\rangle=\|x\|^2\neq 0$（因$x\neq 0$）．用$\langle x, x\rangle$除上式两端得$\lambda=\bar{\lambda}$．故$\lambda$是实的．

(b) 设λ和μ是T的固有值，x和y是相应的固有向量，则$Tx=\lambda x$和$Tx=\mu y$．因T是自伴的，μ是实的．故

$$\lambda\langle x, y\rangle=\langle \lambda x, y\rangle=\langle Tx, y\rangle$$
$$=\langle x, Ty\rangle=\langle x, \mu y\rangle=\mu\langle x, y\rangle.$$

因$\lambda\neq\mu$，故必有$\langle x, y\rangle=0$，这就意味着x和y的正交性．▌

更有甚者，有界自伴线性算子T的整个谱都是实的．这一卓越的结果（见下面的定理9.1-3)将由下面的关于T的豫解集$\rho(T)$的特性而得出．

9.1-2 定理（豫解集） 设$T:H\to H$是复Hilbert空间H上的有界自伴线性算子．则数λ属于T的豫解集$\rho(T)$，当而且仅当存在一数$c>0$，使得对每一$x\in H$，

(2) $\|T_\lambda x\|\geqslant c\|x\|$, $\quad (T_\lambda=T-\lambda I)$.

证．(a)如果$\lambda\in\rho(T)$，则$R_\lambda=T_\lambda^{-1}:H\to H$存在且是有界的（见7.2-3)，比如说，$\|R_\lambda\|=k$，这里$k>0$，因为$R_\lambda\neq 0$．又因$I=R_\lambda T_\lambda$，故对每一$x\in H$有

$$\|x\|=\|R_\lambda T_\lambda x\|\leqslant\|R_\lambda\|\|T_\lambda x\|=k\|T_\lambda x\|.$$

这就得出$\|T_\lambda x\| \geqslant c\|x\|$，这里$c=1/k$。

（b） 反之，设(2)（其中$c>0$)对一切$x\in H$成立。则让我们证明

（α） $T_\lambda: H\to T_\lambda(H)$是双射的；

（β） $T_\lambda(H)$在H中稠密；

（γ） $T_\lambda(H)$在H中是闭的，

于是$T_\lambda(H)=H$，而且由有界逆定理4.12-2，$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$是有界的。

（α） 我们必须证明由$T_\lambda x_1=T_\lambda x_2$可推出$x_1=x_2$。但是这一事实可以从(2)式得出，因为$T_\lambda$是线性的，且

$$0=\|T_\lambda x_1-T_\lambda x_2\|=\|T_\lambda(x_1-x_2)\|\geqslant c\|x_1-x_2\|.$$

因$c>0$，故$\|x_1-x_2\|=0$，即$x_1=x_2$。因x_1,x_2是任意的，这就证明了T_λ：$H\to T_\lambda(H)$是双射的。

（β） 我们证明$x_0\perp\overline{T_\lambda(H)}$蕴含$x_0=0$，于是由投影定理3.3-4有$\overline{T_\lambda(H)}=H$。设$x_0\perp\overline{T_\lambda(H)}$，则$x_0\perp T_\lambda(H)$。故对一切$x\in H$有

$$0=\langle T_\lambda x,\ x_0\rangle=\langle Tx,\ x_0\rangle-\lambda\langle x,\ x_0\rangle.$$

因T是自伴的，于是我们得出

$$\langle x,\ Tx_0\rangle=\langle Tx,\ x_0\rangle=\langle x,\ \bar{\lambda}x_0\rangle,$$

故由3.8-2有$Tx_0=\bar{\lambda}x_0$。显然$x_0=0$是该方程的解，而$x_0\neq 0$不可能是它的解。因为如果$x_0\neq 0$是其解，这就意味着$\bar{\lambda}$是T之一固有值，于是由9.1-1知$\bar{\lambda}=\lambda$且$Tx_0-\lambda x_0=T_\lambda x_0=0$，由(2)式即得一矛盾

$$0=\|T_\lambda x_0\|\geqslant c\|x_0\|>0.$$

（因为$c>0$）。由此矛盾得知$x_0=0$。因x_0是任一正交于$T_\lambda(H)$的向量，故$\overline{T_\lambda(H)}^\perp=\{0\}$。由3.3-4知$\overline{T_\lambda(H)}=H$，即$T_\lambda(H)$在$H$中稠密。

（γ） 我们最后证明$y\in\overline{T_\lambda(H)}$蕴含$y\in T_\lambda(H)$，于是得知

$T_\lambda(H)$是闭的，由(β)有$T_\lambda(H)=H$。设$y\in\overline{T_\lambda(H)}$.由1.4-6(a)在$T_\lambda(H)$中存在序列$(y_n)$其收敛于$y$。因$y_n\in T_\lambda(H)$，故对某一$x_n\in H$有$y_n=T_\lambda x_n$。由(2)

$$\|x_n-x_m\|\leqslant\frac{1}{c}\|T_\lambda(x_n-x_m)\|=\frac{1}{c}\|y_n-y_m\|.$$

因(y_n)收敛，故(x_n)是一Cauchy列.因H完备，故(x_n)收敛，比如说，$x_n\to x$。因T连续，故T_λ亦连续，由1.4-8，$y_n=T_\lambda x_n\to T_\lambda x$。由定义，$T_\lambda x\in T_\lambda(H)$。因极限唯一，故$T_\lambda x=y$，从而$y\in T_\lambda(H)$。因$y\in\overline{T_\lambda(H)}$是任意的，故$T_\lambda(H)$是闭的。由($\beta$)即得$T_\lambda(H)=H$。这就意味着$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$定义在整个$H$上，而且是有界的，这与从有界逆定理4.12-2或直接由(2)得出的一样。因此$\lambda\in\rho(T)$。∎

由这一定理现在我们直接得出下面的基本定理。

9.1-3 定理(谱) 复Hilbert空间H上的有界自伴线性算子$T:H\to H$的谱$\sigma(T)$是实的.

证. 利用定理9.1-2，我们证明$\lambda=\alpha+i\beta$(α, β是实数)，其中$\beta\neq0$，必属于$\rho(T)$，于是$\sigma(T)\subset\mathbf{R}$。

对H中的每一$x\neq0$，我们有

$$\langle T_\lambda x,\ x\rangle=\langle Tx,\ x\rangle-\lambda\langle x,\ x\rangle.$$

因$\langle x,\ x\rangle$和$\langle Tx,\ x\rangle$都是实的(见3.10-3)，故

$$\overline{\langle T_\lambda x,\ x\rangle}=\langle Tx,x\rangle-\bar\lambda\langle x,\ x\rangle.$$

这里$\bar\lambda=\alpha-i\beta$。上两式相减得

$$\overline{\langle T_\lambda x,\ x\rangle}-\langle T_\lambda x,\ x\rangle=(\lambda-\bar\lambda)\langle x,x\rangle=2i\beta\|x\|^2.$$

左端是$-2iI_m\langle T_\lambda x,x\rangle$，其中$I_m$表虚部，而虚部不可能超过绝对值，于是除以2，取绝对值并利用Schwarz不等式，即得

$$|\beta|\|x\|^2=|I_m\langle T_\lambda x,\ x\rangle|\leqslant|\langle T_\lambda x,x\rangle|\leqslant\|T_\lambda x\|\|x\|.$$

除以$\|x\|\neq0$，即得$|\beta|\|x\|\leqslant\|T_\lambda x\|$。若$\beta\neq0$，则$\lambda\in\rho(T)$（由定理9.1-2)。因此当$\lambda\in\sigma(T)$时，必有$\beta=0$。即$\lambda$是一实数。∎

习　　题

1. 在课文中我们已提到，对自伴线性算子T，内积$\langle Tx, x\rangle$是实的，对矩阵来说这蕴含着什么？矩阵论中熟知的什么定理其包含为定理9.1-1的特例？

2. 如果在有限维情形，自伴线性算子T由一对角形矩阵表示，试证明矩阵必是实的。T的谱是什么？

3. 试证明在定理9.1-2中，R_λ的有界性也由(2)得出。

4. 用一个算子，其谱由一给定的值λ_0所组成，来说明定理9.1-2. 试问此时最大的c是什么？

5. 设$T: H \to H$和$W: H \to H$是一复 Hilbert 空间H上的二有界线性算子。若T是自伴的，试证明$S = W^*TW$是自伴的。

6. 设$T: l^2 \to l^2$由$(\xi_1, \xi_2 \cdots\cdots) \mapsto (0, 0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$定义。试问$T$是有界的吗？自伴吗？试求$S: l^2 \to l^2$使得$T = S^2$.

7. 设$T: l^2 \to l^2$由$y = (\eta_j) = Tx$, $x = (\xi_j)$, $\eta_j = \lambda_j \xi_j$定义，其中(λ_j)是$\mathbf{R}$上的一有界序列，且$a = \inf \lambda_j$, $b = \sup \lambda_j$. 试证每一λ_j是T之一固有值. 试问在什么条件下将有$\sigma(T) \supset [a, b]$？

8. 利用定理9.1-2，试证明第7题中算子T的谱是固有值集的闭包。

9. 由2.2-7和3.1-5我们知道，Hilbert 空间$L^2[0,1]$是$[0, 1]$上一切连续函数的内积空间X（其内积由

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

定义）的完备化空间。试证明由下式定义的算子$T: L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$：

$$y(t) = Tx(t) = tx(t)$$

是没有固有值的有界自伴线性算子。

10. 注意到下面的事实是有兴趣的，一线性算子T其定义在整个复Hilbert空间H上，且对一切$x, y \in H$满足(1)，则必是有界的（故本节开始时有界性的假定是不必要的）. 试证明之。

9.2 有界自伴线性算子谱的进一步的性质

有界自伴线性算子T的谱$\sigma(T)$是实的。这一重要的事实已在

前一节中被证明。我们将看到这种算子的谱可以更为深刻地进行刻划，因为它有许多一般的性质，不仅在数学上是有趣的而且在实际的应用上也是重要的。由 7.3-4，显然$\sigma(T)$必然是紧的，但在现在的情形，我们则可得出更为深刻的结果。

9.2-1 定理(谱) 复 Hilbert 空间 H 上的有界自伴线性算子$T:H\to H$的谱 $\sigma(T)$，位于实轴上的闭区间$[m, M]$中，这里

$$(1)\qquad m=\inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle,\ M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle.$$

证. $\sigma(T)$位于实轴上（由9.1-3）。现证任一实数 $\lambda=M+c$，$c>0$，属于豫解集 $\rho(T)$。对每一 $x\neq 0$ 和 $v=\|x\|^{-1}x$，我们有 $x=\|x\|v$，且

$$\langle Tx, x\rangle=\|x\|^2\langle Tv, v\rangle\leqslant\|x\|^2\sup_{\|\tilde{v}\|=1}\langle T\tilde{v}, \tilde{v}\rangle=\langle x, x\rangle M.$$

故$-\langle Tx, x\rangle\geqslant-\langle x,x\rangle M$，又由 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\|T_\lambda x\|\|x\|&\geqslant-\langle T_\lambda x, x\rangle=-\langle Tx, x\rangle+\lambda\langle x, x\rangle\\&\geqslant(-M+\lambda)\langle x, x\rangle\\&=c\|x\|^2,\end{aligned}$$

由假设上式中 $c=\lambda-M>0$。除以$\|x\|$，即得不等式 $\|T_\lambda x\|\geqslant c\|x\|$。于是由9.1-2知 $\lambda\in\rho(T)$。当$\lambda<m$ 时，证明的思想是一样的。∎

(1)式中的m和M与T 的范数之间按下面的有趣的方式相联系。

9.2-2 定理(范数) 对复 Hilbert 空间H上的任一有界自伴线性算子T有[见(1)式]

$$(2)\qquad \|T\|=\max(|m|, |M|)=\sup_{\|x\|=1}|\langle Tx,x\rangle|.$$

证. 由 Schwarz 不等式

$$\sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\|x\|=\|T\|,$$

即 $K\leqslant\|T\|$，这里K表左端的式子，现证 $\|T\|\leqslant K$. 若对一切范数为1的z有$Tz=0$，于是$T=0$（为什么？），则结论已证。否则对任一范数为1并使得$Tz\neq 0$的z，令$v=\|Tz\|^{1/2}z$，$w=\|Tz\|^{-1/2}Tz$。则$\|v\|^2=\|w\|^2=\|Tz\|$。现令 $y_1=v+w$，$y_2=v-w$，直接计算(因许多项被消去，且T是自伴的）得

$$(3)\quad \begin{aligned}\langle Ty_1, y_1\rangle-\langle Ty_2, y_2\rangle&=2(\langle Tv, w\rangle+\langle Tw, v\rangle)\\&=2(\langle Tz, Tz\rangle+\langle T^2z, z\rangle)\\&=4\|Tz\|^2.\end{aligned}$$

于是对每一 $y\neq 0$ 和 $x=\|y\|^{-1}y$ 我们有 $y=\|y\|x$，而且

$$\begin{aligned}|\langle Ty, y\rangle|=\|y\|^2|\langle Tx, x\rangle|&\leqslant\|y\|^2\sup_{\|\tilde{x}\|=1}|\langle T\tilde{x}, \tilde{x}\rangle|\\&=K\|y\|^2.\end{aligned}$$

故由三角不等式和直接计算得

$$\begin{aligned}|\langle Ty_1, y_1\rangle-\langle Ty_2, y_2\rangle|&\leqslant|\langle Ty_1, y_1\rangle|+|\langle Ty_2, y_2\rangle|\\&\leqslant K(\|y_1\|^2+\|y_2\|^2)\\&=2K(\|v\|^2+\|w\|^2)\\&=4K\|Tz\|.\end{aligned}$$

由上式及(3)式得知 $4\|Tz\|^2\leqslant 4K\|Tz\|$，即 $\|Tz\|\leqslant K$. 对一切范数为1的z取上确界，即得$\|T\|\leqslant K$. 与$K\leqslant\|T\|$一起即得(2). ∎

实际上，定理9.2-1中$\sigma(T)$的界不可能再缩小。这由下面的定理可看出。

9.2-3 定理(m和M是谱值) 设H和T与定理9.2-1中者相同且 $H\neq\{0\}$ 则(1)中定义的m和M是T的谱值。

证. 现证 $M\in\sigma(T)$. 由谱映象定理7.4-2，$T+kI$（k是一实常数）的谱由T的谱通过平移而得出，而且

$$M\in\sigma(T)\Longleftrightarrow M+k\in\sigma(T+kI).$$

故不失一般性可以假定 $0\leqslant m\leqslant M$. 于是由前面的定理我们有

$$M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,\ x\rangle=\|T\|.$$

根据上确界的定义，存在一序列(x_n)使得

$$\|x_n\|=1,\quad \langle Tx_n,\ x_n\rangle=M-\delta_n,\ \delta_n\geqslant 0,\ \delta_n\to 0.$$

于是$\|Tx_n\|\leqslant\|T\|\,\|x_n\|=\|T\|=M$。又因$T$是自伴的，故

$$\begin{aligned}\|Tx_n-Mx_n\|^2&=\langle Tx_n-Mx_n,\ Tx_n-Mx_n\rangle\\&=\|Tx_n\|^2-2M\langle Tx_n,\ x_n\rangle+M^2\|x_n\|^2\\&\leqslant M^2-2M(M-\delta_n)+M^2=2M\delta_n\to 0.\end{aligned}$$

因此不存在正数c使得

$$\|T_M x_n\|=\|Tx_n-Mx_n\|\geqslant c=c\|x_n\|\quad(\|x_n\|=1).$$

而定理9.1-2表明$\lambda=M$不可能属于T的豫解集。故$M\in\sigma(T)$。对$\lambda=m$的情形，证明是类似的。▌

把线性算子的谱分为点谱和另外的部分似乎是自然的。因为在有限维空间中，“另外的部分”是不存在的，这正如我们从矩阵论中所熟知的（见7.1节）。把“另外的部分”分为连续谱和剩余谱也同样是合理的，因为对相当大的重要的一类自伴线性算子剩余谱是不存在的。

9.2-4 定理(剩余谱) 复 Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子的剩余谱$\sigma_r(T)$是空的。

证. 我们证明，假定$\sigma_r(T)\neq\phi$就会导出矛盾。设$\lambda\in\sigma_r(T)$。由$\sigma_r(T)$的定义，T_λ的逆存在，但其定义域$\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$不在$H$中稠密，故由投影定理3.3-4，在$H$中存在$y\neq 0$，正交于$\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$。但$\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$是$T_\lambda$的值域，故对一切$x\in H$

$$\langle T_\lambda x,\ y\rangle=0.$$

因λ是实的（见9.1-3），T是自伴的，于是对一切x有$\langle x, T_\lambda y\rangle=0$。取$x=T_\lambda y$，我们得出$\|T_\lambda y\|^2=0$。故

$$T_\lambda y=Ty-\lambda y=0.$$

因 $y \neq 0$，上式表明λ是T之一固有值。这就与 $\lambda \in \sigma_r(T)$ 矛盾。故 $\sigma_r(T) \neq \phi$是不可能的，因而得证 $\sigma_r(T) = \phi$。∎

习　　题

1．给出当 $\lambda < m$ 时定理9.2-1 的证明。

2．试问由定理9.2-1我们可以得出关于 Hermitian 矩阵 $A=(a_{jk})$的固有值的什么定理？

3．若T是 Hilbert 空间H到H之一真子空间$Y \neq \{0\}$上的投影算子。试求出m和M（见定理9.2-1）。

4．试证明在定理9.2-3中 $m \in \sigma(T)$。

5．利用本节中之一定理，试证明复 Hilbert 空间 $H \neq \{0\}$ 上的有界自伴线性算子的谱是不空的。

6．试证明一复 Hilbert 空间 $H \neq \{0\}$上的紧自伴线性算子$T: H \rightarrow H$至少有一固有值。

7．考察由 $y = Tx$，这里$x = (\xi_j)$，$y = (\eta_j)$ 且$\eta_j = \zeta_j / j$，$j = 1, 2, \cdots$所定义的算子$T: l^2 \rightarrow l^2$。在8.1-6 中我们已证明T是紧的。试求出T的谱，并证明 $0 \in \sigma_c(T)$，而实际上，$\sigma_c(T) = \{0\}$。（具 $0 \in \sigma_p(T)$ 或 $0 \in \sigma_r(T)$ 的紧算子，见8.4节，习题4,5.）。

8．（Rayleigh商）．试证明(1)可以写成

$$\sigma(T) \subset [\inf_{x \neq 0} q(x), \sup_{x \neq 0} q(x)],$$

其中$q(x) = \langle Tx, x \rangle / \langle x, x \rangle$ 称为 Rayleigh 商。

9．若$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 是 Hermitian 矩阵A的固有值。试证明

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} q(x), \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} q(x), \quad 这里\ q(x) = \frac{\bar{x}^T A x}{\bar{x}^T x}.$$

并证明

$$\lambda_j = \max_{\substack{x \in Y_j \\ x \neq 0}} q(x), \quad j = 2, 3, \cdots, n,$$

这里Y_j是$\mathbf{C}^n$的子空间，其由一切正交于对应于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{j-1}$ 的固有向量的向量所组成。

10．试证明具正元的实对称方阵 $A = (a_{jk})$有正固有值。（可以证明即使不假定对称性，此结论亦成立；这是著名的 Perron，Frobenius 定理的一部分。（见 F. R. Gantmacher(1960)，Vol. Ⅱ，P.53.）

9.3 正算子

若T是自伴的，则如我们在9.1节所知道的，$\langle Tx, x\rangle$是实的．于是我们可以考察复 Hilbert 空间H上的一切有界自伴线性算子的集，并在这一集上引入偏序$\leqslant$（见4.1节），其定义为

(1) $T_1\leqslant T_2$，当而且仅当对一切$x\in H$有$\langle T_1x, x\rangle\leqslant\langle T_2x,x\rangle$．有时我们把$T_1\leqslant T_2$也写成$T_2\geqslant T_1$．

一个重要的特别情形如下：一有界自伴线性算子$T:H\to H$称为**正的**，记为

(2) $$T\geqslant 0,$$

当而且仅当$\langle Tx, x\rangle\geqslant 0$对一切$x\in H$成立．有时我们把$T\geqslant 0$也写成$0\leqslant T$．实际上，这种算子应称为"非负的"．只不过习惯上称之为"正的"吧了．

注意（1）和（2）之一简单关系，即

$T_1\leqslant T_2\Leftrightarrow 0\leqslant T_2-T_1,$

这就是说（1）成立当而且仅当T_2-T_1是正的．

在这一节和下一节中我们从事正算子及其平方根的讨论，这一课题不仅其本身是有趣的，而且在本章末将作为导出有界自伴线性算子的谱表示之一强有力的工具．

正算子的和是正的．

由定义，这一结论是显然的．现在我们转向讨论积．由3.10-4知，有界自伴线性算子的积（复合）是自伴的当而且仅当算子是可交换的，而且我们将看出，这时正性也得以保存．这一事实在我们进一步的工作中将常被用到．

9.3-1 定理（正算子的积） 如果 Hilbert 空间H上的两个

有界的自伴线性算子S和T是正的和可交换的（$ST=ST$），则其积ST是正的。

证，我们需证明对一切$x\in H$，$\langle STx, x\rangle\geqslant 0$．若$S=0$，结论成立．设$S\neq 0$．我们分两步$(a)$和$(b)$进行证明．

(a) 考察

$$(3)\qquad S_1=\frac{1}{\|S\|}S,\quad S_{n+1}=S_n-S_n^2\quad (n=1, 2, \cdots)$$

并用归纳法证明

$$(4)\qquad 0\leqslant S_n\leqslant I.$$

(b) 证明对一切$x\in H$，$\langle STx, x\rangle\geqslant 0$。

详细证明如下：

(a) 当$n=1$时，不等式（4）成立．实际上，由假定$0\leqslant S$就推出$0\leqslant S_1$。应用Schwarz不等式和不等式$\|Sx\|\leqslant\|S\|\|x\|$得知

$$\langle S_1x, x\rangle=\frac{1}{\|S\|}\langle Sx, x\rangle\leqslant\frac{1}{\|S\|}\|Sx\|\|x\|\leqslant\|x\|^2=\langle Ix, x\rangle,$$

从而得出$S_1\leqslant I$．假设（4）当$n=k$时成立，即

$$0\leqslant S_k\leqslant I,\quad 于是0\leqslant I-S_k\leqslant I.$$

因S_k是自伴的，故对每一$x\in H$和$y=S_kx$有

$$\begin{aligned}\langle S_k^2(I-S_k)x, x\rangle&=\langle (I-S_k)S_kx, S_kx\rangle\\&=\langle (I-S_k)y, y\rangle\geqslant 0.\end{aligned}$$

由定义，这就证明了

$$S_k^2(I-S_k)\geqslant 0.$$

类似地可证明

$$S_k(I-S_k)^2\geqslant 0.$$

相加并化简得

$$0\leqslant S_k^2(I-S_k)+S_k(I-S_k)^2=S_k-S_k^2=S_{k+1}.$$

于是$0\leqslant S_{k+1}$。而$S_{k+1}\leqslant I$由$S_k^2\geqslant 0$和$I-S_k\geqslant 0$相加而得出．事实上，我们有

$$0 \leqslant I - S_k + S_k^2 = I - S_{k+1}.$$

这就完成（4）的归纳法证明.

（b）现证对一切 $x \in H$，$\langle STx,\ x\rangle \geqslant 0$。由(3)我们依次得出

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_1^2 + S_2 \\
&= S_1^2 + S_2^2 + S_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 + S_{n+1}.
\end{aligned}$$

因 $S_{n+1} \geqslant 0$，这就推出

（5） $S_1^2 + \cdots + S_n^2 = S_1 - S_{n+1} \leqslant S_1.$

由$\leqslant$的定义和S_j自伴性，这就意味着

$$\sum_{j=1}^{n} \|S_j x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle S_j x,\ S_j x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle S_j^2 x,\ x\rangle \leqslant \langle S_1 x,\ x\rangle.$$

由于n的任意性，故无穷级数$\|S_1 x\|^2 + \|S_2 x\|^2 + \cdots$收敛。从而$\|S_n x\| \to 0$，故 $S_n x \to 0$。由（5），有

（6） $\left(\sum_{j=1}^{n} S_j^2\right) x = (S_1 - S_{n+1}) x \to S_1 x \ (n \to \infty).$

一切 S_j 与T是可交换的，因为它们是 $S_1 = \|S\|^{-1} S$ 的和与积，而且S和T是可交换的。利用$S = \|S\| S_1$，公式(6)，$T \geqslant 0$ 和内积的连续性，于是我们得出，对每一 $x \in H$ 和 $y_j = S_j x$

$$\begin{aligned}
\langle STx,\ x\rangle &= \|S\| \langle TS_1 x,\ x\rangle \\
&= \|S\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle TS_j^2 x,\ x\rangle \\
&= \|S\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle Ty_j,\ y_j\rangle \geqslant 0.
\end{aligned}$$

即$\langle STx,\ x\rangle \geqslant 0$。▌

由（2）式所定义的偏序关系也为我们提出了下面的概念。

9.3-2 定义(单调序列) Hilbert空间H上的自伴线性算子T_n的序列 (T_n) 是单调的，如果它或是单调增的，即

$$T_1 \leqslant T_2 \leqslant T_3 \leqslant \cdots$$

或是单调减的，即

$$T_1 \geqslant T_2 \geqslant T_3 \geqslant \cdots. \blacksquare$$

单调增的序列具有下面的一个值得注意的性质（类似的定理对单调减的序列亦成立）．

9.3-3 定理(单调序列) 设 (T_n) 是复 Hilbert 空间H上之一有界自伴线性算子的序列，使得

$$T_1 \leqslant T_2 \leqslant \cdots \leqslant T_n \leqslant \cdots \leqslant K, \tag{7}$$

其中K是H上之一有界自伴线性算子．假设任一T_j与K并与每一T_m都可交换．则 (T_n) 是强算子收敛的 (即对一切 $x \in H$, $T_n x \to Tx$) 而且极限算子T是线性有界和自伴的，而且满足$T \leqslant K$．

证．现考察$S_n = K - T_n$ 并证明下面的结论：

(a) 序列($\langle S_n^2 x, x \rangle$)对每一 $x \in H$ 收敛．

(b) $T_n x \to Tx$，这里T是线性和自伴的，而且由一致有界性定理它也是有界的．

详细证明如下：

(a) 显然，S_n是自伴的，故有

$$S_m^2 - S_n S_m = (S_m - S_n) S_m = (T_n - T_m)(K - T_m).$$

设$m < n$，由（7）$T_n - T_m$和$K - T_m$是正的．因这些算子可交换，故由定理9.3-1它们的积是正的．于是在左端 $S_m^2 - S_n S_m \geqslant 0$，即当$m < n$ 时 $S_m^2 \geqslant S_n S_m$．类似可证

$$S_n S_m - S_n^2 = S_n (S_m - S_n) = (K - T_n)(T_n - T_m) \geqslant 0,$$

故$S_n S_m \geqslant S_n^2$．与上面的结果一起得知

$$S_m^2 \geqslant S_n S_m \geqslant S_n^2 \qquad (m < n).$$

根据定义，并引用S_n 的自伴性，于是有

(8) $\langle S_m^2 x, x\rangle \geqslant \langle S_n S_m x, x\rangle \geqslant \langle S_n^2 x, x\rangle = \langle S_n x, S_n x\rangle$
$= \|S_n x\|^2 \geqslant 0.$

上式表明 $(\langle S_n^2 x, x\rangle)$ 对固定的 x 是一非负数的单调减的序列．故收敛．

(b) 现证 $(T_n x)$ 收敛．由假定，每一T_n与每一T_m和K都可交换．故诸S_j都可交换．这些算子是自伴的．因由 (8) 知 $-2\langle S_m S_n x, x\rangle \leqslant -2\langle S_n^2 x, x\rangle$，其中$m<n$，故得

$$\begin{aligned}\|S_m x - S_n x\|^2 &= \langle (S_m - S_n)x, (S_m - S_n)x\rangle \\ &= \langle (S_m - S_n)^2 x, x\rangle \\ &= \langle S_m^2 x, x\rangle - 2\langle S_m S_n x, x\rangle + \langle S_n^2 x, x\rangle \\ &\leqslant \langle S_m^2 x, x\rangle - \langle S_n^2 x, x\rangle.\end{aligned}$$

由上式及在(a)部分中所证明的收敛性，得知 $(S_n x)$ 是 Cauchy 列．因H完备，故它收敛．可是$T_n = K - S_n$，故 $(T_n x)$ 也收敛．显然极限依赖于x，故对每一$x \in H$我们可以写成$T_n x \to Tx$．因此，这就定义了一个算子$T: H \to H$，其为线性的．因为T_n是自伴的而且内积是连续的，故T是自伴的．因 $(T_n x)$ 收敛，故其对每一$x \in H$是有界的．由一致有界性定理 4.7-3 推出T是有界的．最后，$T \leqslant K$由$T_n \leqslant K$得之．■

习　　题

1．设S和T是复 Hilbert 空间上的有界自伴线性算子．若$S \leqslant T$且$S \geqslant T$，试证$S = T$．

2．试证明 (1) 式在复 Hilbert 空间H上的所有有界自伴线性算子的集上定义了一偏序关系（见定义 4.1-1），而且对任意这样的算子T，

$$T_1 \leqslant T_2 \Rightarrow T_1 + T \leqslant T_2 + T,$$
$$T_1 \leqslant T_2 \Rightarrow \alpha T_1 \leqslant \alpha T_2 \qquad (\alpha \geqslant 0).$$

3．设A，B，T是一复Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子．若$T \geqslant 0$且与A和B可交换．试证

$$A \leqslant B \text{ 蕴含 } AT \leqslant BT.$$

4. 若$T:H\to H$是复 Hilbert 空间H上的有界线性算子，试证TT^*和T^*T是自伴的和正的。并证明TT^*和T^*T的谱是实的，而且不能包含负值。对方阵A来说，试问第二个论断的推论是什么？

5. 试证明，复 Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子T是正的，当而且仅当其谱仅由非负实值组成。对矩阵这蕴含着什么？

6. 设T：$H\to H$和W：$H\to H$是复 Hilbert 空间H上的有界线性算子，且$S=W^*TW$。试证若T是自伴的和正的，则S亦然。

7. 设T_1和T_2是复 Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子，再设$T_1T_2=T_2T_1$且$T_2\geqslant 0$。试证$T_1^2T_2$是自伴和正的。

8. 设S和T是 Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子。若$S\geqslant 0$，试证$TST\geqslant 0$。

9. 试证若$T\geqslant 0$，则$(I+T)^{-1}$存在。

10. 设T是复Hilbert空间上任一有界线性算子。试证$I+T^*T$的逆存在。

11. 定理9.3-3 之一解释性的例子由这样的序列(P_n)给出，其中P_n是l^2到这样的子空间上的投影，该子空间由所有这样的序列$x=(\xi_j)\in l^2$所组成，其中$\xi_j=0$当$j>n$时。试证明之。

12. 设T是复 Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子。试证T^2是正的。对矩阵来说这蕴含着什么？

13. 若T是复 Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子。试证T^2的谱不能包含负值。这推广了矩阵论中的什么定理？

14. 若T：$H\to H$和S：$H\to H$是有界线性算子，又T是紧的且$S^*S\leqslant T^*T$。试证S是紧的。

15. 设$T:H\to H$是无限维复 Hilbert 空间H上的有界线性算子。若存在一常数$c>0$，使得对一切$x\in H$有$\|Tx\|\geqslant c\|x\|$。试证T不是紧的。

9.4 正算子的平方根

若T是自伴的，则T^2是正的（因$\langle T^2x,\ x\rangle=\langle Tx,\ Tx\rangle\geqslant 0$）。现考虑逆问题：给定一正算子$T$，求一自伴算子$A$使得$A^2=T$。这就为我们提示了下面的概念，这一概念是谱表示的基础。

9.4-1 定义(正平方根) 设T：$H\to H$是一复 Hilbert 空间H上正的有界自伴线性算子。则有界自伴线性算子A称为T的**平**

方根，如果

(1) $A^2=T$.

若再加上$A\geqslant 0$，则A称为T的**正平方根**，并用

$$A=T^{1/2}$$

记之。■

$T^{1/2}$存在而且是唯一的。

9.4-2 定理（正平方根） 复Hilbert空间H上的每一正的有界自伴线性算子$T:H\to H$有一正平方根A，而且是唯一的。这一算子A与H上的与T可交换的每一有界线性算子可交换。

证。我们分三步进行证明：

(*a*) 我们证明，如果定理在$T\leqslant I$这一附加的假定下成立，则没有此附加条件定理亦成立。

(*b*) 我们从$A_n x\to Ax$，这里$A_0=0$和

(2) $A_{n+1}=A_n+\frac{1}{2}(T-A_n^2)$, $n=0, 1, \cdots$

来得出算子$A=T^{1/2}$的存在性，同时也证明定理中所说的可交换性。

(*c*) 证明正平方根的唯一性。

详细证明如下：

(*a*) 若$T=0$，我们可以取$A=T^{1/2}=0$。设$T\neq 0$由Schwarz不等式得

$$\langle Tx, x\rangle\leqslant\|Tx\|\|x\|\leqslant\|T\|\|x\|^2.$$

以$\|T\|\neq 0$除，并令$Q=(1/\|T\|)T$，得

$$\langle Qx, x\rangle\leqslant\|x\|^2=\langle Ix, x\rangle;$$

即$Q\leqslant I$。设Q有唯一的正平方根$B=Q^{1/2}$，则有$B^2=Q$，而且我们看出$T=\|T\|Q$之一平方根是$\|T\|^{1/2}B$，因为

$$(\|T\|^{1/2}B)^2=\|T\|B^2=\|T\|Q=T.$$

另外，不难看出，$Q^{1/2}$的唯一性蕴含T的正平方根的唯一性。

因此，如果我们能在$T\leqslant I$的附加条件下证明定理的结论，则定理即被证明。

(*b*) 存在性。现考察(2)。因$A_0=0$，故有$A_1=\frac{1}{2}T$，$A_2=T-\frac{1}{8}T^2$，等等。每一A_n是T的一多项式。故诸A_n是自伴的，彼此是可交换的，而且它们与T可交换的每一算子可交换。现证

(3) $A_n\leqslant I$，$n=0, 1, \cdots$；

(4) $A_n\leqslant A_{n+1}$，$n=0, 1, \cdots$；

(5) $A_n x\to Ax$，$A=T^{1/2}$；

(6) $ST=TS\Rightarrow AS=SA$，

其中S是H上的有界线性算子。

(3) 的证明：

我们有$A_0\leqslant I$。设$n>0$。因$I-A_{n-1}$是自伴的，故$(I-A_{n-1})^2\geqslant 0$。另由$T\leqslant I$推出$I-T\geqslant 0$。由此及(2)即得(3)：

$$
\begin{aligned}
0&\leqslant \frac{1}{2}(I-A_{n-1})^2+\frac{1}{2}(I-T)\\
&=I-A_{n-1}-\frac{1}{2}(T-A_{n-1}^2)\\
&=I-A_n.
\end{aligned}
$$

(4) 的证明：

我们用归纳法。(2)式给出$0=A_0\leqslant A_1\leqslant\frac{1}{2}T$。现证：对任一固定的$n$由$A_{n-1}\leqslant A_n$就可推出$A_n\leqslant A_{n+1}$。由(2)我们直接计算得

$$A_{n+1}-A_n=A_n+\frac{1}{2}(T-A_n^2)-A_{n-1}-\frac{1}{2}(T-A_{n-1}^2)$$

$$=(A_n-A_{n-1})\left[I-\frac{1}{2}(A_n+A_{n-1})\right].$$

其中$A_n-A_{n-1}\geqslant 0$（由假设），$[\cdots]\geqslant 0$（由(3)）。故由9.3-1知$A_{n+1}-A_n\geqslant 0$。

(5) 的证明

由(4)知，(A_n)是单调的，由(3)知$A_n\leqslant I$。故定理9.3-3蕴含存在有界自伴线性算子A使得$A_nx\to Ax$，对一切$x\in H$成立。因(A_nx)收敛，故(2)给出

$$A_{n+1}x-A_nx=\frac{1}{2}(Tx-A_n^2x)\to 0\qquad(n\to\infty).$$

因此对一切x，$Tx-A^2x=0$，即$T=A^2$。另由(4) $0=A_0\leqslant A_n$，故$A\geqslant 0$，即$\langle A_nx,\ x\rangle\geqslant 0$对每一$x\in H$成立，由内积的连续性(见3.2-2) 这就推出对每一$x\in H$有$\langle Ax,\ x\rangle\geqslant 0$。

(6) 的证明：

由课文中(3)式的前一行得知$ST=TS$蕴含$A_nS=SA_n$，即对一切$x\in H$有$A_nSx=SA_nx$。令$n\to\infty$，即得(6)。

(c) 唯一性。设A和B都是T的正平方根。则$A^2=B^2=T$。另外$BT=BB^2=B^2B=TB$，故由(6)知$AB=BA$。设$x\in H$是任意的，且$y=(A-B)x$，因$A\geqslant 0$和$B\geqslant 0$于是有$\langle Ay,\ y\rangle\geqslant 0$和$\langle By,\ y\rangle\geqslant 0$。利用$AB=BA$，$A^2=B^2$，得

$$\langle Ay,y\rangle+\langle By,y\rangle=\langle (A+B)y,y\rangle=\langle (A^2-B^2)x,y\rangle=0.$$

故$\langle Ay,y\rangle=\langle By,y\rangle=0$。因$A\geqslant 0$且$A$是自伴的，故其本身有一正平方根$C$，即$C^2=A$，而且$C$是自伴的。于是我们得出

$$0=\langle Ay,y\rangle=\langle C^2y,y\rangle=\langle Cy,Cy\rangle=\|Cy\|^2,$$

即$Cy=0$，故也有$Ay=C^2y=C(Cy)=0$。类似可证$By=0$。因而$(A-B)y=0$。利用$y=(A-B)x$，于是对一切$x\in H$我们有

$$\|Ax-Bx\|^2=\langle (A-B)^2x,x\rangle=\langle (A-B)y,x\rangle=0.$$

上式表明对一切$x\in H$有$Ax-Bx=0$，因而得证$A=B$。∎

平方根的应用我们将在9.8节中考虑，事实上，平方根在关于有界自伴线性算子的谱表示中起着基本的作用。

习　　题

1. 试求算子 $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 使得 $T^2=I$（恒等算子），并指出哪一个平方根是 I 的正平方根？

2. 设 $T:L^2[0,1]\to L^2[0,1]$ 由 $(Tx)(t)=tx(t)$ 定义（见3.1-5）。试证明 T 是自伴的和正的，并找出其正平方根。

3. 设 $T:l^2\to l^2$ 由 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)\mapsto(0, 0, \xi_3, \xi_4, \cdots)$ 定义。试问 T 有界吗？是自伴的吗？是正的吗？并求 T 之一平方根。

4. 试证明，对定理9.4-2中的平方根有

$$\|T^{1/2}\|=\|T\|^{1/2}.$$

5. 设 $T:H\to H$ 是复 Hilbert 空间上之一有界正自伴线性算子。利用 T 的正平方根，试证明对一切 $x,y\in H$ 有

$$|\langle Tx,y\rangle|\leqslant\langle Tx, x\rangle^{1/2}\langle Ty,y\rangle^{1/2}.$$

6. 注意到下面的事实是有趣的。第5题中的论断不用 $T^{1/2}$ 也可以被证明。试给出其证明（其类似于 Schwarz 不等式）。

7. 试证明第5题中对一切 $x\in H$ 有

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|^{1/2}\langle Tx,x\rangle^{1/2},$$

故 $\langle Tx, x\rangle=0$ 当而且仅当 $Tx=0$。

8. 设 B 是非奇异的 n-行实方阵，且 $C=BB^T$。试证 C 有一非奇异的正平方根 A。

9. 试证明 $D=A^{-1}B$，其中 A 和 B 在第8题中被给出，是一正交矩阵，（见3.10-2）。

10. 设 S，T 是复 Hilbert 空间 H 上的正有界的自伴线性算子，且 $S^2=T^2$。试证 $S=T$。

9.5 投影算子

投影算子 P，或简称投影 P 的概念已在3.3节中被定义，在

那里 Hilbert 空间H被表成一闭子空间Y和它的正交补$Y^{\perp}$的直和. 于是

(1)
$$H=Y\oplus Y^{\perp}$$
$$x=y+z \qquad (y\in Y,\ z\in Y^{\perp}).$$

因为是直接和, 故对任一给定的$x\in H$, y是唯一的. 于是(1)定义了一线性算子

(2)
$$P: H\to H$$
$$x\longmapsto y=Px.$$

P称为在H上的正交投影或**投影**. 更明确地说, P称为H到Y上的投影. 因此一线性算子P: $H\to H$ 是H上的投影, 如果存在H的一闭子空间Y, 使得Y是P的值域, $Y^{\perp}$是P的零空间, 而且$P|_Y$是Y上的恒等算子.

顺便我们注意到, (1)中的式子现在可以写成:

$$x=y+z=Px+(I-P)x.$$

上式表明H到$Y^{\perp}$上的投影为$I-P$.

还有其他刻划H上的投影的方法, 有时它也可用作为定义.

9.5-1 定理(投影) Hilbert 空间H上的有界线性算子P: $H\to H$是投影, 当而且仅当P是自伴的和幂等的 (即$P^2=P$).

证. (a) 设P是H上的投影, 并用Y表$P(H)$. 则$P^2=P$, 因为对每一$x\in H$和$Px=y\in Y$我们有

$$P^2x=Py=y=Px.$$

其次, 设$x_1=y_1+z_1$, $x_2=y_2+z_2$, 其中y_1, $y_2\in Y$, z_1, $z_2\in Y^{\perp}$. 因$Y\perp Y^{\perp}$, 于是$\langle y_1, z_2\rangle=\langle y_2, z_1\rangle=0$. 又$P$的自伴性由下式得知:

$$\langle Px_1, x_2\rangle=\langle y_1, y_2+z_2\rangle=\langle y_1, y_2\rangle$$
$$=\langle y_1+z_1, y_2\rangle=\langle x_1, Px_2\rangle.$$

(b) 反之, 设$P^2=P=P^*$, 并以Y表$P(H)$. 于是对每一

$x \in H$ 有

$$x = Px + (I-P)x.$$

$Y = P(H) \perp (I-P)(H)$ 的正交性由下式得知：

$$\langle Px, (I-P)v \rangle = \langle x, P(I-P)v \rangle = \langle x, Pv - P^2 v \rangle$$
$$= \langle x, 0 \rangle = 0.$$

Y 是 $(I-P)$ 的零空间 $N(I-P)$。事实上，$Y \subset \mathcal{N}(I-P)$ 由

$$(I-P)Px = Px - P^2 x = 0$$

可知；而 $Y \supset \mathcal{N}(I-P)$ 这只要注意到 $(I-P)x = 0$ 蕴含 $x = Px$ 即可得出。于是由2.7-10(b) Y 是闭的。最后我们指出 $P|_Y$ 是 Y 上的恒等算子，这是因为当记 $y = Px$ 时，我们有 $Py = P^2 x = Px = y$ 之故。▮

投影具有相当简单而明晰的性质（这正如我们即将看到的）。这就提示我们用这种简单的算子去表示 Hilbert 空间上较为复杂的线性算子。所得的表示称为算子的谱表示，因为我们将看到采用投影的目的在于与算子的谱发生联系。谱表示说明了投影的极大的重要性。

对有界自伴线性算子的谱表示将在 9.9 节得出。为了达到这一目的，第一步是要充分研究投影的一般性质。这就是本节和下一节的任务。第二步是要定义投影以适合我们的目的。所定义的投影是一单参数的投影族，称作为谱族（9.7 节）。在第三步中对给定的有界自伴线性算子 T 有唯一的谱族与之相对应(9.8节)。该谱族称为与 T 相关的谱族。为了得出 T 的所要求的谱表示，我们在9.9节将用到它。谱表示的推广在9.10节中讨论。在谱的不同点处谱族的性状在9.11节中考虑。这就是我们对本章其余各节所作的安排次序。

如上所述，我们现在开始讨论投影的基本性质。首先我们证明投影总是正算子。

9.5-2 定理（正性，范数） 对 Hilbert 空间H上的任一投影P，有

(3) $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$,

(4) $P \geqslant 0$

(5) $\|P\| \leqslant 1$; $\|P\| = 1$，如果$P(H) \neq \{0\}$.

证．(3)和(4)由下式得知

$$\langle Px, x\rangle = \langle P^2x, x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2 \geqslant 0.$$

由 Schwarz 不等式

$$\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leqslant \|Px\|\|x\|,$$

故对每一$x \neq 0$，$\|Px\|/\|x\| \leqslant 1$且$\|P\| \leqslant 1$．如果$x \in P(H)$且$x \neq 0$，则$\|Px\|/\|x\| = 1$．这就证明了(5)．■

投影的积不必为投影，不过我们有下面的一个基本的结果．

9.5-3 定理（投影的积） 关于 Hilbert 空间H上投影的积（复合），下面的两个论断成立：

(a) $P = P_1P_2$是H上的投影当而且仅当投影P_1和P_2是可交换的，即$P_1P_2 = P_2P_1$．若P为H上的投影则P把H投影到$Y = Y_1 \cap Y_2$上，这里$Y_j = P_j(H)$．

(b) H的两个闭子空间Y和V是正交的，当而且仅当对应的投影满足$P_YP_V = 0$．

证．(a) 设$P_1P_2 = P_2P_1$．则P是自伴的(由定理3.10-4)．P是幂等的，因为有

$$P^2 = (P_1P_2)(P_1P_2) = P_1^2P_2^2 = P_1P_2 = P.$$

因此由9.5-1，P是一投影，而且对每一$x \in H$有

$$Px = P_1(P_2x) = P_2(P_1x).$$

因P_1把H投影到Y_1上，故必有$P_1(P_2x) \in Y_1$．同理，$P_2(P_1x) \in Y_2$．两者一起得$Px \in Y_1 \cap Y_2$．因$x \in H$是任意的，这表明P把H投影到$Y = Y_1 \cap Y_2$内．不过实际上P是把H投影到Y上．事实上，若

$y\in Y$，则$y\in Y_1$，$y\in Y_2$而且

$$Py=P_1P_2y=P_1y=y.$$

反之，如果$P=P_1P_2$是定义在H上的投影，则由9.5-1，P是自伴的，另由定理3.10-4得出$P_1P_2=P_2P_1$。

(*b*) 如果$Y\perp V$，则$Y\cap V=\{0\}$且由(*a*)对一切$x\in H$有$P_YP_Vx=0$，故$P_YP_V=0$。

反之，如果$P_YP_V=0$，则对每一$y\in Y$和$v\in V$，有

$$\langle y, v\rangle=\langle P_Yy, P_Vv\rangle=\langle y, P_YP_Vv\rangle=\langle y, 0\rangle=0.$$

故$Y\perp V$. ∎

类似地，投影的和不必是一投影，不过我们有

9.5-4 定理(投影的和) 设P_1和P_2是 Hilbert 空间H上的投影。则

(*a*) 和$P=P_1+P_2$是H上的投影，当而且仅当$Y_1=P_1(H)$和$Y_2=P_2(H)$是正交的。

(*b*) 若$P=P_1+P_2$是一投影，则P把H投影到$Y=Y_1\oplus Y_2$上。

证. (*a*) 若$P=P_1+P_2$是一投影，由9.5-1，$P=P^2$。详细写出来，即得

$$P_1+P_2=(P_1+P_2)^2=P_1^2+P_1P_2+P_2P_1+P_2^2.$$

由9.5-1，右端中$P_1^2=P_1$，$P_2^2=P_2$，故有

$$P_1P_2+P_2P_1=0. \tag{6}$$

左乘以P_2，得

$$P_2P_1P_2+P_2P_1=0.$$

以P_2右乘上式得$2P_2P_1P_2=0$，故由（7），$P_2P_1=0$。再由9.5-3(*b*)，即得$Y_1\perp Y_2$。

反之，若$Y_1\perp Y_2$，则$P_1P_2=P_2P_1=0$（由9.5-3(*b*)）。这就得出(6)，从而推出$P^2=P$。因P_1和P_2是自伴的，故$P=P_1+P_2$也是自伴的。由9.5-1，故P是投影。

(b) 我们确定P投影于其上的闭子空间$Y\subset H$。因$P=P_1+P_2$，故对每一$x\in H$有

$$y=Px=P_1x+P_2x.$$

这里$P_1x\in Y_1$，$P_2x\in Y_2$。故$y\in Y_1\oplus Y_2$，从而$Y\subset Y_1\oplus Y_2$。

现证$Y\supset Y_1\oplus Y_2$。设$v\in Y_1\oplus Y_2$是任意的。则$v=y_1+y_2$，其中$y_1\in Y_1$，$y_2\in Y_2$。用P作用于前式的两端并引用$Y_1\perp Y_2$，得

$$Pv=P_1(y_1+y_2)+P_2(y_1+y_2)=P_1y_1+P_2y_2=y_1+y_2=v.$$

于是$v\in Y$且$Y\supset Y_1\oplus Y_2$。与前面另一包含式一起，得证$Y=Y_1\oplus Y_2$。∎

习　　题

1. 试证明 Hilbert 空间H上的投影P满足

$$0\leqslant P\leqslant I.$$

试问在什么条件下有(i)$P=0$，(ii)$P=I$？

2. 设$Q=S^{-1}PS$: $H\to H$，这里S和P是有界的和线性的。若P是一投影，S是酉算子。试证Q是一投影。

3. 试求一线性算子T: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$它是幂等但不是自伴的（故它们不是投影。见 9.5-1)。

4. 以$\mathbf{R}^3$中这样的投影P_1，P_2为例，使得P_1P_2既不是P_1也不是P_2，来说明定理9.5-3。

5. 试把定理9.5-4推广到和$P=P_1+\cdots+P_m$的情形。

6. 在第5题中，设$Y_j=P_j(H)$，$j=1,\cdots,m$，$Y=P(H)$。试证每一$x\in Y$有一表示

$$x=x_1+\cdots+x_m,\quad x_j=P_jx\in Y_j.$$

反之，若$x\in H$可以表为上之形式，则$x\in Y$，而且上述表示是唯一的。

7. 试给出一简单例子，说明两个投影的和不必是一投影。

8. 若投影P_j: $H\to H$（H为一 Hilbert 空间）的和$P_1+\cdots+P_k$是一投影。试证

$$\|P_1x\|^2+\cdots+\|P_kx\|^2\leqslant\|x\|^2.$$

9. 由本节的诸定理，如何才能得出Bessel 不等式（3.4节)。

10. 设P_1和P_2分别是Hilbert 空间H到Y_1和Y_2上的投影，而且$P_1P_2=$

P_2P_1。试证

$$P_1+P_2-P_1P_2$$

是一投影，即H到Y_1+Y_2的投影。

9.6 投影的进一步性质

让我们考虑投影的某些进一步的性质，这些性质在以后将需用，其理由已在前节开始时申述过了。

第一个定理涉及偏序关系。这一偏序关系由$P_1 \leqslant P_2$给出，它定义在一给定的 Hilbert 空间上的一切投影的集合上(见9.3节)。这一定理是以下三节之一基本工具。

9.6-1 定理(偏序) 设P_1，P_2是定义在 Hilbert 空间H上的投影。用$Y_1=P_1(H)$和$Y_2=P_2(H)$分别表P_1和P_2把H投影于其上的子空间，设$\mathcal{N}(P_1)$和$\mathcal{N}(P_2)$是这些投影的零空间。则下面的条件等价

(1) $P_2P_1=P_1P_2=P_1$,

(2) $Y_1 \subset Y_2$,

(3) $\mathcal{N}(P_1) \supset \mathcal{N}(P_2)$,

(4) 对一切$x \in H$，$\|P_1x\| \leqslant \|P_2x\|$,

(5) $P_1 \leqslant P_2$.

证. (1)⇒(4):

由 9.5-2 我们有$\|P_1\| \leqslant 1$，于是对一切$x \in H$有

$$\|P_1x\|=\|P_1P_2x\| \leqslant \|P_1\|\|P_2x\| \leqslant \|P_2x\|.$$

(4)⇒(5)

由9.5节中的(3)式及本定理的(4)式，对一切 $x \in H$我们有

$$\langle P_1x,\ x\rangle=\|P_1x\|^2 \leqslant \|P_2x\|^2=\langle P_2x,\ x\rangle,$$

由定义，这就证明了$P_1 \leqslant P_2$。

$(5) \Rightarrow (3)$：

设$x \in \mathcal{N}(P_2)$。则$P_2 x = 0$。由9.5节中的(3)式和本定理中的(5)式知

$$\|P_1 x\|^2 = \langle P_1 x, \ x\rangle \leqslant \langle P_2 x, \ x\rangle = 0.$$

于是有$P_1 x = 0$，$x \in \mathcal{N}(P_2)$，且$\mathcal{N}(P_1) \supset \mathcal{N}(P_2)$，因为$x \in \mathcal{N}(P_2)$是任意的。

$(3) \Rightarrow (2)$：

这是显然的，因为由引理3.3-5 $\mathcal{N}(P_j)$是Y_j在H中的正交补。

$(2) \Rightarrow (1)$：

对每一$x \in H$，我们有$P_1 x \in Y_1$。由(2)于是$P_1 x \in Y_2$，故$P_2(P_1 x) = P_1 x$，即$P_2 P_1 = P_1$。因为由9.5-1知P_1是自伴的，故定理3.10-4蕴含$P_1 = P_2 P_1 = P_1 P_2$。▮

投影的和我们已在前节中考虑过，现在我们转而讨论投影的差。这是刚证明的定理的第一个应用。

9.6-2 定理（投影的差） 设P_1和P_2是Hilbert空间H上的投影。则

(a) 差$P = P_2 - P_1$是H上的投影当而且仅当$Y_1 \subset Y_2$，这里$Y_j = P_j(H)$。

(b) 如果$P = P_2 - P_1$是一投影，P把H投影到Y上，这里Y是Y_1在Y_2中的正交补。

证．(a) 若$P = P_2 - P_1$是一投影，由9.5-1，$P = P^2$，写出来就是

$$P_2 - P_1 = (P_2 - P_1)^2 = P_2^2 - P_2 P_1 - P_1 P_2 + P_1^2.$$

由9.5-1，上式右端$P_2^2 = P_2$，$P_1^2 = P_1$。于是有

(6) $\quad P_1 P_2 + P_2 P_1 = 2P_1$.

对上式先左乘以P_2，然后右乘以P_2得

$$P_2P_1P_2+P_2P_1=2P_2P_1,$$
$$P_1P_2+P_2P_1P_2=2P_1P_2.$$

故$P_2P_1P_2=P_2P_1$，$P_2P_1P_2=P_1P_2$。由(6)得

(7) $$P_2P_1=P_1P_2=P_1.$$

于是$Y_1\subset Y_2$现由定理9.6-1得之。

反之，若$Y_1\subset Y_2$，则由定理9.6-1得出(7)，这就蕴含(6)，且得证P是幂等的。因P_1和P_2是自伴的，故$P=P_2-P_1$是自伴的，由9.5-1，P是投影。

(b) $Y=P(H)$由一切下之形式的向量所组成：

(8) $$y=Px=P_2x-P_1x,\quad x\in H.$$

因由(a)部分，$Y_1\subset Y_2$。故由(1)有$P_2P_1=P_1$，由(8)于是得出

$$P_2y=P_2^2x-P_2P_1x=P_2x-P_1x=y.$$

这表明$y\in Y_2$。另由(8)和(1)有

$$P_1y=P_1P_2x-P_1^2x=P_1x-P_1x=0.$$

上式表明$y\in\mathcal{N}(P_1)=Y_1^{\perp}$(见3.3-5)。与上面一起得$y\in V$，其中$V=Y_2\cap Y_1^{\perp}$。因$y\in Y$是任意的，故$Y\subset V$。

现证$Y\supset V$。因H到$Y_1^{\perp}$上的投影是$I-P_1$（见9.5节），故对每一$v\in V$有下之形式

(9) $$v=(I-P_1)y_2,\quad y_2\in Y_2.$$

再引用$P_2P_1=P_1$，因$P_2y_2=y_2$，故由(9)得

$$\begin{aligned}Pv&=(P_2-P_1)(I-P_1)y_2\\&=(P_2-P_2P_1-P_1+P_1^2)y_2\\&=y_2-P_1y_2=v.\end{aligned}$$

这就证明了$v\in Y$。因$v\in V$是任意的，故$Y\supset V$。与上面一起得证$Y=P(H)=V=Y_2\cap Y_1^{\perp}$。∎

由此定理及前面的定理，我们可以导出关于单调增的投影序列收敛性之一基本的结果。（类似的定理对单调减的投影序列亦

成立)。

9.6-3 **定理(单调增序列)** 设(P_n)是定义在一 Hilbert 空间H上的投影P_n的单调增的序列。则

(a) (P_n)是强算子收敛的,比如说,对每一$x\in H$,$P_nx\to Px$,而且极限算子P是定义在H上的投影。

(b) P把H投影到

$$P(H)=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n(H)}$$

上。

(c) P有零空间

$$\mathcal{N}(P)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{N}(P_n).$$

证。(a) 设$m<n$。由假定$P_m\leqslant P_n$,于是由9.6-1有$P_m(H)\subset P_n(H)$,又由9.6-2知P_n-P_m是投影。故对每一固定的$x\in H$,由9.5-2得

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad \|P_nx-P_mx\|^2&=\|(P_n-P_m)x\|^2\\
&=\langle(P_n-P_m)x,\ x\rangle\\
&=\langle P_nx,\ x\rangle-\langle P_mx,\ x\rangle\\
&=\|P_nx\|^2-\|P_mx\|^2.
\end{aligned}
$$

可是由9.5-2,$\|P_n\|\leqslant 1$,故对每一n,$\|P_nx\|\leqslant\|x\|$.因此$(\|P_nx\|)$是一有界的数值序列。因(P_n)是单调的,故由9.6-1知$(\|P_nx\|)$也是一单调数列。因而$(\|P_nx\|)$收敛。由此及(10)得知(P_nx)是一 Cauchy 列。因H是完备的,故(P_nx)收敛。极限依赖于x,比如说,$P_nx\to Px$。这就定义了H上之一算子P。P显然是线性的,因$P_nx\to Px$,且P_n是有界的,自伴的和幂等的,故P有同样的性质。于是由9.5-1,P是一投影。

(b) 我们确定$P(H)$。设$m<n$。于是$P_m\leqslant P_n$,即$P_n-P_m\geqslant$

0，由定义于是有$\langle (P_n-P_m)x,\ x\rangle \geqslant 0$。令$n\to\infty$，由内积的连续性（见3.2-2）即得$\langle (P-P_m)x,\ x\rangle\geqslant 0$，即$P_m\leqslant P$，再由9.6-1得知$P_m(H)\subset P(H)$对每一$m$成立。因而有

$$\bigcup P_m(H)\subset P(H).$$

其次，对每一m和对每一$x\in H$我们有

$$P_m x\in P_m(H)\subset \bigcup P_m(H).$$

因$P_m x\to Px$，故由1.4-6(a)得知$Px\in\overline{\bigcup P_m(H)}$。于是$P(H)\subset\overline{\bigcup P_m(H)}$。与上面一起得

$$\bigcup P_m(H)\subset P(H)\subset\overline{\bigcup P_m(H)}.$$

由3.3-5有$P(H)=\mathcal{N}(I-P)$，于是由2.7-10(b)，$P(H)$是闭的。这就证明了(b)。

(c) 我们决定$\mathcal{N}(P)$。引用引理3.3-5，对每一n有$\mathcal{N}(P)=P(H)^{\perp}\subset P_n(H)^{\perp}$。因为由(b)部分的证明知$P(H)\supset P_n(H)$，故有

$$\mathcal{N}(P)\subset\bigcap P_n(H)^{\perp}=\bigcap\mathcal{N}(P_n).$$

另一方面，如果$x\in\bigcap\mathcal{N}(P_n)$，则对每一$n$，$x\in\mathcal{N}(P_n)$。从而$P_n x=0$，而且$P_n x\to Px$蕴含$Px=0$，即$x\in\mathcal{N}(P)$。因$x\in\bigcap\mathcal{N}(P_n)$是任意的，故$\bigcap\mathcal{N}(P_n)\subset\mathcal{N}(P)$。与前面得出的一起，于是得出$\mathcal{N}(P)=\bigcap\mathcal{N}(P_n)$。∎

习　题

1. 用 Euclidean 空间$\mathbf{R}^3$中简单的投影的例子说明定理9.6-1中各种等价性的论断。

2. 试证明 Hilbert 空间H上两个投影的差$P=P_2-P_1$是H上的投影，当而且仅当$P_1\leqslant P_2$。

3. 为了更好地理解定理9.6-2，我们考察$H=\mathbf{R}^3$，并让P_2是到$\xi_1\xi_2$-平面上的投影，P_1是到$\xi_1\xi_2$-平面中的直线$\xi_2=\xi_1$上的投影。试描述Y_1，Y_2，$Y_1^{\perp}$，$Y_2^{\perp}$和Y_1在Y_2中的正交补。试决定$(P_2-P_1)x$的坐标，其中$x=$

(ξ_1, ξ_2, ξ_3). 试问P_1+P_2是一投影吗？

4. (投影的极限). 设 (P_n) 是定义在 Hilbert 空间H上的投影的序列，且$P_n \to P$. 试证明P是定义在H上的投影。

5. 设定理9.6-3中的$P_n(H)$对每一n是有限维的。试证明$P(H)$却可能是无限维的。

6. 设 (P_n) 是具极限P的强算子收敛序列，其中P_n是 Hilbert 空间H上的投影。设$P_n(H)$是无限维的。试用一例子证明，$P(H)$却可能是有限维的（我们应指出，这种非正则性以及第5题中的非正则性，在一致算子收敛的情形不可能发生）。

7. 在单调减的序列 (P_n) 的情形，定理9.6-3中的$P(H)$是什么？

8. 若Q_1, Q_2, …是 Hilbert 空间H上这样的投影，使得$Q_j(H) \perp Q_k(H)(j \neq k)$. 试证对每一$x \in H$ 级数

$$Qx = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j x$$

收敛（按H上的范数），而且Q是一投影。试问Q把H投影到H的什么子空间上？

9. (不变子空间). 设$T: H \to H$是一有界线性算子。则子空间$Y \subset H$称为对T是不变的，如果$T(Y) \subset Y$. 试证H之一闭子空间Y对T是不变的，当而且仅当$Y^{\perp}$对T^*是不变的。

10. (算子的约化). Hilbert 空间H之一闭子空间Y称为约化一线性算子$T: H \to H$，如果$T(Y) \subset Y$而且$T(Y^{\perp}) \subset Y^{\perp}$，即$Y$和$Y^{\perp}$都对$T$是不变的。（求出约化算子$T$的闭子空间$Y$其意义在于关于$T$的研究就可以简化为分别考虑$T|_Y$和$T|_{Y^{\perp}}$.）若$P_1$是$H$到$Y$上的投影，且$P_1T = TP_1$. 试证$Y$约化$T$.

11. 在第10题中若 $\dim H < \infty$，且Y约化T，那么关于表示T的矩阵我们能说明些什么？

12. 试证明第10题中的逆论断，即若Y约化T，则$P_1T = TP_1$.

13. 在第10题中若Y约化T，试证明$TP_2 = P_2T$，其中P_2是H到$Y^{\perp}$上的投影。

14. 设 (e_k) 是一可分 Hilbert 空间H中之一完全的规格正交序列。设$T: H \to H$是这样的线性算子，它在e_k上定义为$Te_k = e_{k+1}$, $k=1, 2, \cdots$，然后连续地扩张到H上。设Y_n是 Span$\{e_n, e_{n+1}, \cdots\}$的闭包，这里$n>1$. 试证T不是自伴的，并用两种方法证明Y_n不约化T: (a)用第12题；(b)给出直接的证明。

15. 设$T:H\to H$是一 Hilbert 空间H上的有界线性算子，设Y是H之一闭子空间使得$T(Y)\subset Y$。若T是自伴的，试证$T(Y^{\perp})\subset Y^{\perp}$，因此，此时$Y$约化$T$。（注意第14题中的T不是自伴的。）

9.7 谱　　族

为了得到关于那些较为复杂的算子的信息，从 9.5 节使我们想起，我们现在的任务就是要用非常简单的算子（投影）（其性质我们易于研究）表示 Hilbert 空间上的有界自伴线性算子。这种表示称为所考察算子的谱表示。当其给定一有界自伴线性算子$T:H\to H$时，借用一适当的投影族（称之为关于T的谱族）即得到T之一谱表示。在本节中我们将引出和定义一般形式的谱族概念，即不涉及所给定的算子T。与一给定的算子T相联系的适当的谱族我们将在下节单独讨论，而在 9.9 节我们得出了T的谱表示。

谱族的引入可由下面的有限维情形得到启发。设$T:H\to H$是酉空间$H=C^n$（见3.10-2）上的自伴线性算子。则T是有界的（由2.7-8），而且我们可以取H之一基，并用 Hermitian 矩阵表示T，为简单计，该矩阵我们仍用T记之。算子的谱由该矩阵的固有值组成（见7.1节，7.2节），而且由9.1-1知它是实的。为简单起见，设矩阵T有n个不同的固有值$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$。于是定理9.1-1(b)蕴含$T$有一由$n$个固有向量

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

组成的规格正交集，其中x_j对应于λ_j，为方便起见我们把这些向量写成列向量，这是H之一基，故每一$x\in H$有唯一的表示

$$(1)\qquad x=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j x_j, \qquad \gamma_j=\langle x, x_j\rangle=x^T\bar{x}_j.$$

在(1)中，由第一式取内积$\langle x, x_k\rangle$，这里 x_k 是固定的，并利用正交性即得第二式。在(1)中本质的事实是 x_j 为T的固有向量，故有 $Tx_j=\lambda_j x_j$。因此，如果我们把T作用于(1)式，即得

$$(2)\qquad Tx=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma_j x_j.$$

于是尽管T可能以很复杂的方式作用于 x，但它却以非常简单的方式作用在(1)式右端的和的每一项上。这也说明在有关研究$H=\mathbf{C}^m$上的线性算子理论中使用固有向量的巨大优越性。

稍加仔细地考察(1)即可看出，我们可以定义一算子

$$(3)\qquad \begin{aligned} P_j&:H\to H,\\ x&\mapsto \gamma_j x_j. \end{aligned}$$

显然，P_j是H到T的对应于λ_j的固有空间上的投影（正交投影）。公式(1)现在可以写成

$$(4)\qquad x=\sum_{j=1}^{n}P_j x,\quad 故\quad I=\sum_{j=1}^{n}P_j,$$

这里 I 是H上的恒等算子。公式(2)变成

$$(5)\qquad Tx=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_j x,\ 故\quad T=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_j.$$

这就是T按照投影的表示。它表明T的谱可用以得到T的用非常简单的算子表示的表达式（即(5)式）.

利用投影 P_j 看来非常自然，而且从几何上看也非常直观.遗憾地是，这一公式不适宜直接推广到无限维的Hilbert空间。因为，如所周知，在这种情形，有界自伴线性算子的谱可能比较复杂。现在我们叙述另外的方法，这一方法虽然不够直观，但有一个很大的优点，就是它可以推广到无限维情形。

代替投影 $P_1,\cdots,P_n$ 本身，而取这些投影的和。更确切地

说，对任意实数 λ，我们定义

$$(6)\qquad E_\lambda=\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}P_j\qquad(\lambda\in\mathbf{R}).$$

这是一单参数的投影族，λ 为参数．从(6)式看出，对任一 λ，算子E_λ是H到子空间V_λ上的投影，V_λ是由一切这样的x_j，$\lambda_j\leqslant\lambda$所生成的子空间．于是得知

$$V_\lambda\subset V_\mu\quad(\lambda\leqslant\mu).$$

粗略地说，当 λ 按正向遍历R，E_λ从 0 增到 I．增长发生在T的固有值处，而当 λ 在任意无固有值的区间中时，E_λ保持不变．于是我们看出 E_λ有下面的性质：

$$E_\lambda E_\mu=E_\mu E_\lambda=E_\lambda,\qquad 当\ \lambda<\mu,$$

$$E_\lambda=0,\qquad 当\ \lambda<\lambda_1,$$

$$E_\lambda=I,\qquad 当\ \lambda\geqslant\lambda_n,$$

$$E_{\lambda+0}=\lim_{\mu\to\lambda+0}E_\mu=E_\lambda,$$

这里 $\mu\to\lambda+0$ 意指让 μ 从右方趋近 λ．这就提示了下面的定义．

9.7-1 定义（谱族或单位分解） 一实谱族(或实单位分解)是一单参数投影 E_λ 的族 $\mathscr{E}=(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$，$E_\lambda$ 定义于任意维的 Hilbert 空间H上，其依赖于一实参数 λ 并使得

$$(7)\qquad E_\lambda\leqslant E_\mu,\ 故E_\lambda E_\mu=E_\mu E_\lambda=E_\lambda\qquad(\lambda<\mu),$$

$$(8a)\qquad \lim_{\lambda\to-\infty}E_\lambda x=0,$$

$$(8b)\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}E_\lambda x=x,$$

$$(9)\qquad E_{\lambda+0}x=\lim_{\mu\to\lambda+0}E_\mu x=E_\lambda x\qquad(x\in H).$$ ∎

由这一定义看出，一实谱族可以当作一映象

$$\mathbf{R}\to B(H,\ H),$$

$$\lambda \longmapsto E_\lambda;$$

对每一 $\lambda\in\mathbf{R}$ 对应一投影 $E_\lambda\in B(H,H)$，这里 $B(H,H)$ 是 H 到 H 的一切有界线性算子的空间。

注意(7)中的两个条件是等价的（由9.6-1）。

$\mathscr{E}$ 称为**区间**$[a, b]$**上的谱族**，如果

(8*)　　当 $\lambda<a$ 时 $E_\lambda=0$，当 $\lambda\geqslant b$ 时 $E_\lambda=I$。

这种谱族对我们来说特别有兴趣，因为有界自伴线性算子的谱位于实直线上之一有限区间内。注意(8*)蕴含(8)。

在(9)中，$\mu\to\lambda+0$ 表示在极限过程中我们考察的仅仅是值 $\mu>\lambda$，而(9)意味着 $\lambda\longmapsto E_\lambda$ 是强算子右连续。其实，左连续性作起来也完全一样。不过我们可能甚至完全不加上这种条件，不然在讨论中要涉及 $E_{\lambda+0}$ 和 $E_{\lambda-0}$，这就会带来不必要的麻烦。

以后我们将看出（在下两节），对任一 Hilbert 空间上任意给定的有界自伴线性算子 T，可以有一谱族与之相联系，利用该谱族表 T 为一 Riemann-Stieltjes 积分。这就是前面提及的著名的**谱表示**。

其次，我们还将看出，在本节开始时所考虑的有限维情形，前述的积分表示就化为一有限和，即化为用谱族(6)表示出来的式(5)。现在让我们指出怎样才能用(6)来表示(5)。如前，为简单起见，我们假定 T 的固有值都是不同的，且 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$。于是有

$$\begin{aligned}
&E_{\lambda_1}=P_1,\\
&E_{\lambda_2}=P_1+P_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&E_{\lambda_n}=P_1+P_2+\cdots+P_n.
\end{aligned}$$

反过来，于是有

$$\begin{aligned}
&P_1=E_{\lambda_1},\\
&P_j=E_{\lambda_j}-E_{\lambda_{j-1}},\quad j=2,\cdots,n.
\end{aligned}$$

因为 E_λ 当 λ 在区间 $(\lambda_{j-1}, \lambda_j)$ 上时保持不变，故上式可以写成

$$P_j = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0}.$$

(4)现在变成

$$x = \sum_{j=1}^{n} P_j x = \sum_{j=1}^{n} (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0}) x,$$

而(5)变成

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0}) x.$$

当我们去掉x，且记

$$\delta E_\lambda = E_\lambda - E_{\lambda - 0}$$

则得

$$T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta E_{\lambda_j}. \tag{10}$$

这就是 n-维 Hilbert 空间 H 上具固有值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ 的自伴线性算子T的谱表示。这一表示表明对任意的x，$y \in H$，有

$$\langle Tx, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \delta E_{\lambda_j} x, y \rangle. \tag{11}$$

我们注意上式可以写作为一 Riemann-Stieltjes 积分

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dw(\lambda), \tag{12}$$

其中 $w(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle$。

我们现在的讨论是就有限维空间上的自伴线性算子而作出的。它也为下节考虑任意 Hilbert 空间情形铺平了道路。与本节有关的一套习题包含在下节末。

9.8 有界自伴线性算子的谱族

对复 Hilbert 空间H上给定的有界自伴线性算子$T:H\to H$相应的有一谱族$\mathscr{E}$，使得$\mathscr{E}$可用于T的谱表示（在下节中得出）。

为了定义$\mathscr{E}$我们需要算子

(1) $$T_\lambda=T-\lambda I.$$

$T_\lambda{}^2$的正平方根，我们以B_λ记之①，于是

(2) $$B_\lambda=(T_\lambda^2)^{1/2}$$

以及算子

(3) $$T_\lambda^+=\frac{1}{2}(B_\lambda+T_\lambda).$$

它称作T_λ的**正部**。

T的**谱族**$\mathscr{E}$于是被定义为$\mathscr{E}=(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$，其中$E_\lambda$是$H$到$T_\lambda{}^+$的零空间$\mathcal{N}(T_\lambda^+)$上的投影。

本节剩下的任务就是证明$\mathscr{E}$确实是一谱族，即具有在定义9.7-1中刻划谱族的全部性质。这就要求我们有一定的耐心不过这种耐心终将由我们证明的事实而获得报偿，所证明的事实为导出下节中的谱表示创造了一个基本的工具（下面的不等式(18)）。

我们一步一步地进行证明，现在首先考虑算子

$$B=(T^2)^{1/2}\ (T^2\text{的正平方根}),$$

$$T^+=\frac{1}{2}(B+T)\ (T\text{的正部}),$$

$$T^-=\frac{1}{2}(B-T)\ (T\text{的负部}),$$

以及H到T^+的零空间上的投影，我们以E记之，即

---

① B_λ另外的记号（它也用于文献中）是$|T_\lambda|$。

$$E: H \to Y = \mathcal{N}(T^+).$$

前两式相减和相加即可看出

(4) $$T = T^+ - T^-,$$

(5) $$B = T^+ + T^-.$$

而且我们有下面的结果.

9.8-1 引理（与T有关的算子） 刚才定义的算子有下面的性质:

(a) B, T^+和T^-是有界和自伴的.

(b) B, T^+和T^-同每个与T可交换的有界线性算子可交换; 特别有

(6) $$BT = TB, \quad T^+T = TT^+, \quad T^-T = TT^-,$$
$$T^+T^- = T^-T^+.$$

(c) E同每个与T可交换的有界自伴线性算子可交换; 特别有

(7) $$ET = TE, \qquad EB = BE.$$

(d) 其次

(8) $$T^+T^- = 0, \qquad T^-T^+ = 0,$$

(9) $$T^+E = ET^+ = 0, \quad T^-E = ET^- = T^-,$$

(10) $$TE = -T^- \qquad T(I - E) = T^+,$$

(11) $$T^+ \geqslant 0, \qquad T^- \geqslant 0.$$

证. (a)是显然的, 因为T和B是有界自伴的.

(b) 设 $TS = ST$. 于是 $T^2S = TST = ST^2$, 又 $BS = SB$ 由定理 9.4-2 应用于T^2得出. 因此

$$T^+S = \frac{1}{2}(BS + TS) = \frac{1}{2}(SB + ST) = ST^+.$$

$T^-S = ST^-$的证明是类似的.

(c) 对每一$x \in H$有 $y = Ex \in Y = \mathcal{N}(T^+)$. 故 $T^+y = 0$ 且

$ST^+y=S0=0$. 由 $TS=ST$ 和 (b) 有 $ST^+=T^+S$, 且

$$T^+SEx=T^+Sy=ST^+y=0.$$

因此 $SEx\in Y$. 因 E 映 H 到 Y 上, 于是对每一 $x\in H$ 有 $ESEx=SEx$, 即 $ESE=SE$. 由9.5-1知投影是自伴的, 故由假定 S 也是自伴的. 利用3.9节的(6g), 得知

$$ES=E^*S^*=(SE)^*=(ESE)^*=E^*S^*E^*=ESE=SE.$$

(d) 现证(8)-(11).

(8)的证明:

由 $B=(T^2)^{1/2}$, 我们有 $B^2=T^2$. 由(6)也有 $BT=TB$. 故再由(6), 有

$$T^+T^-=T^-T^+=\frac{1}{2}(B-T)\frac{1}{2}(B+T)$$

$$=\frac{1}{4}(B^2+BT-TB-T^2)=0.$$

(9)的证明:

由定义, $Ex\in\mathcal{N}(T^+)$, 故对一切 $x\in H$, $T^+Ex=0$. 因 T^+ 是自伴的, 由(6)和 (c) 有 $ET^+x=T^+Ex=0$, 即 $ET^+=T^+E=0$.

其次, 由(8)有 $T^+T^-x=0$, 故 $T^-x\in\mathcal{N}(T^+)$. 因此, $ET^-x=T^-x$. 因 T^- 是自伴的, 故对一切 $x\in H$, (c) 给出 $T^-Ex=ET^-x=T^-x$, 即 $T^-E=ET^-=T^-$.

(10)的证明:

由(4)和(9)有 $TE=(T^+-T^-)E=-T^-$. 由此并再由(4)有

$$T(I-E)=T-TE=T+T^-=T^+.$$

(11)的证明

根据(9), (5)和定理9.3-1有

$$T^-=ET^-+ET^+=E(T^-+T^+)=EB\geqslant 0.$$

因 E 和 B 是自伴和可交换的, 故由9.5-2, $E\geqslant 0$; 又由定义有 $B\geqslant 0$. 类似地, 再由定理9.3-1

$$T^+=B-T^-=B-EB=(I-E)B\geqslant 0.$$

(因为由9.5-2，$I-E\geqslant 0$)。∎

以上是第一步。在第二步中代替T而考虑$T_\lambda=T-\lambda I$。代替B，T^+，T^-和E，而现在必须取$B_\lambda=(T_\lambda^2)^{1/2}$[见(2)]，及由下面的式子定义的$T_\lambda$的正部和负部[见(3)]

$$T_\lambda^+=\frac{1}{2}(B_\lambda+T_\lambda)$$

$$T_\lambda^-=\frac{1}{2}(B_\lambda-T_\lambda),$$

以及H到T_λ^+的零空间$Y_\lambda=\mathcal{N}(T_\lambda^+)$上的投影

$$E_\lambda:H\to Y_\lambda=\mathcal{N}(T_\lambda^+).$$

于是我们有下面的结果：

9.8-2 引理(与T_λ有关的算子) 前一引理仍然成立，如果我们分别代

$$T,\ B,\ T^+,\ T^-,\ E\ 以\ T_\lambda,\ B_\lambda,\ T_\lambda^+,\ T_\lambda^-,\ E_\lambda,$$

其中λ是实数。而且对任一实数$\kappa,\lambda,\mu,\nu,\tau$下面的算子彼此可交换：

$$T_\kappa,\ B_\lambda,\ T_\mu^+,\ T_\nu^-,\ E_\tau.$$

证. 第一个论断是显然的。为了得出第二个论断，我们注意$IS=SI$，而且

$$T_\lambda=T-\lambda I=T-\mu I+(\mu-\lambda)I=T_\mu+(\mu-\lambda)I. \tag{12}$$

故

$$ST=TS\Rightarrow ST_\mu=T_\mu S\Rightarrow ST_\lambda=T_\lambda S\Rightarrow SB_\lambda=B_\lambda S,$$

$$SB_\mu=B_\mu S$$

等等。当$S=T_\kappa$，上式给出$T_\kappa B_\lambda=B_\lambda T_\kappa$，等等。∎

借助于这些准备，现在我们可以证明，对给定的有界自伴线性算子T，可以按唯一的方式定义一谱族$\mathscr{E}=(E_\lambda)$，这正如下述

定理所阐述的。这一$\mathscr{E}$称为关于算子T的谱族。在下一节中我们将看到，可以利用$\mathscr{E}$得出T的所要求的谱表示，从而达到我们的目的。

9.8-3 定理(关于算子的谱族) 设$T: H\to H$是复 Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子。再设E_λ（λ是实数）是H到$T_\lambda=T-\lambda I$的正部T_λ^+的零空间$Y_\lambda=\mathcal{N}(T_\lambda^+)$上的投影，则$\mathscr{E}=(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$是区间$[m, M]\subset\mathbf{R}$上的谱族，这里$m$和$M$由9.2节中(1)式给出。

证. 我们将证明

(13) $$\lambda<\mu\Rightarrow E_\lambda\leqslant E_\mu,$$

(14) $$\lambda<m\Rightarrow E_\lambda=0,$$

(15) $$\lambda\geqslant M\Rightarrow E_\lambda=I,$$

(16) $$\mu\to\lambda+0\Rightarrow E_\mu x\to E_\lambda x.$$

在证明中，我们用到引理9.8-1的部分其中需用$T_\lambda, T_\mu, T_\lambda^+$等代替$T, T^+$等，即

(8*) $$T_\mu^+T_\mu^-=0,$$

(10*) $$T_\lambda E_\lambda=-T_\lambda^-,\ T_\lambda(I-E_\lambda)=T_\lambda^+,\ T_\mu E_\mu=-T_\mu^-.$$

(11*) $$T_\lambda^+\geqslant 0,\ T_\lambda^-\geqslant 0,\ T_\mu^+\geqslant 0,\ T_\mu^-\geqslant 0.$$

(13)的证明：

设$\lambda<\mu$。因为由(11*)，$-T^-\leqslant 0$，故有$T_\lambda=T_\lambda^+-T_\lambda^-\leqslant T_\lambda^+$。因此

$$T_\lambda^+-T_\mu\geqslant T_\lambda-T_\mu=(\mu-\lambda)I\geqslant 0.$$

由 9.8-2，$T_\lambda^+-T_\mu$是自伴的且与T_μ^+可交换，又由(11*)$T_\mu^+\geqslant 0$。于是定理 9.3-1 蕴含

$$T_\mu^+(T_\lambda^+-T_\mu)=T_\mu^+(T_\lambda^+-T_\mu^++T_\mu^-)\geqslant 0.$$

这里由(8*)，$T_\mu^+T_\mu^-=0$。因此$T_\mu^+T_\lambda^+\geqslant T_\mu^{+2}$，即对一切$x\in H$有

$$\langle T_\mu^+T_\lambda^+x,\ x\rangle\geqslant\langle T_\mu^{+2}x,\ x\rangle=\|T_\mu^+x\|^2\geqslant 0.$$

上式表明$T_\lambda^+x=0$蕴含$T_\mu^+x=0$。因此$\mathcal{N}(T_\lambda^+)\subset\mathcal{N}(T_\mu^+)$，于是由

9.6-1 有$E_\lambda \leqslant E_\mu$。这里$\lambda<\mu$。

(14)的证明。

设$\lambda<m$，不过假定仍有$E_\lambda \neq 0$. 于是对某一z，$E_\lambda z\neq 0$。令$x=E_\lambda z$，则$E_\lambda x=E_\lambda^2 x=E_\lambda z=x$，不失一般性，我们可以假定$\|x\|=1$。即得

$$\begin{aligned}\langle T_\lambda E_\lambda^x, x\rangle &= \langle T_\lambda x, x\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle-\lambda \\ &\geqslant \inf_{\|\tilde{x}\|=1} \langle T\tilde{x}, \tilde{x}\rangle-\lambda \\ &= m-\lambda>0.\end{aligned}$$

这与$T_\lambda E_\lambda=-T_\lambda^-\leqslant 0$矛盾，该式由(10*)和(11*)得之。

(15)的证明。

设$\lambda>M$而$E_\lambda\neq I$，因此$I-E_\lambda\neq 0$。于是对某一x，其范数$\|x\|=1$，有$(I-E_\lambda)x=x$。从而有

$$\begin{aligned}\langle T_\lambda(I-E_\lambda)x, x\rangle &= \langle T_\lambda x, x\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle-\lambda \\ &\leqslant \sup_{\|\tilde{x}\|=1} \langle T\tilde{x}, \tilde{x}\rangle-\lambda \\ &= M-\lambda<0.\end{aligned}$$

这与$T_\lambda(I-E_\lambda)=T_\lambda^+\geqslant 0$矛盾，而该式由(10*)和(11*)得之。另外$E_M=I$现由右连续性得证。

(16)的证明

对一区间$\Delta=(\lambda, \mu]$我们有下面的算子与之相对应：

$$E(\Delta)=E_\mu-E_\lambda.$$

因$\lambda<\mu$，由(13)有$E_\lambda\leqslant E_\mu$，故由9.6-1，$E_\lambda(H)\subset E_\mu(H)$；又由9.6-2知$E(\Delta)$是一投影。由9.5-2也有$E(\Delta)\geqslant 0$。再由9.6-1，有

$$\begin{aligned}&E_\mu E(\Delta)=E_\mu^2-E_\mu E_\lambda=E_\mu-E_\lambda=E(\Delta),\\ &(I-E_\lambda)E(\Delta)=E(\Delta)-E_\lambda(E_\mu-E_\lambda)=E(\Delta).\end{aligned} \tag{17}$$

因 $E(\Delta)$, T_μ^-和T_λ^+ 都是正的[见(11*)], 另由 9.8-2 知它们还是可交换的, 故由 9.3-1, $T_\mu^- E(\Delta)$与$T_\lambda^+ E(\Delta)$的积是正的, 因此, 由(17)和(10*)

$$T_\mu E(\Delta)=T_\mu E_\mu E(\Delta)=-T_\mu^- E(\Delta)\leqslant 0,$$

$$T_\lambda E(\Delta)=T_\lambda(I-E_\lambda)E(\Delta)=T_\lambda^+ E(\Delta)\geqslant 0.$$

这就分别蕴含$TE(\Delta)\leqslant \mu E(\Delta)$ 和 $TE(\Delta)\geqslant \lambda E(\Delta)$. 与上面的一起得

$$(18)\qquad \lambda E(\Delta)\leqslant TE(\Delta)\leqslant \mu E(\Delta),\ E(\Delta)=E_\mu-E_\lambda.$$

这是一重要的不等式, 在下节以及在 9.11 节中我们都将需用它.

我们保持 λ 不动, 让 μ 从右边单调地趋近于 λ. 根据类比于定理 9.3-3 的关于减序列的定理, 于是有 $E(\Delta)x\to P(\lambda)x$. 这里 $P(\lambda)$是有界和自伴的. 因$E(\Delta)$是幂等的, 故 $P(\lambda)$ 亦然, 因此 $P(\lambda)$是一投影. 由(18)还有 $\lambda P(\lambda)=TP(\lambda)$, 即 $T_\lambda P(\lambda)=0$. 由前式, 和(10*)以及(9.8-2)有

$$T_\lambda^+ P(\lambda)=T_\lambda(I-E_\lambda)P(\lambda)=(I-E_\lambda)T_\lambda P(\lambda)=0.$$

故对一切 $x\in H$, $T_\lambda^+ P(\lambda)x=0$. 这就表明$P(\lambda)x\in\mathcal{N}(T_\lambda^+)$.根据定义, E_λ把H投影到$\mathcal{N}(T_\lambda^+)$上. 因而, 我们有 $E_\lambda P(\lambda)x=P(\lambda)x$, 即 $E_\lambda P(\lambda)=P(\lambda)$. 另一方面, 如果在(17)中我们让 $\mu\to\lambda+0$ 则有

$$(I-E_\lambda)P(\lambda)=P(\lambda).$$

与前面所得结果一起, 即得 $P(\lambda)=0$. 当记住 $E(\Delta)x\to P(\lambda)x$ 时, 即得证(16). 即 $\mathscr{E}$ 是右连续的.

这就证明了定理中所给定的 $\mathscr{E}=(E_\lambda)$是$[m, M]$上的谱族.

习 题

1. 在某些情形，谱族的左连续性比右连续性更为方便（甚至在某些书中就按左连续来表述定义）。不过为了看出我们这里没有太大差别，试从定义9.7-1中的E_λ得出一F_λ是左连续的。

2. 设E_λ满足定义9.7-1中除(9)以外的全部条件。试求出一$\tilde{E}_\lambda$它满足前述的所有条件其中包括(9)。

3. 证明$T^-T=TT^-$[见(6)]。

4. 设

$$T=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

试求T^+，T^-，$(T^2)^{1/2}$和T^2的其他的平方根。

5. 如果在有限维情形，一线性算子由一实对角矩阵$\tilde{T}$所表示。试问T的谱是什么？我们如何从$\tilde{T}$得出矩阵$(a)\tilde{T}^+$（表示T^+），$(b)\tilde{T}^-$（表示T^-），(c) $\tilde{B}$（表示B）？

6. 在第5题中，我们怎样才能得到表示H到(a) $\mathcal{N}(T^+)$上，(b) $\mathcal{N}(T_\lambda^+)$上的投影的矩阵？

7. 试由第5题中的$\tilde{T}$得出表示$(a)T_\lambda$，$(b)T_\lambda^+$，$(c)T_\lambda^-$，$(d)B_\lambda$的矩阵。

8. 试证明，如果一有界自伴线性算子$T:H\to H$是正的，则$T=T^+$，和$T^-=0$。

9. 试求零算子$T=0$：$H\to H$的谱族，其中$H\neq\{0\}$。

10. 设$T=I$：$H\to H$。试求$B_\lambda=(T_\lambda^2)^{1/2}$，$T_\lambda^+$，$\mathcal{N}(T_\lambda^+)$和$E_\lambda$。

9.9 有界自伴线性算子的谱表示

从前节我们已经知道，对复 Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子T有一谱族$\mathscr{E}=(E_\lambda)$与之相对应。现在我们要证明$\mathscr{E}$可用以得出T的谱表示；谱表示是下面的积分表达式(1)，它包含$\mathscr{E}$，并使得$\langle Tx,\ y\rangle$可用一通常的 Riemann-Stieltjes 积分表出

(见4.4节)。

定理中出现的符号 $m-0$ 将在定理末和证明前加以解释。

9.9-1 有界自伴线性算子的谱定理 设 $T:H\to H$ 是复 Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子。则：

(a) T有谱表示

(1) $$T=\int_{m-0}^{M}\lambda dE_\lambda,$$

其中 $\mathscr{E}=(E_\lambda)$ 是关于T的谱族(见 9.8-3)；积分按一致算子收敛意义下来理解[即按 $B(H,H)$ 中范数收敛]，而且对一切 $x,\ y\in H$有

(1*) $$\langle Tx,y\rangle=\int_{m-0}^{M}\lambda dw(\lambda),\quad w(\lambda)=\langle E_\lambda x,\ y\rangle,$$

这里积分是一通常的 Riemann-Stieltjes 积分(4.4节)

(b) 更一般地，如果 p 是λ的实系数的多项式，比如说，

$$p(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_0,$$

则由下式定义的算子 $p(T)$：

$$p(T)=\alpha_nT^n+\alpha_{n-1}T^{n-1}+\cdots+\alpha_0I$$

有谱表示

(2) $$p(T)=\int_{m-0}^{M}p(\lambda)dE_\lambda,$$

而且对一切 $x,\ y\in H$ 有

(2*) $$\langle p(T)x,\ y\rangle=\int_{m-0}^{M}p(\lambda)dw(\lambda),\ w(\lambda)=\langle E_\lambda x,\ y\rangle.$$

(推广到连续函数，见后面的定理9.10-1)

注. 写成 $m-0$ 是为了指出我们必须考虑在 $\lambda=m$ 处的基值，它当 $E_m\neq 0$ (且 $m\neq 0$) 时就会发生；于是用任一 $a<m$，我们可以写出

$$\int_a^M \lambda dE_\lambda=\int_{m-0}^M \lambda dE_\lambda=mE_m+\int_m^M \lambda dE_\lambda.$$

类似地，有

$$\int_a^M p(\lambda)dE_\lambda=\int_{m-0}^M p(\lambda)dE_\lambda=p(m)E_m+\int_m^M p(\lambda)dE_\lambda.$$

定理9.9-1的证明.

(a) 取$(a, b]$的一分划序列$(\mathscr{P}_n)$，这里$a<m$，$M<b$；其中每一$\mathscr{P}_n$是把$(a, b]$分为一些长度为$l(\Delta_{nj})=\mu_{nj}-\lambda_{nj}$的小区间

$$\Delta_{nj}=(\lambda_{nj}, \mu_{nj}], \quad j=1, 2, \cdots, n$$

的分划，注意当$j=1, \cdots, n-1$时$\mu_{nj}=\lambda_{n,j+1}$. 假定序列$(\mathscr{P}_n)$是这样的，使得

$$\eta(\mathscr{P}_n)=\max_j l(\Delta_{nj})\to 0 \quad (n\to\infty). \tag{3}$$

利用9.8节中的(18)式，其中$\Delta=\Delta_{nj}$，即

$$\lambda_{nj}E(\Delta_{nj})\leqslant TE(\Delta_{nj})\leqslant\mu_{nj}E(\Delta_{nj}).$$

对j从1到n作和，对每一n，得

$$\sum_{j=1}^n\lambda_{nj}E(\Delta_{nj})\leqslant\sum_{j=1}^n TE(\Delta_{nj})\leqslant\sum_{j=1}^n\mu_{nj}E(\Delta_{nj}). \tag{4}$$

因$\mu_{nj}=\lambda_{n,j+1}$，$j=1, \cdots, n-1$，利用9.8节中的(14)和(15)易于得出

$$T\sum_{j=1}^n E(\Delta_{nj})=T\sum_{j=1}^n(E_{\mu_{nj}}-E_{\lambda_{nj}})=T(I-0)=T.$$

公式(3)蕴含对每一$\varepsilon>0$，存在n使得$\eta(\mathscr{P}_n)<\varepsilon$；因此在(4)中有

$$\sum_{j=1}^n\mu_{nj}E(\Delta_{nj})-\sum_{j=1}^n\lambda_{nj}E(\Delta_{nj})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\mu_{nj}-\lambda_{nj})E(\Delta_{nj})<\varepsilon I.$$

由上式及(4)得：任给 $\varepsilon>0$，存在一N使得对每一$n>N$，和每一选取的$\hat{\lambda}_{nj}\in\Delta_{nj}$，有

$$(5)\qquad \left\| T-\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_{nj}E(\Delta_{nj})\right\|<\varepsilon.$$

因为当$\lambda<m$和$\lambda\geqslant M$时E_λ是不变的，故$a<m$和$b>M$的特别选择是无关紧要的。这就证明了(1)，其中(5)式表明，积分应按一致算子收敛意义下来理解，因而蕴含强算子收敛(见4.9节)，内积是连续的，且(5)中的和是 Stieltjes 型的。故对H中任意选取的x和y，(1)蕴含(1*)。

(b) 现对多项式证明此定理，我们从$p(\lambda)=\lambda^r$着手，这里$r\in N$。对任意的$\kappa<\lambda\leqslant\mu<\nu$，由9.7节中的(7)式，我们有

$$\begin{aligned}(E_\lambda-E_\kappa)(E_\mu-E_\nu)&=E_\lambda E_\mu-E_\lambda E_\nu-E_\kappa E_\mu+E_\kappa E_\nu\\&=E_\lambda-E_\lambda-E_\kappa+E_\kappa=0.\end{aligned}$$

上式表明当$j\neq k$时，$E(\Delta_{nj})E(\Delta_{nk})=0$。另因$E(\Delta_{nj})$是一投影，故对每一$s=1,2,\cdots$，$E(\Delta_{nj})^s=E(\Delta_{nj})$，从而得出

$$(6)\qquad \left[\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_{nj}E(\Delta_{nj})\right]^r=\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_{nj}^{r}E(\Delta_{nj}).$$

如果(5)中的和趋近于T，则(6)中左端的式子也将趋近于T^r，因为有界线性算子的乘法（复合）是连续的。于是由(6)，给定$\varepsilon>0$，存在一N使得对一切$n>N$，有

$$\left\| T^r-\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_{nj}^{r}E(\Delta_{nj})\right\|<\varepsilon$$

这就对 $p(\lambda)=\lambda^r$ 证明了 (2) 和 (2*)。由此我们易于得出，公式(2)和(2*)对任意具实系数的多项式也成立。∎

我们应该指出，一般来说，实际确定一给定的有界自伴线性算子的谱族并非易事。在某些相当简单的情形，谱族可从(1)式推测出来。在其他的情形，可以用一系统方法，这种方法是以更高等的方法为基础；见 N. Dunford, J. T. Schwartz (1958—71), Part 2, 920—921.

让我们列举算子 $p(T)$ 的某些性质来结束本节，这些性质不仅其本身是有趣的，而且在推广谱定理到一般的连续函数情形时，对我们也是有帮助的。

9.9-2 定理($p(T)$的性质) 设T与前一定理中的相同，又设p_1，p_2，p 是实系数多项式，则：

(a) $p(T)$是自伴的。

(b) 若 $p(\lambda)=\alpha p_1(\lambda)+\beta p_2(\lambda)$，

则
$$p(T)=\alpha p_1(T)+\beta p_2(T).$$

(c) 若 $p(\lambda)=p_1(\lambda)p_2(\lambda)$，则 $p(T)=p_1(T)p_2(T)$。

(d) 若 $p(\lambda)\geqslant 0$，对一切 $\lambda\in[m, M]$成立，则 $p(T)\geqslant 0$。

(e) 若对一切 $\lambda\in[m, M]$，$p_1(\lambda)\leqslant p_2(\lambda)$，

则
$$p_1(T)\leqslant p_2(T).$$

(f) $\|p(T)\|\leqslant\max\limits_{\lambda\in J}|p(\lambda)|$，其中 $J=[m, M]$。

(g) 若一有界线性算子与T可交换，则它也与 $p(T)$可交换。

证. (a)成立，因为T是自伴的，p是实系数多项式，故
$$(a_jT^j)^*=a_jT^j.$$

由定义，(b)是显然的。

由定义，(c)是显然的。

(d) 因为p有实系数，若复零点出现的话，必然以共轭对的形式出现。因为当λ通过一奇重数的零点时，p改变符号，又因在$[m, M]$上$p(\lambda)\geqslant 0$，故p在(m, M)中的零点必是偶重数的。因此我们可以写成

$$(7)\qquad p(\lambda)=\alpha\prod_j(\lambda-\beta_j)\prod_k(\gamma_k-\lambda)\prod_l[(\lambda-\mu_l)^2+\nu_l^2],$$

其中$\beta_j\leqslant m$，$\gamma_k\geqslant M$，而且二次因子对应于复共轭的零点和(m, M)中的实零点。现证，如果$p\neq 0$，则$\alpha>0$。事实上，对一切充分大的λ，比如说，对一切$\lambda\geqslant\lambda_0$，我们有

$$\operatorname{sgn} p(\lambda)=\operatorname{sgn}\alpha_n\lambda^n=\operatorname{sgn}\alpha_n,$$

其中n是p的次数。因此$\alpha_n>0$就蕴含$p(\lambda_0)>0$，而且为了使得在(m, M)中$p(\lambda)\geqslant 0$，诸γ_k的个数（每一个按其重数计算）必是偶的。于是(7)中所有的三个乘积在λ_0都是正的。为了$p(\lambda_0)>0$，我们必须有$\alpha>0$。若$\alpha_n<0$，则$p(\lambda_0)<0$，为了使得在(m, M)中$p(\lambda)\geqslant 0$，故诸γ_k的个数应是奇的。这就得出(7)中的第二个乘积在λ_0处是负的，而且与前一样$\alpha>0$。

我们用T代λ。则(7)中的每一因子都是正算子。事实上，对每一$x\neq 0$，令$v=\|x\|^{-1}x$，我们有$x=\|x\|v$，又因$-\beta_j\geqslant -m$，故有

$$\begin{aligned}\langle(T-\beta_jI)x,\ x\rangle&=\langle Tx,\ x\rangle-\beta_j\langle x,\ x\rangle\\&\geqslant\|x\|^2\langle Tv,\ v\rangle-m\|x\|^2\\&\geqslant\|x\|^2\inf_{\|\tilde{v}\|=1}\langle T\tilde{v},\ \tilde{v}\rangle-m\|x\|^2=0,\end{aligned}$$

即，$T-\beta_jI\geqslant 0$。类似地，有$\gamma_kI-T\geqslant 0$。因$T-\mu_lI$也是自伴的，故其平方根是正的。而且

$$(T-\mu_lI)^2+\nu_l^2I\geqslant 0.$$

因为所有这些算子都是可交换的，由9.3-1它们的积是正的。而且$p(T)\geqslant 0$，因$\alpha>0$。

(e) 由(d)直接可得。

(f) 设 k 表 $|p(\lambda)|$ 在 J 上的最大值，则当 $\lambda \in J$ 时，$0 \leqslant p(\lambda)^2 \leqslant k^2$. 故(e)给出 $p(T)^2 \leqslant k^2 I$，因 $p(T)$ 是自伴的，这就是说对一切 x 有

$$\langle p(T)x, p(T)x\rangle = \langle p(T)^2 x, x\rangle \leqslant k^2 \langle x, x\rangle.$$

若取平方根，然后对一切范数为1的 x 取上确界，即得出(f)中的不等式。

(g) 由 $p(T)$ 的定义直接可得. ∎

在下节中，我们将用这一定理作为重要的工具推广我们现在的谱定理9.9-1。

习　题

1. 对零算子 $T=0:H\to H$ 证明(1)。

2. 考察实数 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$ 和 Hilbert 空间 H 到 H 的 n 个两两正交的子空间上的投影 $P_1, \cdots, P_n$. 假定 $P_1+\cdots+P_n=I$，试证

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} P_k$$

定义了一谱族，并列举出相对应的算子

$$T=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$$

的某些性质。

3. 若 $T=I: H\to H$，试证明(1)。

4. 如果一算子 $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$，关于一规格正交基由矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

表出。试问对应的谱族是什么？利用这一结果，对该算子证明(1)。

5. 试问一n-行 Hermintian 矩阵对应于什么样的谱族(E_λ)？试对这一情形证明(1)。

6. 如果我们作出这样的附加假设：(1)中的自伴算子T是紧的。试证(1)取无穷级数或一有限和的形式。

7. 考察由下式定义的乘法算子T: $L^2[0, 1]\to L^2[0, 1]$:

$$y(t)=Tx(t)=tx(t).$$

由9.1节习题9，和定理9.2-4，试推断$\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0, 1]$. 并证明对应的谱族由下式定义

$$E_\lambda x=\begin{cases}0, & 当\lambda<0,\\ v_\lambda, & 当0\leqslant\lambda\leqslant 1,\\ x, & 当\lambda>1,\end{cases}$$

其中

$$v_\lambda(t)=\begin{cases}x(t), & 当\ 0\leqslant t\leqslant\lambda,\\ 0, & 当\ \lambda<t\leqslant 1.\end{cases}$$

（在一些简单的例子的情形，例如$x(t)=t^2$或$x(t)=\sin 2\pi t$ 它可以帮助我们画出投影草图）.

8. 试找出由$(\xi_1, \xi_2, \xi_3\cdots)\mapsto(\xi_1/1, \xi_2/2, \xi_3/3, \cdots)$定义的算子$T$: $l^2\to l^2$的谱族，找出固有向量的规格正交集．问在这种情形，(1)取什么样的形式?

9. 在第8题中，试证明

$$T=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}P_j,$$

其中P_j是l^2到$e_j=(\delta_{jn})$生成的空间上的投影，而且级数按$B(l^2,l^2)$中的范数收敛.

10. 在任意的具有无穷多不同非零固有值的紧自伴线性算子T的情形，我们如何才能利用第9题解答中所给出的证明的思想?

9.10 谱定理对连续函数的扩张

定理9.9-1对$p(T)$成立，其中T是一有界自伴线性算子，p是一实系数的多项式．我们要推广这一定理到算子$f(T)$，其中T如前，而f是一连续的实值函数．显然，我们必须首先定义$f(T)$的意义是什么.

设$T: H\to H$是一复Hilbert空间H上的有界自伴线性算子，设f是$[m, M]$上之一连续实值函数，这里与前一样

(1) $$m=\inf_{\|x\|=1}\langle Tx,\ x\rangle,\ M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,\ x\rangle.$$

于是根据 Weierstrass 逼近定理4.11-5，存在一实系数的多项式序列(p_n)，使得在$[m,\ M]$上一致地

(2) $$p_n(\lambda)\to f(\lambda).$$

与之相应地有一有界自伴线性算子的序列$(p_n(T))$。由定理9.9-2(f)，

$$\|p_n(T)-p_r(T)\|\leqslant\max_{\lambda\in J}|p_n(\lambda)-p_r(\lambda)|,$$

其中$J=[m,\ M]$。因$p_n(\lambda)\to f(\lambda)$，故任给$\varepsilon>0$，存在$N$，使得对一切$n,\ r>N$，上式右端小于$\varepsilon$。因此$(p_n(T))$是一Cauchy列，因$B(H,H)$完备，故在$B(H,H)$中有一极限(见2.10-2)。我们定义$f(T)$为其极限，于是有

(3) $$p_n(T)\to f(T).$$

当然，为了说明$f(T)$的这一定义的合理性，我们必须证明$f(T)$仅依赖于f（自然，也依赖于T），而不依赖于一致收敛于f的多项式序列的选取。

证．设$(\tilde{p}_n)$是另一实系数的多项式列，使得在$[m,\ M]$上一致地

$$\tilde{p}_n(\lambda)\to f(\lambda).$$

于是由前面的讨论知$\tilde{p}_n(T)\to\tilde{f}(T)$。现在我们应该证明$\tilde{f}(T)=f(T)$．显然

$$\tilde{p}_n(\lambda)-p_n(\lambda)\to 0$$

故再由9.9-2(f)有$\tilde{p}_n(T)-p_n(T)\to 0$。因此，给定$\varepsilon>0$，存在$N$，使得当$n>N$时有

$$\|\tilde{f}(T)-\tilde{p}_n(T)\|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\|\tilde{p}_n(T)-p_n(T)\|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\|p_n(T)-f(T)\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由三角不等式得

$$\|\tilde{f}(T)-f(T)\|\leqslant\|\tilde{f}(T)-\tilde{p}_n(T)\|+\|\tilde{p}_n(T)-p_n(T)\|$$
$$+\|p_n(T)-f(T)\|<\varepsilon.$$

因$\varepsilon>0$是任意的，故$\tilde{f}(T)-f(T)=0$故$\tilde{f}(T)=f(T)$. ▮

借助于这些准备，现在我们可以把定理9.9-1由多项式p推广到一般的连续实值函数f，其法如下：

9.10-1 谱定理 设$T:H\to H$是复Hilbert空间H上的有界自伴线性算子，f是$[m,M]$上的连续实值函数（见(1)）。则$f(T)$有下面的谱表示

$$f(T)=\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\,dE_\lambda\text{①} \tag{4}$$

其中$\mathscr{E}=(E_\lambda)$是关于T的谱族(见9.8-3)；积分按一致算子收敛意义下理解，而且对一切$x,y\in H$有

$$\langle f(T)x,y\rangle=\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\,dw(\lambda),\quad w(\lambda)=\langle E_\lambda x,y\rangle, \tag{4*}$$

其中积分是一通常的Riemann-Stieltjes积分(4.4节)。

证 我们采用定理9.9-1的证明中相同的记号。对每一$\varepsilon>0$，存在一实系数的多项式p，使得对所有$\lambda\in[m,M]$，

$$-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant f(\lambda)-p(\lambda)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}, \tag{5}$$

于是

$$\|f(T)-p(T)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

---

① 符号$m-0$的含义与在定理9.9-1中所解释的相同。

其次，注意 $\Sigma E(\Delta_{nj})=I$，并引用 (5)，对任意的分划，我们得出

$$-\frac{\varepsilon}{3}I\leqslant\sum_{j=1}^{n}[f(\hat{\lambda}_{nj})-p(\hat{\lambda}_{nj})]E(\Delta_{nj})\leqslant\frac{\varepsilon}{3}I.$$

即得

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}[f(\hat{\lambda}_{nj})-p(\hat{\lambda}_{nj})]E(\Delta_{nj})\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

最后，因 $p(T)$ 由9.9节（2）式表出，故存在一个 N，使得对每一 $n>N$ 有

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}p(\hat{\lambda}_{nj})E(\Delta_{nj})-p(T)\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

利用这些不等式，我们现在可以估计 $f(T)$ 与对应于（4）式中积分的 Riemann-Stieltjes 和之差的范数。当 $n>N$ 时，由三角不等式得

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}f(\hat{\lambda}_{nj})E(\Delta_{nj})-f(T)\right\|\leqslant\left\|\sum_{j=1}^{n}[f(\hat{\lambda}_{nj})-p(\hat{\lambda}_{nj})]E(\Delta_{nj})\right\|$$

$$+\left\|\sum_{j=1}^{n}p(\hat{\lambda}_{nj})E(\Delta_{nj})-p(T)\right\|+\|p(T)-f(T)\|\leqslant\varepsilon.$$

因 $\varepsilon>0$ 是任意的，这就建立了（4）和 (4*)。证毕。█

我们还应提及下面的唯一性性质。

$\mathscr{E}=(E_\lambda)$ 是在 $[m,M]$ 上生成的表示（4）和（4*）的唯一的谱族。

如果我们注意到 (4*) 式对 $[m,M]$ 上每一实值连续函数 f 成立，而且 (4*) 式左端被定义为与 $\mathscr{E}$ 无关，上述结论看来似乎是真

实的．而其证明则由Stieltjes积分的唯一性定理[见F.Riesz，和B.Sz.-Nagy (1955)，P.111]得出；这个定理指出，对任意固定的x和y，式子$w(\lambda)=\langle E_\lambda x,y\rangle$在其连续点，和在$m-0$，$M$处，除一加性常数外，由(4*)确定．因$E_M=I$，故$\langle E_M x,y\rangle=\langle x,y\rangle$，而且$(E_\lambda)$是右连续的．故我们得以断定$w(\lambda)$处处被唯一确定．

不难看出，在定理9.9-2中所列举的有关$p(T)$的性质可以推广到$f(T)$．为了后面引用方便，我们把这一简单的事实表述如下：

9.10-2 定理(f(T)的性质) 定理9.9-2仍然成立，如果p，p_1，p_2被代之以$[m,M]$上的连续实值函数f，f_1，f_2．

9.11 有界自伴线性算子谱族的性质

有趣的是，Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子T的谱族$\mathscr{E}=(E_\lambda)$以一种显明而简洁的方式反映出谱的性质．我们将从$\mathscr{E}$的定义（见9.8节）联系9.9节中的谱表示，来导出那样一类结果．

由9.7节我们知道，如果H是有限维的，则谱族$\mathscr{E}=(E_\lambda)$恰好在T的固有值处有"增长点"（间断点，跳跃点）．事实上，$E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}\neq 0$当而且仅当$\lambda_0$是$T$之一固有值．值得注意的是，虽然也许不出乎意料，这一性质移植到无限维情形就有下面的结果：

9.11-1 定理(固有值) 设$T: H\to H$是复Hilbert空间H上的有界自伴线性算子，$\mathscr{E}=(E_\lambda)$是相应的谱族．则$\lambda\mapsto E_\lambda$在任一$\lambda=\lambda_0$处有间断（即$E_{\lambda_0}\neq E_{\lambda_0-0}$）当而且仅当$\lambda_0$是$T$之一固有值．在此种情形，对应的固有空间是

(1) $$\mathcal{N}(T-\lambda_0 I)=(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})(H).$$

证. λ_0是T之一固有值当而且仅当$\mathcal{N}(T-\lambda_0 I)\neq\{0\}$，故定理的第一个论断直接由（1）得出。因此我们只要证明(1).我们简单地记

$$F_0=E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}.$$

为证(1)，我们首先证明

(2) $$F_0(H)\subset\mathcal{N}(T-\lambda_0 I)$$

然后证明

(3) $$F_0(H)\supset\mathcal{N}(T-\lambda_0 I).$$

(2)的证明：

9.8节中的不等式(18)，在$\lambda=\lambda_0-\frac{1}{n}$，$\mu=\lambda_0$时，即为

(4) $$\left(\lambda_0-\frac{1}{n}\right)E(\Delta_0)\leqslant TE(\Delta_0)\leqslant\lambda_0 E(\Delta_0),$$

其中$\Delta_0=\left(\lambda_0-\frac{1}{n},\ \lambda_0\right]$。我们让$n\to\infty$，于是$E(\Delta_0)\to F_0$，故(4)得

$$\lambda_0 F_0\leqslant TF_0\leqslant\lambda_0 F_0.$$

因而$TF_0=\lambda_0 F_0$，即$(T-\lambda_0 I)F_0=0$。这就证明了(2)。

(3)的证明.

设$x\in\mathcal{N}(T-\lambda_0 I)$。我们于是证明$x\in F_0(H)$，即$F_0 x=x$（因$F_0$是一投影）.

如果$\lambda_0\notin[m,M]$，则由9.2-1，$\lambda_0\in\rho(T)$。故此时$\mathcal{N}(T-\lambda_0 I)=\{0\}\subset F_0(H)$，因为$F_0(H)$是一向量空间。如果$\lambda_0\in[m,M]$. 由假定，$(T-\lambda_0 I)x=0$。这就蕴含$(T-\lambda_0 I)^2 x=0$，由9.9-1，即有

$$\int_a^b(\lambda-\lambda_0)^2 dw(\lambda)=0,\qquad w(\lambda)=\langle E_\lambda x,x\rangle,$$

其中$a<m$，$b>M$. 这里$(\lambda-\lambda_0)^2\geqslant 0$，而且由9.7-1，$\lambda\mapsto\langle E_\lambda x,$

$x\rangle$是单调增的。故在任意正长度的子区间上的积分必是零。特别，对每一$\varepsilon>0$，我们必有

$$0=\int_a^{\lambda_0-\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)^2dw(\lambda)\geqslant\varepsilon^2\int_a^{\lambda_0-\varepsilon}dw(\lambda)=\varepsilon^2\langle E_{\lambda_0-\varepsilon}x,x\rangle,$$

和

$$0=\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{b}(\lambda-\lambda_0)^2dw(\lambda)\geqslant\varepsilon^2\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{b}dw(\lambda)=\varepsilon^2\langle Ix,x\rangle-\varepsilon^2\langle E_{\lambda_0+\varepsilon}x,x\rangle.$$

因$\varepsilon>0$，由上面的式子和 9.5-2 得

$$\langle E_{\lambda_0-\varepsilon}x,x\rangle=0,\quad 故 E_{\lambda_0-\varepsilon}x=0,$$

和

$$\langle x-E_{\lambda_0+\varepsilon}x,x\rangle=0,\quad 故 x-E_{\lambda_0+\varepsilon}x=0.$$

于是我们可以写成

$$x=(E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon})x.$$

如果我们让$\varepsilon\to0$，即得$x=F_0x$，因为$\lambda\longmapsto E_\lambda$是右连续的。于是推出(3)，这正是我们前面所关注的。█

我们知道有界自伴线性算子T的谱位于复平面的实轴上。(见 9.1-3)。当然，实轴也包含豫解集$\rho(T)$的点。例如，$\lambda\in\rho(T)$，如果λ是实的且$\lambda<m$或$\lambda>M$。(见 9.2-1)。值得非常注意的是，一切实$\lambda\in\rho(T)$可以用谱族的性质按一种非常简单的方式进行刻划。这一定理将直接给出T的连续谱点的特征。因为T的剩余谱是空的(由9.2-4)，于是就完成我们现在的讨论。

9.11-2 定理(豫解集) 设T和$\mathscr{E}=(E_\lambda)$如定理 9.11-1 中者。则实数λ_0属于T的豫解集$\rho(T)$，当而且仅当存在一$\gamma>0$，使得$\mathscr{E}=(E_\lambda)$在区间$[\lambda_0-\gamma,\ \lambda_0+\gamma]$上保持不变。

证. 在 (a) 部分中，我们证明给定的条件是$\lambda_0\in\rho(T)$的充分条件；在（b）部分中，我们证明其是必需的。在证明中，我

们用到定理9.1-2，它指出，$\lambda_0\in\rho(T)$当而且仅当存在一$\gamma>0$，使得对一切$x\in H$有

(5) $$\|(T-\lambda_0 I)x\|\geqslant\gamma\|x\|.$$

(a) 设λ_0是一实数并使得对某一$\gamma>0$，$\mathscr{E}$在$J=[\lambda_0-\gamma,\lambda_0+\gamma]$上保持不变，由定理9.9-1有

(6) $$\|(T-\lambda_0 I)x\|^2=\langle(T-\lambda_0 I)^2x,x\rangle$$
$$=\int_{m-0}^{M}(\lambda-\lambda_0)^2 d\langle E_\lambda x,x\rangle.$$

因$\mathscr{E}$在J上不变，故在J上的积分为零值，而且当$\lambda\notin J$时，我们有$(\lambda-\lambda_0)^2\geqslant\gamma^2$，于是（6）现在就蕴含

$$\|(T-\lambda_0 I)x\|^2\geqslant\gamma^2\int_{m-0}^{M}d\langle E_\lambda x,x\rangle=\gamma^2\langle x,x\rangle.$$

取平方根，即得(5)。故由9.1-2，$\lambda_0\in\rho(T)$。

(b) 反之，设$\lambda_0\in\rho(T)$。则（5）关于某一$\gamma>0$对一切$x\in H$成立。因此由（6）和9.9-1

(7) $$\int_{m-0}^{M}(\lambda-\lambda_0)^2 d\langle E_\lambda x,x\rangle\geqslant\gamma^2\int_{m-0}^{M}d\langle E_\lambda x,x\rangle.$$

现证，如果我们假定$\mathscr{E}$在区间$[\lambda_0-\gamma,\lambda_0+\gamma]$上不是不变的，则将得出一矛盾。事实上，那时我们就可以找出一正数$\eta<\gamma$，使得$E_{\lambda_0+\eta}-E_{\lambda_0-\eta}\neq 0$，因为当$\lambda<\mu$时有$E_\lambda\leqslant E_\mu$（见9.7-1）。故存在$y\in H$，使得

$$x=(E_{\lambda_0+\eta}-E_{\lambda_0-\eta})y\neq 0.$$

在（7）中利用这一x。则

$$E_\lambda x=E_\lambda(E_{\lambda_0+\eta}-E_{\lambda_0-\eta})y.$$

9.7节中的公式（7）表明，上式右端当$\lambda<\lambda_0-\eta$时为$(E_\lambda-E_\lambda)y=0$，当$\lambda>\lambda_0+\eta$时，为$(E_{\lambda_0+\eta}-E_{\lambda_0-\eta})y$，因此与$\lambda$无关。于是我们可以取$K=[\lambda_0-\eta,\lambda_0+\eta]$为（7）式中的积分区间。若$\lambda\in K$，则再次利用9.7节中的（7）式，由直接计算得$\langle E_\lambda x,x\rangle=\langle(E_\lambda-$

$E_{\lambda_0-\eta})y,y\rangle$。故（7）式给出

$$\int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta}(\lambda-\lambda_0)^2 d\langle E_\lambda y,y\rangle \geqslant \gamma^2\int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} d\langle E_\lambda y,y\rangle.$$

但这是不可能的，因为右端的积分是正的，而且 $(\lambda-\lambda_0)^2\leqslant\eta^2<\gamma^2$，其中$\lambda\in K$。因此我们假定$\mathscr{E}$在区间$[\lambda_0-\gamma,\ \lambda_0+\gamma]$上不是不变的是不成立的。定理证毕。∎

这个定理也表明$\lambda_0\in\sigma(T)$当而且仅当$\mathscr{E}$在R上 λ_0 的任一邻域中不是不变的。因为根据9.2-4，$\sigma_r(T)=\Phi$，而且 $\sigma_p(T)$ 的点对应于$\mathscr{E}$的间断点(见9.11-1)，故我们有下面的定理，该定理完成了我们的讨论。

9.11-3 定理(连续谱) 设T和$\mathscr{E}=(E_\lambda)$与定理9.11-1中的一样。则一实数λ_0属于T的连续谱$\sigma_c(T)$，当而且仅当$\mathscr{E}$在λ_0处连续（故$E_{\lambda_0}=E_{\lambda_0-0}$），而且在$R$上$\lambda_0$的任一邻域内不是不变的。

习　　题

1. 在 Hermitian 矩阵的情形，由定理 9.11-1 我们可以得出什么结论?

2. 若定理 9.11-1 中的T是紧的，而且有无穷多的固有值。则由定理9.11-1和9.11-2我们关于（E_λ）能得出什么样的结论?

3. 试证明 9.9 节习题 7 中的谱族满足本节中的三个定理。

4. 我们知道，如果定理9.2-1中的m是正数，则T是正的。试问这怎样从 9.9 节中的谱表示（1）得出?

5. 我们知道有界自伴线性算子的谱是闭的。试问这怎样由本节的定理得出呢?

6. 设$T: l^2\to l^2$是由 $y=(\eta_j)=Tx$ 定义，其中 $x=(\xi_j)$，$\eta_j=\alpha_j\xi_j$，而(α_j)是一有限区间$[a,b]$中的任意实序列。试证明对应的谱族（E_λ）由下式定义：

$$\langle E_\lambda x,y\rangle=\sum_{\alpha_j\leqslant\lambda}\xi_j\eta_j.$$

7. （纯点谱） Hilbert 空间$H \neq \{0\}$上的有界自伴线性算子$T: H \to H$称为具有纯点谱或纯离散谱，如果T有一规格正交的固有向量的集合，它在H中是完全的。试用一例子说明这不蕴含$\sigma_C(T)=\phi$（因此这一通常使用的术语，可能会使初学者暂时发生混淆）。

8. 试给出这样的紧自伴线性算子$T: l^2 \to l^2$的例子，它具有纯点谱，并使得非零固有向量的集合（a）是一有限点集，（b）是一无限点集，而且对应的固有向量构成l^2中之一稠密集，（c）是一无限点集，而且对应的固有向量生成l^2中这样的子空间，使得该子空间的闭包的正交补是有限维的，（d） 与（c）中的一样，但正交补是无限维的。在每一情形试求固有向量的一完全的规格正交集。

9. （纯连续谱） Hilbert 空间$H \neq \{0\}$上之一有界自伴线性算子T: $H \to H$称为具有纯连续谱，如果T没有固有值。如果T是H上的任一有界自伴线性算子，试证明存在一闭子空间$Y \subset H$，它约化T（见9.6节，习题10），并使得$T_1 = T|_Y$有一纯点谱，而$T_2 = T|_Z$，$Z = Y^{\perp}$有一纯连续谱。（这种约化，大大地简化了关于T的研究。亦见9.6节的注记）

10. 按照T的谱族的说法，我们能对第9题中T_1和T_2的谱族(E_{λ_1})，(E_{λ_2})说些什么？

第 十 章

Hilbert 空间中的无界线性算子

无界线性算子在许多应用中，特别是在与微分方程有关的方面，以及在量子力学中大量出现。它们的理论较之有界线性算子更为复杂。

在本章中，我们仅限于 Hilbert 空间，这是物理学中最感兴趣的情形。事实上，无界算子的理论是在1920年以后，由于试图置量子力学于严格的数学基础之上而受到促进和发展。这一理论系统的发展应归功于 J. von Neumann (1929—30, 1936) 和 M. H. Stone (1932).

应用这种理论于微分方程，不仅对各种不同的问题给出了统一的处理方法，而且也使之得以本质的简化。

本章是选读材料。

重要概念，主要内容方向提要

对无界算子来说，考察定义域和扩张问题是最重要的。为了线性算子T的 Hilbert 伴随算子T^*存在，T必须在H中稠定，即其定义域$\mathscr{D}(T)$必须在H中稠密(见10.1节)。另一方面，如果T恒满足关系式：

$$\langle Tx, y\rangle=\langle x, Ty\rangle$$

且是无界的，则其定义域不可能是整个H(见10.1-1)。这一关系

式等价于$T\subset T^*$(如果T在H中是稠定的)。并称T为对称的(见10.2节)。自伴线性算子($T=T^*$,见10.2-5)是对称的,但在无界的情形,其逆一般是不真的。

在实际问题中所出现的大量的无界线性算子是闭的或有闭线性扩张(或延拓)(见10.3节)。

自伴线性算子的谱是实的,在无界情形也一样(见10.4-2)。这种无界算子的谱表示(见10.6-3)借助于T的 Cayley 变换

$$U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$$

(见10.6节)和酉算子的谱定理10.5-4而得出。

10.7节专门从事乘法算子和微分算子的讨论。这是应用上特别重要的两类无界算子。(这两类算子在关于量子力学的第十一章中起到关键作用)。

为了下面说起来方便起见,在本章中我们称T是H上的算子,如果其定义域是整个H,T是H中的算子,如果其定义域在H内,但可能不是整个H,又记号

$$S\subset T$$

意指T是S的扩张。

10.1 无界线性算子及其 Hilbert 伴随算子

在本章我们处处考察的是线性算子T: $\mathscr{D}(T)\to H$,其定义域$\mathscr{D}(T)$位于一复 Hilbert 空间H中。我们允许这样的算子T可能是无界的,即T可能不是有界的。

从2.7节中我们记起,T是有界的,当而且仅当存在一实数c使得对一切$x\in\mathscr{D}(T)$

$$\|Tx\|\leqslant c\|x\|.$$

一类重要的无界线性算子是在4.13节中考察过的微分算子。

我们预期无界线性算子会在很多方面不同于有界线性算子,

那就提出一个问题，我们应集中注意力于一些什么问题．下面的一个著名的结果（定理10.1-1）提示我们，算子的定义域和算子的扩张问题将起到特别的作用．事实上，我们将看出，算子相当多的性质依赖于定义域，又算子在扩张和限制下，性质可能发生改变．

当前述的定理被 E. Hellinger 和 O. Toeplitz (1910) 发现后，引起人们的赞美和迷惘，因为该定理在两种不同类型的性质（即处处被定义的性质和有界的性质）之间建立了一种关系．

在 Hilbert 空间H上的有界线性算子T的情形，T的自伴性由下式定义

$$(1) \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle,$$

（见3.10-1）．这是一重要的性质．而前述的定理表明，满足(1)的无界线性算子T，不可能定义在整个空间H上．

10.1-1 Hellinger-Toeplitz定理(有界性) 若线性算子T是定义在整个复 Hilbert 空间H上，而且对一切$x, y \in H$满足 (1)，则T是有界的

证．否则，H将包含一序列(y_n)使得

$$\|y_n\| = 1, \quad 且 \|Ty_n\| \to \infty.$$

现在我们考虑由下式定义的泛函f_n:

$$f_n(x) = \langle Tx, y_n\rangle = \langle x, Ty_n\rangle,$$

其中$n=1,2,\cdots$，而且我们已用了（1）式．每一f_n是定义在整个H上，而且是线性的．对每一n泛函f_n是有界的，因为Schwarz不等式给出

$$|f_n(x)| = |\langle x, Ty_n\rangle| \leqslant \|Ty_n\| \|x\|.$$

而且对每一固定的$x \in H$，序列$(f_n(x))$是有界的．事实上，利用 Schwarz 不等式和$\|y_n\| = 1$，我们有

$$|f_n(x)| = |\langle Tx, y_n\rangle| \leqslant \|Tx\|.$$

由这一不等式和一致有界性定理4.7-3，我们得出（$\|f_n\|$）是有界的，比如说，对一切n，$\|f_n\|\leqslant k$。这就蕴含对每一$x\in H$有

$$|f_n(x)|\leqslant\|f_n\|\|x\|\leqslant k\|x\|,$$

取$x=Ty$，即得

$$\|Ty_n\|^2=\langle Ty_n,\ Ty_n\rangle=|f_n(Ty_n)|\leqslant k\|Ty_n\|.$$

故$\|Ty_n\|\leqslant k$，这与我们最初的假设$\|Ty_n\|\to\infty$相矛盾。定理得证。∎

根据这一定理，对满足（1）的无界线性算子，$\mathscr{D}(T)=H$是不可能的，于是我们面临确定适当的定义域的问题和扩张问题。我们将使用一个方便的记号

$$S\subset T;$$

根据定义，这意味着算子T是算子S的**扩张**，于是

$$\mathscr{D}(S)\subset\mathscr{D}(T)\text{且}S=T_{\mathscr{D}(S)}.$$

我们称T为S的**真扩张**，如果$\mathscr{D}(S)$是$\mathscr{D}(T)$之一真子集，即$\mathscr{D}(T)-\mathscr{D}(S)\neq\emptyset$。

在有界算子的理论中，算子T的 Hilbert 伴随算子T^*起着非常基本的作用。因此让我们首先推广这一重要概念到无界算子。

在有界的情形，算子T^*定义为（见3.9-1）

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,$$

我们可以把它写成为

（2）　(a) $\langle Tx,y\rangle=\langle x,y^*\rangle$，(b) $y^*=T^*y$.

T^*在H上存在，而且是具范数$\|T^*\|=\|T\|$的有界线性算子；

在一般情况下，我们也要用（2）式。显然，T^*只对那样的一些$y\in H$有定义，对此y存在y^*使（2）式对一切$x\in\mathscr{D}(T)$成立。

现指出一个重要之处。为了T^*是一算子（一映象），对属于T^*的定义域$\mathscr{D}(T^*)$中之每一y，对应的$y^*=T^*y$必是唯一的。我们断言这一结论成立当且仅当：

T在H中是稠定的，即$\mathscr{D}(T)$在H中稠密。

事实上，如果$\mathscr{D}(T)$不在H中稠密，则$\overline{\mathscr{D}(T)} \neq H$，$\overline{\mathscr{D}(T)}$在$H$中的正交补（3.3节）含非零元$y_1$，且对每一$x \in \mathscr{D}(T)$，$y_1 \perp x$，即$\langle x, y_1 \rangle = 0$。但由（2）我们有

$$\langle x, y^* \rangle = \langle x, y^* \rangle + \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y^* + y_1 \rangle,$$

上式表明了非唯一性。另一方面，如果$\mathscr{D}(T)$在H中稠密，则由3.3-7，$\mathscr{D}(T)^\perp = \{0\}$。故对一切$x \in \mathscr{D}(T)$有$\langle x, y_1 \rangle = 0$，从而蕴含$y_1 = 0$，故$y^* + y_1 = y^*$，此即所要求的唯一性。▌

我们同意称T为H上的算子，如果$\mathscr{D}(T)$是整个H，称T为H中的算子，如果$\mathscr{D}(T)$包含于H中但不是整个H。这种说法在本章中是比较方便的。

现在我们可以提出下面的概念。

10.1-2 定义（Hilbert 伴随算子） 设$T: \mathscr{D}(T) \to H$是复Hilbert空间H中的（可能无界的）稠定线性算子。则T的Hilbert伴随算子T^*，$\mathscr{D}(T^*) \to H$可定义如下。T^*的定义域$\mathscr{D}(T^*)$由所有这样的$y \in H$组成，对每一$y \in \mathscr{D}(T^*)$存在$y^* \in H$，使对一切$x \in \mathscr{D}(T)$满足

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle. \tag{2a}$$

对每一这样的$y \in \mathscr{D}(T^*)$，Hilbert伴随算子T^*就由y^*按照下面的方式定义：

$$y^* = T^* y. \tag{2b}$$

▌

换言之，元$y \in H$属于$\mathscr{D}(T^*)$当（且仅当）对这一y，内积$\langle Tx, y \rangle$视为x的函数时可以表为下之形式：

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle, \quad 对一切 x \in \mathscr{D}(T).$$

而且这一y也唯一地决定对应的y^*，因为根据假定$\mathscr{D}(T)$在H中稠密。

读者可以证明T^*是一线性算子。

在我们的进一步工作中，我们需要算子的和与积（复合）的概念。我们必须非常小心，因为不同的算子可能有不同的定义域，特别在无界的情形。因此我必须首先定义在这种更为一般的情形，和与积的意义是什么。这可以按照下面一种相当自然的方式来完成。

设$S:\mathscr{D}(S)\to H$和$T:\mathscr{D}(T)\to H$是线性算子，其中$\mathscr{D}(S)\subset H$，$\mathscr{D}(T)\subset H$，则S与T的和$S+T$是具定义域

$$\mathscr{D}(S+T)=\mathscr{D}(S)\cap\mathscr{D}(T)$$

的线性算子，而且对每一$x\in\mathscr{D}(S+T)$它由下式定义：

$$(S+T)x=Sx+Tx.$$

注意$\mathscr{D}(S+T)$是使S与T在其上同时有意义的最大集合，而且$\mathscr{D}(S+T)$是一向量空间。

还要注意，总有$0\in\mathscr{D}(S+T)$，故$\mathscr{D}(S+T)$决不会是空的，但很明显，仅当$\mathscr{D}(S+T)$还包含其他元素时，我们才可能希望有非平凡的结果。

让我们定义积TS，这里S与T如前。设M是$\mathscr{D}(S)$这样的最大子集，它在S下的象位于$\mathscr{D}(T)$中，于是有

$$S(M)=\mathscr{R}(S)\cap\mathscr{D}(T),$$

其中$\mathscr{R}(S)$是S的值域，见图65．于是积TS被定义为一算子，其定义域为$\mathscr{D}(TS)=M$，并使得对一切$x\in\mathscr{D}(TS)$，

$$(TS)x=T(Sx).$$

在上述定义中交换S和T的位置，我们看出积ST是这样的算子，使得对一切$x\in\mathscr{D}(ST)$有

$$(ST)x=S(Tx),$$

其中$\mathscr{D}(ST)=\widetilde{M}$是$\mathscr{D}(T)$中这样的最大子集，其在$T$下的象位于$\mathscr{D}(S)$中；于是有

$$T(\widetilde{M})=\mathscr{R}(T)\cap\mathscr{D}(S).$$

TS与ST是线性算子．这易于验证；特别应注意，$\mathscr{R}(S)$是

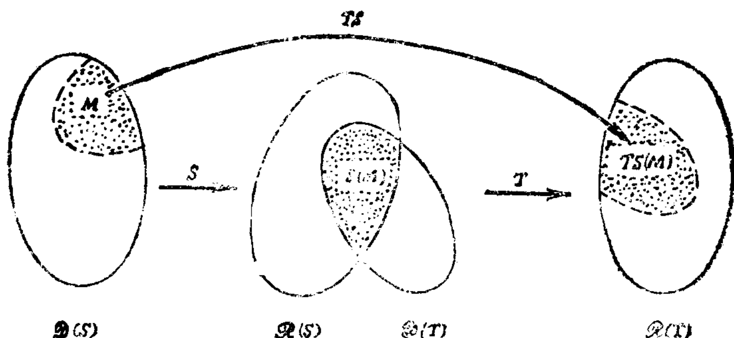


图65　线性算子的积

向量空间(由2.6-9)，故 $S(M)$ 也是一向量空间，因为 S 是线性的，这就蕴含M是一向量空间。同理，$\widetilde{M}$也是一向量空间。

习　　题

1. 试证，线性算子T的Hilbert伴随算子T^*是线性的。

2. 试证明，对有界线性算子，由我们现在关于Hilbert 伴随算子的定义即可得出定义3.9-1，其中 $H_1=H_2=H$。

3. 试证明

$$(T_1T_2)T_3=T_1(T_2T_3)$$

对无界算子仍然成立。

4. 试证明

$$(T_1+T_2)T_3=T_1T_3+T_2T_3,$$
$$T_1(T_2+T_3)\supset T_1T_2+T_1T_3.$$

并给出第二个公式中等号成立之一充分条件。

5. 试证明

$$(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*,$$
$$(S+T)^*\supset S^*+T^*.$$

为了第二个关系式有意义，我们必须要求什么条件?

6. 试证明在第5题中，如果S定义在整个 H上，而且是有界的，则有

$$(S+T)^*=S^*+T^*.$$

7. 试证明，一有界线性算子$T:\mathscr{D}(T)\to H$，其定义域不在H中稠密，则总有一到H的有界线性扩张，其范数等于$\|T\|$。

8. 设$T:\mathscr{D}(T)\to l^2$由下式定义

$$y=(\eta_j)=Tx,\quad \eta_j=j\xi_j,\quad x=(\xi_j),$$

其中$\mathscr{D}(T)\subset l^2$由一切这样的$x=(\xi_j)$所组成，它只有有限多非零项$\xi_j$。(a) 试证$T$是无界的。(b) T有真的线性扩张吗？(c) T能否线性扩张到整个空间l^2？

9. 若线性算子T在一复 Hilbert 空间H上处处有定义。试证明其 Hilbert 伴随算子T^*是有界的。

10. 设S和T是定义在整个H上的线性算子，而且满足

$$\langle Ty,\ x\rangle=\langle y,\ Sx\rangle,\quad 对一切x,\ y\in H.$$

试证明T是有界的，而且S是其 Hilbert 伴随算子。

10.2 Hilbert 伴随算子，对称和自伴线性算子

在下面的两个定理中，我们将叙述 Hilbert 伴随算子的某些基本性质。这里，按定义

$$T^{**}=(T^*)^*.$$

10.2-1 定理 (Hilbert 伴随算子) 设$S:\mathscr{D}(S)\to H$和$T:\mathscr{D}(T)\to H$是在复 Hilbert 空间H中稠定的线性算子。

(a) 如果$S\subset T$，则$T^*\subset S^*$。

(b) 如果$\mathscr{D}(T^*)$在H中稠密，则$T\subset T^{**}$。

证. (a)由T^*的定义，对一切$x\in\mathscr{D}(T)$和一切$y\in\mathscr{D}(T^*)$有

$$(1)\qquad \langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle.$$

因$S\subset T$，这就蕴含，对一切$x\in\mathscr{D}(S)$和一切$y\in\mathscr{D}(T^*)$有

$$(2)\qquad \langle Sx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle.$$

由S^*的定义，对一切$x\in\mathscr{D}(S)$和一切$y\in\mathscr{D}(S^*)$有

$$(3)\qquad \langle Sx,y\rangle=\langle x,S^*y\rangle.$$

由上式及 (2) 我们将断定$\mathscr{D}(T^*)\subset\mathscr{D}(S^*)$。现对这一步详细地

予以解释，因为类似的结论以后还要出现。由 Hilbert 伴随算子 S^*的定义，定义域$\mathscr{D}(S^*)$包含所有这样的y，对此种y，当其x在$\mathscr{D}(S)$中变动，我们得出$\langle Sx,y\rangle$的表达式(3)。因为（2）式当其x在$\mathscr{D}(S)$变动时，也按同种方式表出$\langle Sx,y\rangle$，故使（2）成立的诸y之集，必是使（3）成立的诸y之集的（真或非真）子集，即我们必有$\mathscr{D}(T^*)\subset\mathscr{D}(S^*)$。由（2）和（3）我们易于断定对一切$y\in\mathscr{D}(T^*)$有$S^*y=T^*y$，因此，由定义，$T^*\subset S^*$。

(b) 于（1）中取复共轭有

$$\langle T^*y,x\rangle=\langle y,Tx\rangle \tag{4}$$

对一切$y\in\mathscr{D}(T^*)$和一切$x\in\mathscr{D}(T)$成立。因为$\mathscr{D}(T^*)$在H中稠密，故算子T^{**}存在，而且，由定义，对一切$y\in\mathscr{D}(T^*)$和一切$x\in\mathscr{D}(T^{**})$有

$$\langle T^*y,\ x\rangle=\langle y,\ T^{**}x\rangle.$$

由上式及（4）式，与（a）部分中一样的讨论，我们看出$x\in\mathscr{D}(T)$也属于$\mathscr{D}(T^{**})$，而且对这样的x，有$T^{**}x=Tx$。这就意味着$T\subset T^{**}$。▌

我们的下一个定理与这样的条件有关，在该条件下，伴随算子的逆等于逆的伴随算子。(注意，这就把3.9节中的习题 2 推广到可以是无界线性算子的情形)。

10.2-2 定理(Hilbert 伴随算子的逆)。 设T与前一定理中的一样。再设T是内射而且其值域$\mathscr{R}(T)$在H中稠密。则T^*是内射，而且

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*. \tag{5}$$

证明. T^*存在，因为T在H中是稠定的。T^{-1}也存在，因为T是内射。$(T^{-1})^*$存在，因为$\mathscr{D}(T^{-1})=\mathscr{R}(T)$在$H$中稠密。现在我们证明$(T^*)^{-1}$存在且满足(5)。

设$y\in\mathscr{D}(T^*)$。于是对一切$x\in\mathscr{D}(T^{-1})$我们有$T^{-1}x\in\mathscr{D}(T)$，

而且

(6) $$\langle T^{-1}x, T^*y\rangle = \langle TT^{-1}x, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

另一方面，由T^{-1}的 Hilbert 伴随算子的定义，有

$$\langle T^{-1}x, T^*y\rangle = \langle x, (T^{-1})^*T^*y\rangle$$

对一切 $x\in\mathscr{D}(T^{-1})$ 成立。这就表明 $T^*y\in\mathscr{D}((T^{-1})^*)$. 而且，把（6）与之比较，我们断定

(7) $$(T^{-1})^*T^*y = y \quad y\in\mathscr{D}(T^*).$$

我们看出$T^*y=0$就得出$y=0$，故由 2.6-10，$(T^*)^{-1}: \mathscr{R}(T^*)\to\mathscr{D}(T^*)$ 存在。其次，因 $(T^*)^{-1}T^*$ 是 $\mathscr{D}(T^*)$ 上的恒等算子，与（7）相比较，即表明

(8) $$(T^*)^{-1}\subset(T^{-1})^*.$$

为了建立(5)，我们只要证明

(9) $$(T^*)^{-1}\supset(T^{-1})^*.$$

为此目的，我们考察任意 $x\in\mathscr{D}(T)$ 和 $y\in\mathscr{D}((T^{-1})^*)$. 于是 $Tx\in\mathscr{R}(T)=\mathscr{D}(T^{-1})$，而且

(10) $$\langle Tx, (T^{-1})^*y\rangle = \langle T^{-1}Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

另一方面，由T的 Hilbert 伴随算子的定义，对一切$x\in\mathscr{D}(T)$，我们有

$$\langle Tx, (T^{-1})^*y\rangle = \langle x, T^*(T^{-1})^*y)\rangle.$$

由上式和 (10)，我们断定 $(T^{-1})^*y\in\mathscr{D}(T^*)$，且

(11) $$T^*(T^{-1})^*y = y, \quad y\in\mathscr{D}((T^{-1})^*).$$

而由逆的定义，$T^*(T^*)^{-1}$ 是 $\mathscr{D}((T^*)^{-1})=\mathscr{R}(T^*)$ 上的恒等算子，而且 $(T^*)^{-1}:\mathscr{R}(T^*)\to\mathscr{D}(T^*)$ 是满射的. 于是与 (11) 相比较，即得 $\mathscr{D}((T^*)^{-1})\supset\mathscr{D}((T^{-1})^*)$，故 $(T^*)^{-1}\supset(T^{-1})^*$，此即为(9). 与 (8) 一起，这就得出(5). ▌

关于有界线性算子，Hilbert 伴随算子常被用以定义自伴性（见 3.10 节）. 因为这是一个无论在理论或是应用上都是非常重要的概念. 我们想知道怎样才能把它推广到包含无界线性算子在

内的情形．为此，我们引入下面的概念．

10.2-3 定义(对称线性算子) 设 $T: \mathscr{D}(T) \to H$ 是一线性算子，它在一复 Hilbert 空间H中是稠定的，则T称为对称线性算子，如果对一切x，$y \in \mathscr{D}(T)$有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle. \quad ▮$$

值得相当注意的是，对称性可以用 Hilbert 伴随算子按照简单的方式表示出来．这将有助于我们进一步的工作．这也就启发我们在定义10.2-3中假定T 是稠定的。

10.2-4 引理(对称算子) 复 Hilbert 空间H中的稠定线性算子T 是对称的，当而且仅当

$$T \subset T^*. \tag{12}$$

证．定义 T^* 的关系式是

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \tag{13}$$

对一切$x \in \mathscr{D}(T)$和一切$y \in \mathscr{D}(T^*)$成立。假定 $T \subset T^*$．则对 $y \in \mathscr{D}(T)$有$T^*y = Ty$，于是 (13) 对$x, y \in \mathscr{D}(T)$ 变成

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle. \tag{14}$$

故T 是对称的．

反之，假设 (14) 对一切的$x, y \in \mathscr{D}(T)$成立．则与 (13) 相比较得知$\mathscr{D}(T) \subset \mathscr{D}(T^*)$，且$T = T^*|_{\mathscr{D}(T)}$．由定义，这就意味着$T^*$是$T$的扩张．▮

自伴性现在可定义如下：

10.2-5 定义(自伴线性算子) 设 $T: \mathscr{D}(T) \to H$ 是一线性算子，它在一复 Hilbert 空间H中稠定．则 T 称为自伴线性算子，如果

$$T = T^*. \tag{15} \quad ▮$$

每一自伴线性算子都是对称的。

另一方面，对称线性算子不必是自伴的。理由是T^*可能是T的真扩张，即$\mathscr{D}(T)\neq\mathscr{D}(T^*)$。显然，如果$\mathscr{D}(T)$是整个$H$，则这就不会发生。于是我们有下之结论：

对复 Hilbert 空间H上的线性算子$T: H\to H$，对称概念和自伴性概念是相同的。

注意，在这种情形，T是有界的(见10.1-1)，而且这就解释了为什么对称的概念没有较早地，比如说，在3.10节中就出现。

其次，存在与3.10.3相类似的结果：

复 Hilbert 空间H中的稠定线性算子T是对称的，当而且仅当$\langle Tx,x\rangle$对一切$x\in\mathscr{D}(T)$是实数。

习　　题

1. 试证明一自伴线性算子是对称的。

2. 如果S和T是使得ST为在H中稠定的算子，试证明

$$(ST)^*\supset T^*S^*,$$

又如果S是定义在整个H上，而且是有界的，则

$$(ST)^*=T^*S^*.$$

3. 设H是一复 Hilbert 空间，$T: \mathscr{D}(T)\to H$是线性的，而且在H中是稠定的。试证明T是对称的当而且仅当$\langle Tx,x\rangle$对一切$x\in\mathscr{D}(T)$是实的。

4. 如果T是对称的，试证明T^{**}是对称的。

5. 如果一线性算子T在H中是稠定的，而且其伴随算子是定义在整个H上的。试证明T是有界的。

6. 试证明$y=(\eta_j)=Tx=(\xi_j/j)$定义了一有界自伴线性算子$T: l^2\to l^2$，而且它有一无界的自伴逆。

7. 设$T: \mathscr{D}(T)\to H$是一有界对称线性算子。试证明T有一到$\overline{\mathscr{D}(T)}$的有界对称线性扩张$\tilde{T}$。

8. 如果T是对称的，且$\tilde{T}$是T的对称扩张，试证$\tilde{T}\subset T^*$。

9. 一极大对称线性算子是一没有真正对称扩张的对称线性算子。试证

明一自伴线性算子T是极大对称的.

10. 若一自伴线性算子$T:\mathscr{D}(T)\to H$是内射的. 试证明(a) $\overline{\mathscr{R}(T)}=H$, (b) T^{-1}是自伴的.

10.3 闭线性算子和闭包

在很多应用中都可以引出无界线性算子. 而且许多这样的算子都是闭的, 或至少有一线性的闭扩张. 这就说明在无界算子理论中闭线性算子的重要作用. 在本节中, 我们将考察闭的线性扩张及其某些性质.

我们首先复习闭线性算子的定义及4.13节中的某些结果. 用公式表述, 对 Hilbert 空间来说是方便的.

10.3-1 定义 (闭线性算子) 设$T:\mathscr{D}(T)\to H$是一线性算子, 其中$\mathscr{D}(T)\subset H$, 而H是一复 Hilbert 空间. T称为闭线性算子, 如果其图象

$$\mathscr{G}(T)=\{(x,y)\mid x\in\mathscr{D}(T),\ y=Tx\}$$

在$H\times H$中是闭的, 这里$H\times H$上的范数由下式定义:

$$\|(x,y)\|=(\|x\|^2+\|y\|^2)^{1/2}.$$

上式由下式定义的内积而得出:

$$\langle(x_1,y_1),\ (x_2,y_2)\rangle=\langle x_1,x_2\rangle+\langle y_1,y_2\rangle. \qquad \blacksquare$$

10.3-2 定理 (闭线性算子) 设$T:\mathscr{D}(T)\to H$是一线性算子, 其中$\mathscr{D}(T)\subset H$, 而H是一复 Hilbert 空间. 则

(a) T是闭的, 当而且仅当

$$x_n\to x\ [x_n\in\mathscr{D}(T)],\ \text{且}\ Tx_n\to y,$$

两者一起就蕴含$x\in\mathscr{D}(T)$且$Tx=y$. (见4.13-3)

(b) 如果T是闭的且$\mathscr{D}(T)$是闭的. 则T是有界的. (见4.13

-2)。

(c) 设T是有界的，则T为闭的当而且仅当$\mathscr{D}(T)$是闭的(见4.13-5)。

不管T是否闭的，我们总有下面的重要结果。

10.3-3 定理 (Hilbert 伴随算子) 10.1-2中所定义的Hilbert 伴随算子T^*是闭的。

证. 我们应用定理10.3-2(a)于T^*，来证明定理的结论；即我们考察$\mathscr{D}(T^*)$中满足次之条件的任一序列(y_n)

$$y_n \to y_0, \quad 且 T^* y_n \to z_0,$$

并证明$y_0 \in \mathscr{D}(T^*)$，且$z_0 = T^* y_0$。

由T^*的定义，对每一$y \in \mathscr{D}(T)$有

$$\langle Ty, y_n \rangle = \langle y, T^* y_n \rangle.$$

因为内积是连续的，让$n \to \infty$，故对一切$y \in \mathscr{D}(T)$有

$$\langle Ty, y_0 \rangle = \langle y, z_0 \rangle.$$

由T^*的定义，上式表明$y_0 \in \mathscr{D}(T^*)$，且$z_0 = T^* y_0$。应用定理10.3-2(a)于T^*，我们即可断定T^*是闭的。▌

常常发生这样的事，一个算子不是闭的，但是有一扩张是闭的。为了讨论这种情形，我们首先表述某些有关的概念。

10.3-4 定义 (可闭算子，闭包) 如果线性算子T有一扩张T_1为闭线性算子，则T称为**可闭的**，而T_1称为T的**闭线性扩张**。

一可闭线性算子T之一闭线性扩张$\bar{T}$称为极小的，如果T的每一闭线性扩张T_1都是$\bar{T}$之一闭线性扩张。T的这一极小的扩张$\bar{T}$——如果存在——称为T的闭包。▌

如果$\bar{T}$存在，则是唯一的（为什么？）

如果T不是闭的，则发生一个问题，是否T有闭扩张。

例如，实际上，在量子力学中一切无界线性算子都是可闭的。

对对称线性算子（见 10.2-3），情况就非常简单，即有如下的结果.

10.3-5 定理(闭包) 设$T:\mathscr{D}(T)\to H$是一线性算子，这里H是一复Hilbert 空间，$\mathscr{D}(T)$在H中稠密。则当T是对称的，其闭包$\bar{T}$存在而且是唯一的。

证。我们定义$\bar{T}$，首先定义定义域$M=\mathscr{D}(\bar{T})$，然后再定义$\bar{T}$本身。这样我们就实际上证明了$\bar{T}$是T的闭包。

设M是所有这样的点$x\in H$的集合，对该点x在$\mathscr{D}(T)$中存在序列(x_n)和$y\in H$，使得

(1) $\quad x_n\to x$ 而且 $Tx_n\to y$.

不难证明M是一向量空间。显然$\mathscr{D}(T)\subset M$. 在M上我们由下式定义$\bar{T}$：

$$y=\bar{T}x, \quad (x\in M),$$

其中y由(1)式给出，为了证明$\bar{T}$是T的闭包，我们必须证明$\bar{T}$具有定义闭包的一切性质。

显然，$\bar{T}$的定义域$\mathscr{D}(\bar{T})=M$，其次，我们将证明

(*a*) 对每一$x\in\mathscr{D}(\bar{T})$对应唯一y。

(*b*) $\bar{T}$是T的一对称线性扩张。

(*c*) $\bar{T}$是闭的，而且是T的闭包。

详细证明如下：

(*a*) 对每一$x\in\mathscr{D}(\bar{T})$所对应的y的唯一性。除(1)中的序列(x_n)而外，设$(\tilde{x}_n)$是$\mathscr{D}(T)$中另外的一序列，使得

$$\tilde{x}_n\to x \text{ 且 } T\tilde{x}_n\to\tilde{y}.$$

因T是线性的，故$Tx_n-T\tilde{x}_n=T(x_n-\tilde{x}_n)$。因$T$是对称的，于是对每一$v\in\mathscr{D}(T)$有

$$\langle v, Tx_n - T\tilde{x}_n\rangle = \langle Tv, x_n - \tilde{x}_n\rangle.$$

让 $n\to\infty$，利用内积的连续性，即得

$$\langle v, y-\tilde{y}\rangle = \langle Tv, x-x\rangle = 0,$$

即 $y-\tilde{y}\perp\mathscr{D}(T)$，因 $\mathscr{D}(T)$ 在 H 中稠密，由 3.3-7 有$\mathscr{D}(T)^{\perp}=\{0\}$，因而 $y-\tilde{y}=0$。

(*b*) 证明$\bar{T}$ 是 T 之一对称的线性扩张。因T 是线性的，故由(1)和(2)$\bar{T}$亦然，这也就证明了 $\bar{T}$ 是 T之一扩张。现在我们证明T的对称性蕴含 $\bar{T}$ 的对称性。由(1) 和 (2) 对一切 $x,z\in\mathscr{D}(\bar{T})$ 在$\mathscr{D}(T)$中存在序列(x_n)和(z_n)使得

$$x_n\to x,\quad Tx_n\to\bar{T}x,$$

$$z_n\to z,\quad Tz_n\to\bar{T}z.$$

因T 是对称的，故 $\langle z_n, Tx_n\rangle = \langle Tz_n, x_n\rangle$。让$n\to\infty$，因内积是连续的，故有 $\langle z,\bar{T}x\rangle=\langle\bar{T}z,x\rangle$。因 $x,z\in\mathscr{D}(\bar{T})$ 是任意的，这就表明$\bar{T}$是对称的。

(*c*) 证明$\bar{T}$是闭的而且是T的闭包。我们借助于定理 10.3-2 (*a*)证明$\bar{T}$的闭性，即考虑$\mathscr{D}(\bar{T})$中的任意序列 (w_m)，使得

(3) $\qquad w_m\to x$且 $\bar{T}w_m\to y$

并证明$x\in\mathscr{D}(\bar{T})$ 且 $\bar{T}x=y$。

每一w_m（m固定）都在$\mathscr{D}(\bar{T})$ 中。由$\mathscr{D}(\bar{T})$ 的定义在$\mathscr{D}(T)$中存在序列收敛于w_m，而且它在T下的象收敛于$\bar{T}w_m$，故对每一固定的m，存在$v_m\in\mathscr{D}(T)$，使得

$$\|w_m - v_m\| < \frac{1}{m} \text{ 且} \|\bar{T}w_m - Tv_m\| < \frac{1}{m}.$$

由上面的式子和(3)，我们断定

$$v_m\to x \text{ 且 } Tv_m\to y.$$

由 $\mathscr{D}(\bar{T})$ 和 $\bar{T}$ 的定义，这就证明了我们所需证明的关系式$x\in\mathscr{D}(\bar{T})$，且$y=\bar{T}x$。故由10.3-2(*a*)$\bar{T}$是闭的。

由定理10.3-2(*a*)和关于$\mathscr{D}(\bar{T})$ 的定义，我们看出，$\mathscr{D}(\bar{T})$中

的每一点也必属于T之每一闭线性扩张的定义域。这就证明了$\bar{T}$是T的闭包，而且指出T的闭包是唯一的。▌

有趣的是，不难看出，对称线性算子的闭包的 Hilbert 伴随算子等于算子本身的Hilbert 伴随算子。

10.3-6 定理（闭包的 Hilbert 伴随） 对前一定理中的对称线性算子 T，我们有

(4) $(\bar{T})^*=T^*$.

证。因$T\subset\bar{T}$，故由定理10.2-1(a)有$(\bar{T})^*\subset T^*$。因此$\mathscr{D}((\bar{T})^*)\subset\mathscr{D}(T^*)$。我们还需要证明的是，

(5) $y\in\mathscr{D}(T^*)\Rightarrow y\in\mathscr{D}((\bar{T})^*)$,

因为这时我们就有$\mathscr{D}((\bar{T})^*)=\mathscr{D}(T^*)$，这就推出(4)。

设$y\in\mathscr{D}(T^*)$，由 Hilbert 伴随算子的定义，公式(5)意味着我们必须证明，对每一$x\in\mathscr{D}(\bar{T})$有

(6) $\langle\bar{T}x,y\rangle=\langle x,(\bar{T})^*y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$,

其中第二个等号由$(\bar{T})^*\subset T^*$得出。

根据前面证明中$\mathscr{D}(\bar{T})$和$\bar{T}$的定义〔见(1)，(2)〕，对每一$x\in\mathscr{D}(\bar{T})$在$\mathscr{D}(T)$中存在序列(x_n)，使得

$$x_n\to x\text{且 }Tx_n\to y_0=\bar{T}x.$$

因由假设$y\in\mathscr{D}(T^*)$，且$x_n\in\mathscr{D}(T)$，故由 Hilbert 伴随算子的定义，我们有

$$\langle Tx_n,y\rangle=\langle x_n,T^*y\rangle.$$

若令$n\to\infty$，并引用内积的连续性，即得

$$\langle\bar{T}x,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,\quad x\in\mathscr{D}(\bar{T}),$$

这就是我们所要证明的关系式(6)。▌

习　　题

1. 设$T:\mathscr{D}(T)\to l^2$，其中$\mathscr{D}(T)\subset l^2$由所有这样的$x=(\xi_j)$组成，该$x$仅

有有限多非零项ξ_j，而且$y=(\eta_j)=Tx=(j\xi_j)$．这一算子T是无界的(见10.1节，习题8)．试证T不是闭的．

2．显然任一线性算子$T:\mathscr{D}(T)\to H$的图象$\mathscr{G}(T)$有一闭包$\overline{\mathscr{G}(T)}\subset H\times H$．为什么这不能推出每一线性算子是可闭的?

3．试证$H\times H$是一Hilbert空间，其中内积由定义10.3-1给出．

4．设$T:\mathscr{D}(T)\to H$是一闭线性算子．若T是内射的，试证T^{-1}是闭的．

5．试证第1题中的T有到集合

$$\mathscr{D}(T_1)=\left\{x=(\xi_j)\in l^2 \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} j^2|\xi_j|^2<\infty\right\}$$

之一闭线性扩张T_1，这里T_1由下式定义

$T_1x=(j\xi_j)$．(利用第4题)．

6．若T是一对称线性算子，试证T^{**}是T之一闭对称的线性扩张．

7．试证一线性算子T的Hilbert伴随算子的图象$\mathscr{G}(T^*)$借助于下式

$\mathscr{G}(T^*)=[U(\mathscr{G}(T))]^{\perp}$

与$\mathscr{G}(T)$相联系，其中U：$H\times H\to H\times H$由$(x,y)\mapsto(y,-x)$定义．

8．若T：$\mathscr{D}(T)\to H$是稠定闭线性算子，试证明T^*是稠定的，而且$T^{**}=T$．(用第7题)．

9．(闭图象定理)．试证复Hilbert空间H上的闭线性算子$T:H\to H$是有界的．(利用第8题．不用4.13-2，当然就给出一独立的证明)．

10．若T是闭的，试证$T_\lambda=T-\lambda I$是闭的．而且若T_λ^{-1}存在，则T_λ^{-1}是闭的．

10.4 自伴线性算子的谱的性质

有界自伴线性算子的谱的一般性质我们已在9.1和9.2节中讨论过。其中的几个性质对无界自伴线性算子仍然成立。特别，固有值是实的，其证明与定理9.1-1中的证明相同。

更一般地，整个谱仍是实的和闭的，虽然它不再有界。为了证明谱的实性，让我们首先推广定理9.1-2，这一定理刻划了豫解集$\rho(T)$。证明几乎与前面的一样。

10.4-1 定理(正则值) 设$T:\mathscr{D}(T)\to H$是在复 Hilbert 空间H中稠定的自伴线性算子，则数λ属于T的豫解集$\rho(T)$，当而且仅当存在$c>0$，使得对每一$x\in\mathscr{D}(T)$

(1) $\|T_\lambda x\|\geqslant c\|x\|$,

其中 $T_\lambda=T-\lambda I$.

证．(a) 设$\lambda\in\rho(T)$．由定义7.2-1，豫解式$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}$存在而且是有界的，比如说，$\|R_\lambda\|=k>0$．因对$x\in\mathscr{D}(T)$有 $R_\lambda T_\lambda x=x$，从而有

$$\|x\|=\|R_\lambda T_\lambda x\|\leqslant\|R_\lambda\|\|T_\lambda x\|=k\|T_\lambda x\|.$$

除以k，即得$\|T_\lambda x\|\geqslant c\|x\|$，其中 $c=\frac{1}{k}$.

(b) 反之，设对某一 $c>0$ 和一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ (1) 成立．现我们考察向量空间

$$Y=\{y\mid y=T_\lambda x, x\in\mathscr{D}(T)\},$$

即T_λ的值域，并证明

(α) $T:\mathscr{D}(T)\to Y$是双射的；

(β) Y在H中稠密；

(γ) Y是闭的．

上面这些一起就蕴含豫解式 $R_\lambda=(T_\lambda)^{-1}$ 定义在整个 H 上，R_λ的有界性易由(1)得出，故$\lambda\in\rho(T)$．详细证明如下：

(α) 考察任意的$x_1,x_2\in\mathscr{D}(T)$使得 $T_\lambda x_1=T_\lambda x_2$．因$T_\lambda$是线性的，故(1)得出

$$0=\|T_\lambda x_1-T_\lambda x_2\|=\|T_\lambda(x_1-x_2)\|\geqslant c\|x_1-x_2\|.$$

因 $c>0$，这就蕴含$\|x_1-x_2\|=0$．故 $x_1=x_2$，因而算子 $T_\lambda:\mathscr{D}(T)\to Y$是双射的．

(β) 我们借助于证明当$x_0\perp Y$时，就有 $x_0=0$ 来证明 $\bar{Y}=H$．设$x_0\perp y$，于是对每一$y=T_\lambda x\in Y$有

$$0=\langle T_\lambda x,x_0\rangle=\langle Tx,x_0\rangle-\lambda\langle x,x_0\rangle.$$

于是对一切$x\in\mathscr{D}(T)$有

$$\langle Tx, x_0\rangle=\langle x, \bar{\lambda}x_0\rangle.$$

由 Hilbert 伴随算子的定义，上式表明$x_0\in\mathscr{D}(T^*)$，而且

$$T^*x_0=\bar{\lambda}x_0.$$

因T是自伴的，故$\mathscr{D}(T^*)=\mathscr{D}(T)$且$T^*=T$；于是

$$Tx_0=\bar{\lambda}x_0.$$

若$x_0\neq 0$，这就会推出$\bar{\lambda}$是T之一固有值，于是$\bar{\lambda}=\lambda$必是实的。故$Tx_0=\lambda x_0$，即$T_\lambda x_0=0$。但由(1)这就得出一矛盾

$$0=\|T_\lambda x_0\|\geqslant c\|x_0\|\Rightarrow\|x_0\|=0.$$

即得$\bar{Y}^\perp=\{0\}$，故由3.3-4 $\bar{Y}=H$。

(γ) 现证Y是闭的。设$y_0\in\bar{Y}$。则在Y中存在一序列(y_n)，使得$y_n\to y_0$。因$y_n\in Y$，故对某一$x_n\in\mathscr{D}(T_\lambda)=\mathscr{D}(T)$有$y_n=T_\lambda x_n$。由(1)

$$\|x_n-x_m\|\leqslant\frac{1}{c}\|T_\lambda(x_n-x_m)\|=\frac{1}{c}\|y_n-y_m\|.$$

因(y_n)收敛，这就证明了(x_n)是 Cauchy 列。因H是完备的，故(x_n)收敛，比如说，$x_n\to x_0$。因T是自伴的，由10.3-3它是闭的。定理10.3-2(a)于是蕴含$x_0\in\mathscr{D}(T)$且$T_\lambda x_0=y_0$。这就证明了$y_0\in Y$。因$y_0\in\bar{Y}$是任意的，故Y是闭的。

(β)和(γ)两部分一起就推出$Y=H$。由此及(α)，我们看出豫解式R_λ存在，而且是定义在整个H上：

$$R_\lambda=T_\lambda^{-1}: H\to\mathscr{D}(T).$$

由2.6-10，R_λ是线性的。R_λ的有界性由(1)得之。这是因为对每一$y\in H$和相应的$x=R_\lambda y$我们有$y=T_\lambda x$，另由(1)

$$\|R_\lambda y\|=\|x\|\leqslant\frac{1}{c}\|T_\lambda x\|=\frac{1}{c}\|y\|,$$

故$\|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{c}$。由定义，这就证明了$\lambda\in\rho(T)$。∎

当其利用刚才证明的定理推广定理9.1-3时，现在我们就可以证明自伴线性算子（可能是无界的）的谱是实的。

10.4-2 定理(谱) 自伴线性算子 $T:\mathscr{D}(T)\to H$ 的谱 $\sigma(T)$ 是实和闭的；这里H是一复 Hilbert 空间且$\mathscr{D}(T)$在H中稠密。

证。(a)$\sigma(T)$的实性。对$\mathscr{D}(T)$中的每一$x\neq 0$，有

$$\langle T_\lambda x, x\rangle=\langle Tx, x\rangle-\lambda\langle x, x\rangle,$$

又因$\langle x, x\rangle$和$\langle Tx, x\rangle$是实的（见10.2节），故

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle}=\langle Tx, x\rangle-\bar{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

我们记$\lambda=\alpha+i\beta$，其中α,β为实数。则$\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$，相减得

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle}-\langle T_\lambda x, x\rangle=(\lambda-\bar{\lambda})\langle x, x\rangle=2i\beta\|x\|^2.$$

左端等于$-2iI_m\langle T_\lambda x, x\rangle$。因为一复数的虚部不能超过绝对值，于是由Schwarz不等式有

$$|\beta|\|x\|^2\leqslant|\langle T_\lambda x, x\rangle|\leqslant\|T_\lambda x\|\|x\|.$$

以$\|x\|\neq 0$除之，得$|\beta|\|x\|\leqslant\|T_\lambda x\|$。注意这一不等式对一切$x\in\mathscr{D}(T)$成立。若$\lambda$不是实的，$\beta\neq 0$，则由前面的定理$\lambda\in\rho(T)$。因而$\sigma(T)$必是实的。

(b) $\sigma(T)$的闭性。我们借助于证明豫解集$\rho(T)$是开的以证明$\sigma(T)$是闭的。为此我们考察任一$\lambda_0\in\rho(T)$并证明对每一充分靠近λ_0的λ也属于$\rho(T)$。

由三角不等式

$$\begin{aligned}\|Tx-\lambda_0 x\|&=\|Tx-\lambda x+(\lambda-\lambda_0)x\|\\&\leqslant\|Tx-\lambda x\|+|\lambda-\lambda_0|\|x\|.\end{aligned}$$

上式可以写成

$$\|Tx-\lambda x\|\geqslant\|Tx-\lambda_0 x\|-|\lambda-\lambda_0|\|x\|. \tag{2}$$

因$\lambda_0\in\rho(T)$，由定理10.4-1存在$c>0$使得对一切$x\in\mathscr{D}(T)$

$$\|Tx-\lambda_0 x\|\geqslant c\|x\|. \tag{3}$$

现在假定λ靠近λ_0，比如说，$|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{c}{2}$。于是(2)和(3)就蕴含对一切$x\in\mathscr{D}(T)$有

$$\|Tx-\lambda x\|\geqslant c\|x\|-\frac{1}{2}c\|x\|=\frac{1}{2}c\|x\|。$$

故由定理 10.4-1，$\lambda\in\rho(T)$。因λ是使得$|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{c}{2}$的任意的数，这就表明$\lambda_0$有一邻域整个属于$\rho(T)$。因$\lambda_0\in\rho(T)$是任意的，故我们断定$\rho(T)$是开的。从而$\sigma(T)=\mathbf{C}-\rho(T)$是闭的。■

习　　题

1．不用定理 10.4-2，试证明自伴线性算子（可能无界）的固有值是实的．

2．试证明，对应于自伴线性算子的不同固有值的固有向量是正交的．

3．（近似固有值）．设$T:\mathscr{D}(T)\to H$是一线性算子，若对一复数λ，在$\mathscr{D}(T)$中存在一序列(x_n)，使得$\|x_n\|=1$，且

$(T-\lambda I)x_n\to 0\ (n\to\infty)$，

则λ常称为T的近似固有值．试证明自伴线性算子T的谱完全由近似固有值所组成．

4．设$T:\mathscr{D}(T)\to H$是一线性算子，试按照下面的性质：(A) T_λ不是内射的．(B) $\mathscr{R}(T_\lambda)$不在H中稠密．(C) λ是一近似固有值（见第3题），分别刻划λ在$\rho(T)$，$\sigma_p(T)$，$\sigma_c(T)$和$\sigma_r(T)$的事实．

5．设$T:\mathscr{D}(T)\to H$是一线性算子，其 Hilbert 伴随算子T^*存在，若$\lambda\in\sigma_r(T)$，试证明$\bar{\lambda}\in\sigma_p(T^*)$．

6．在第5题中若$\bar{\lambda}\in\sigma_p(T^*)$，试证$\lambda\in\sigma_r(T)\cup\sigma_p(T)$．

7．（剩余谱）．利用第5题，试证明自伴线性算子$T:\mathscr{D}(T)\to H$的剩余谱$\sigma_r(T)$是空的．注意，这就意味着定理 9.2-4 在无界的情形也仍然成立．

8．若T_1是线性算子$T:\mathscr{D}(T)\to H$之一线性扩张，试证明

$\sigma_p(T)\subset\sigma_p(T_1)$，

$\sigma_r(T)\supset\sigma_r(T_1)$，

$$\sigma_c(T)\subset\sigma_c(T_1)\cup\sigma_p(T_1).$$

9. 试证明：一对称线性算子$T:\mathscr{D}(T)\to H$的点谱$\sigma_p(T)$是实的．若H是可分的，试证$\sigma_p(T)$是可数的（也许是有限的，甚至于是空的）．

10. 若$T:\mathscr{D}(T)\to H$是对称线性算子，而且λ不是实的，试证明T的豫解式R_λ存在，而且是满足次之条件的有界线性算子：对每一$y\in\mathscr{R}(T_\lambda)$有

$$\|R_\lambda y\|\leqslant\|y\|/|\beta|,\quad(\lambda=\alpha+i\beta)$$

故$\lambda\in\rho(T)\cup\sigma_r(T)$.

10.5 酉算子的谱表示

我们的目的是得出自伴线性算子（可以是无界的）的谱表示，我们将从酉算子的谱表示来得到这种表示，而酉算子如我们在3.10节所知道的，它是有界的线性算子。按照这种方法，我们必须首先导出酉算子的谱定理。

我们由证明酉算子的谱（见定义3.10-1）位于复平面的单位圆周上（中心在0，半径为1的圆周见图66.）

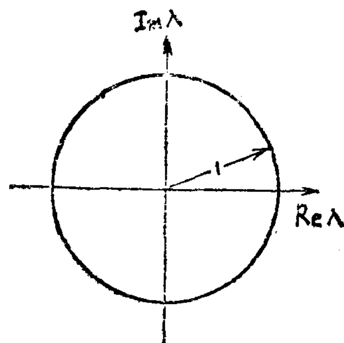


图66 复平面中的单位圆周

10.5-1 定理（谱） 若$U:H\to H$是复Hilbert空间$H\neq\{0\}$上的酉线性算子，则谱$\sigma(U)$是单位圆周上之一闭子集；因而对每一$\lambda\in\sigma(U)$有

$$|\lambda|=1.$$

证．由定理3.10－6(*b*)我们有$\|U\|=1$．故由定理7.3-4，对一切$\lambda\in\sigma(U)$有$|\lambda|\leqslant1$．因为当$\lambda=0$时U的豫解算子是$U^{-1}=U^*$，故也有$0\in\rho(U)$．由定理3.10-6(*c*)，算子U^{-1}是酉的．故$\|U^{-1}\|=1$．定理7.3-3（其中取$T=U$，$\lambda_0=0$）现在就蕴含对每一满足

$|\lambda|<1/\|U^{-1}\|=1$ 的 λ 都属于 $\rho(U)$。故 U 的谱必位于单位圆周上。由定理7.3-2，它是闭的。▌

可以用很多种方法得出酉算子的谱定理；见，例如，J. von Neumann(1929—30)，PP. 80,119，M.Stone(1932)，P.302，K. Friedrichs(1935)，及F. Riesz，B. Sz.-Nagy(1955)，P.281。我们将借助于幂级数和F. J. Wecken(1935) 中的引理（下面的10.5-3）来处理这一问题。这就得出用有界自伴线性算子表示酉算子的表示。由这一表示和谱定理9.10-1，于是我们就将得出所要求的U的谱定理。我们还应该提到这一定理首先由A. Wintner(1929)，P.274得出。

利用有关算子的幂级数，似乎相当自然，这只要回忆一下7.3 节中之一特殊的几何级数即可得知。其次为了对给定的 T 和连续函数 f 定义 $f(T)$，在 9.10 节我们曾采用多项式序列。类似地，幂级数的部分和构成一多项式序列，我们可以利用这种级数定义一线性算子，我们将需要这种算子的下述性质。

10.5-2 引理（幂级数） 设

$$(1)\qquad h(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n \quad (\alpha_n \text{ 是实数})$$

对一切满足$|\lambda|\leqslant k$的λ是绝对收敛的。设$S\in B(H,H)$是自伴的，而且有范数$\|S\|\leqslant k$，这里H是一复 Hilbert 空间。则

$$(2)\qquad h(S)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n S^n$$

是一有界自伴线性算子，而且

$$(3)\qquad \|h(s)\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|k^n.$$

如果一有界线性算子与S可交换，则它也与$h(s)$可交换。

证。设$h_n(\lambda)$表(1)中的级数的第n个部分和。因为当$|\lambda|\leqslant k$时级数绝对收敛（故也一致收敛）。(2)的收敛性由$\|S\|\leqslant k$得之，而且有

$$\|\sum \alpha_n S^n\| \leqslant \sum |\alpha_n| \|S\|^n \leqslant \sum |\alpha_n| k^n.$$

因为H是完备的，故绝对收敛性蕴含收敛性。我们用$h(S)$表级数的和。注意这与9.10节中的相一致，因为$h(\lambda)$连续，且$h_n(\lambda)\to h(\lambda)$对$|\lambda|\leqslant k$一致成立。算子$h(S)$是自伴的。事实上，因$h_n(S)$是自伴的，故由3.10-3，$\langle h_n(S)x,x\rangle$是实的，由内积的连续性，因此$\langle h(S)x,x\rangle$是实的。因$H$是复的，于是由3.10-3 $h(S)$是自伴的。

现证(3)。因$\|S\|\leqslant k$，故定理9.2-2给出$[m,M]\subset[-k,k]$。又由定理9.9-2(f)有

$$\|h_n(S)\| \leqslant \max_{\lambda\in J} |h_n(\lambda)| \leqslant \sum_{j=0}^{n} |\alpha_j| k^j,$$

其中$J=[m,M]$。让$n\to\infty$，即得(3)。

最后的论断由定理9.10-2得出。∎

如果有两个收敛的幂级数，我们可以按通常的方式使之相乘。所得的式子又可以写作为一幂级数。类似地，如果(1)对一切λ收敛，我们可以代λ以一关于μ的收敛幂级数，比如说，把所得结果写作μ的幂级数，即按μ的幂次整理和排列所得的结果。如象$\cos^2 s$，sin (arccosV) 等等就理解为在此意义下的式子。

由刚才证明的引理，现在可得出我们的主要工具，它就是下面的F.J. Wecken(1935)所证明的引理。我们应提及，这一引理也可用以导出有界自伴线性算子的谱定理。这一点已被 Wecken 指出，并把它表述成下面的引理，这里所给出的是其原来的形式。

10.5-3 Weckcn 引理 设W和A是复 Hilbert 空间H上的有界自伴线性算子。设$WA=AW$且$W^2=A^2$。设P是H到零空间$\mathcal{N}(W-A)$上的投影。则

(*a*) 若有界线性算子与$W-A$可交换，则它也与P可交换。

(*b*) $Wx=0$就蕴含$Px=x$。

(*c*) 我们有$W=(2P-I)A$。

证. (*a*)设B与$W-A$可交换. 因对每一$x\in H$ 有 $Px\in\mathcal{N}(W-A)$，故我们有

$$(W-A)BPx=B(W-A)Px=0.$$

这就证明了$BPx\in\mathcal{N}(W-A)$，而且推出$P(BPx)=BPx$，即

$$PBP=BP. \tag{4}$$

现证$PBP=PB$. 因$W-A$是自伴的，故由3.9节中的(6g)得出

$$(W-A)B^*=[B(W-A)]^*=[(W-A)B]^*=B^*(W-A).$$

上式表明$W-A$和B^*是可交换的. 因此，按前面一样的讨论. 我们得出类似于(4)的式子 $PB^*P=B^*P$. 因投影是自伴的（见9.5-1)，即得

$$PBP=(PB^*P)^*=(B^*P)^*=PB.$$

与(4)一起有$BP=PB$.

(*b*) 设$Wx=0$. 因A和W是自伴的，而且$A^2=W^2$，即得

$$\|Ax\|^2=\langle Ax,\ Ax\rangle=\langle A^2x,x\rangle=\langle W^2x,x\rangle=\|Wx\|^2=0,$$

即 $Ax=0$. 故 $(W-A)x=0$. 这就证明了 $x\in\mathcal{N}(W-A)$. 因P是H到$\mathcal{N}(W-A)$上的投影，故$Px=x$.

(*c*) 由假定$W^2=A^2$且$AW=WA$，故有

$$(W-A)(W+A)=W^2-A^2=0.$$

于是对每一 $x\in H$，$(W+A)x\in\mathcal{N}(W-A)$. 因$P$把$H$投影到$\mathcal{N}(W-A)$上，故对每一$x\in H$，有

$$P(W+A)x=(W+A)x,$$

即

$$P(W+A)=W+A.$$

可是由(a) $P(W-A)=(W-A)P$，而且因P把H投影到$\mathcal{N}(W-A)$上，故有$(W-A)P=0$。于是有

$$2PA=P(W+A)-P(W-A)=W+A.$$

我们看出$2PA-A=W$，这就证明了(c)。∎

所要求的谱定理现在可以叙述如下：

10.5-4 酉算子的谱定理 设$U:H\to H$是复Hilbert空间$H\neq\{0\}$上的酉算子。则在$[-\pi,\pi]$上存在一谱族$\mathcal{E}=(E_\theta)$，使得

$$(5)\qquad U=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}dE_\theta=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta)dE_\theta.$$

更一般地，对定义在单位圆周上的每一连续函数f，有

$$(6)\qquad f(U)=\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\theta})dE_\theta,$$

其中积分理解为按一致算子收敛意义下，而且对一切的$x,y\in H$

$$(6^*)\qquad \langle f(U)x,y\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})dw(\theta),\quad w(\theta)=\langle E_\theta x,y\rangle,$$

这里的积分是通常的 Riemann-Stieltjes 积分（见4.4节）。

证。我们将证明对一给定的酉算子U，存在一有界自伴线性算子S，其谱$\sigma(S)\subset[-\pi,\pi]$，并使得

$$(7)\qquad U=e^{iS}=\cos S+i\sin S.$$

一旦S的存在性已被证明，(5)和(6)就将易于由谱定理9.9-1和9.10-1得出。我们按以下步骤进行证明。

(a) 若S存在，我们证明(7)中的U是酉算子。

(b) 我们记

$$(8)\qquad U=V+iW,$$

其中

(9) $V=\frac{1}{2}(U+U^*)$, $W=\frac{1}{2i}(U-U^*)$,

并证明V和W是自伴的，而且

(10) $-I\leqslant V\leqslant I$, $-I\leqslant W\leqslant I$.

(c) 考察$g(V)=\arccos V$和$A=\sin g(V)$的某些性质。

(d) 证明所要求的算子S是

(11) $S=(2P-I)(\arccos V)$,

这里P是H到$\mathcal{N}(W-A)$上的投影。

详细证明如下：

(a) 若S是有界和自伴的，由引理10.5-2知 $\cos S$和$\sin S$亦为有界自伴的。由同一引理，这些算子是可交换的。这就蕴含(7)式中的U是酉算子，因为，由3.9-4有

$$
\begin{aligned}
UU^*&=(\cos S+i\sin S)(\cos S-i\sin S)\\
&=(\cos S)^2+(\sin S)^2\\
&=(\cos^2+\sin^2)(S)=I.
\end{aligned}
$$

类似可证，$U^*U=I$.

(b) (9)中V与W的自伴性由3.9-4得知。因$UU^*=U^*U(=I)$，故有

(12) $VW=WV$.

由3.10-6还有$\|U\|=\|U^*\|=1$，由(9)这就推出

(13) $\|V\|\leqslant 1$, $\|W\|\leqslant 1$.

故Schwarz不等式给出

$$|\langle Vx,x\rangle|\leqslant\|Vx\|\|x\|\leqslant\|V\|\|x\|^2\leqslant\langle x,x\rangle,$$

即$-\langle x,x\rangle\leqslant\langle Vx,x\rangle\leqslant\langle x,x\rangle$。这就证明了(10)中的第一个公式。第二公式由同样的方法可得。而且，由(9)直接计算得

(14) $V^2+W^2=I$.

(c) 现考察

$$g(\lambda)=\arccos\lambda=\frac{\pi}{2}-\arcsin\lambda=\frac{\pi}{2}-\lambda-\frac{1}{6}\lambda^3-\cdots.$$

右端的Maclaurin级数当$|\lambda|\leqslant 1$时收敛。（在$\lambda=1$处的收敛性只要注意 $\arcsin\lambda$ 的级数有正系数即可得知，故其部分和S_n的序列当$\lambda>0$时是单调的，且在$(0,1)$上是有界的，因为$S_n(\lambda)<\arcsin\lambda<\frac{\pi}{2}$。故对每一$n$，当$\lambda\to 1$时有$S_n(\lambda)\to S_n(1)\leqslant\frac{\pi}{2}$。在$\lambda=-1$的收敛性易由在$\lambda=1$处的收敛性得出。

因由(13)$\|V\|\leqslant 1$，故引理10.5-2蕴含算子

(15) $$g(V)=\arccos V=\frac{\pi}{2}I-V-\frac{1}{6}V^3-\cdots$$

存在而且是自伴的。现在我们定义

$$A=\sin g(V).$$

这是关于V的幂级数，引理10.5-2蕴含A是自伴的而且与V可交换，另由(12)知，它也与W可交换。因由(15)

$$\cos g(V)=V,$$

故有

$$V^2+A^2=(\cos^2+\sin^2)(g(V))=I.$$

与(14)相比较得$W^2=A^2$。故可以应用 Wecken 引理 10.5-3，断定

(18) $$W=(2P-I)A.$$

$Wx=0$蕴含$Px=x$，而且P与V和$g(V)$都可交换，因为这些算子与$W-A$可交换。

(d) 现在我们定义

(19) $$S=(2P-I)g(V)=g(V)(2P-I).$$

显然S是自伴的。我们证明S满足(7)。令$\kappa=\lambda^2$并由下面的式子定义h_1和h_2

$$h_1(\kappa)=\cos\lambda=1-\frac{1}{2!}\lambda^2+-\cdots.$$

(20) $\lambda h_2(\kappa)=\sin\lambda=\lambda-\frac{1}{3!}\lambda^3+-\cdots.$

这些函数对一切 κ 存在．因 P 是一投影，故有 $(2P-I)^2=4P-4P+I=I$．因而(19)给出

(21) $S^2=(2P-I)^2g(V)^2=g(V)^2.$

于是由(17)

$$\cos S=h_1(S^2)=h_1(g(V)^2)=\cos g(V)=V.$$

现在我们证明 $\sin S=W$．引用(20)，(16)和(18)得

$$\begin{aligned}\sin S&=Sh_2(S^2)\\&=(2P-I)g(V)h_2(g(V)^2)\\&=(2P-I)\sin g(V)\\&=(2P-I)A=W.\end{aligned}$$

下证 $\sigma(S)\subset[-\pi,\pi]$．因为 $|\arccos\lambda|\leqslant\pi$．故由定理9.10-2我们可以断定 $\|S\|\leqslant\pi$．又因 S 是自伴和有界的，故 $\sigma(S)$ 是实的，由定理7.3-4即得结果．

设 (E_θ) 是 S 的谱族．则(5)和(6)由(7)和关于有界自伴线性算子的谱定理9.10-1得出．

特别应注意的是，不失一般性我们可以取 $-\pi$（代替 $-\pi-0$）为(5)和(6)中的积分的下限．其理由如下：如果我们有一谱族，称之为 $(\widetilde{E}_\theta)$，使得 $\widetilde{E}_{-\pi}\neq 0$，那我们就必须取 $-\pi-0$ 作为那些积分的下限，可是，那时我们同样可以用 E_θ 代替 $\widetilde{E}_\theta$，这里 E_θ 由下式定义：

$$E_\theta=\begin{cases}0 & \text{若}\quad \theta=-\pi,\\ \widetilde{E}_\theta-\widetilde{E}_{-\pi} & \text{当}\,-\pi<\theta<\pi,\\ I & \text{当}\quad \theta=\pi.\end{cases}$$

E_θ 在 $\theta=-\pi$ 为连续，故(5)和(6)中积分的下限取为 $-\pi$ 是适宜的．▌

习　　题

1. 若一酉算子U有固有值λ_1和$\lambda_2 \neq \lambda_1$. 试证对应的固有向量x_1和x_2是正交的.

2. 试证酉算子是闭的.

3. 试证由$Ux(t)=x(t+c)$所定义的算子$U:L^2(-\infty,+\infty)\to L^2(-\infty,+\infty)$是酉的, 这里$c$是一给定的实数.

4. 若λ是一等距线性算子T的固有值. 试证$|\lambda|=1$.

5. 试证λ是一线性算子$T: \mathscr{D}(T)\to H$的一近似固有值（见10.4节, 习题3）当而且仅当T_λ没有有界逆.

6. 试证λ是一酉算子$U: H\to H$之一固有值, 当而且仅当$\overline{U_\lambda(H)} \neq H$.

7. 试证右位移算子$T: l^2\to l^2$, 其由$(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mapsto(0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$定义, 是等距的, 但不是酉的, 而且没有固有值.

8. 试证第7题中的算子的谱是闭的单位圆盘$M=\{\lambda \mid |\lambda|\leqslant 1\}$. 试推断定理10.5-1对等距算子不成立.

9. 试证$\lambda=0$不是第7题中的算子的近似固有值（见10.4节, 习题3）

10. 关于第7题到第9题值得相当注意的是由$y=Tx=(\xi_2,\xi_3,\cdots,)$, 其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, 定义的左位移算子$T: l^2\to l^2$有谱其大大地不同于右位移算子的谱. 事实上, 只要证明每一λ, $|\lambda|<1$是左位移算子的固有值. 试问对应的固有空间的维数是什么?

10.6　自伴线性算子的谱表示

现在我们将得出复 Hilbert 空间H上的自伴线性算子$T: \mathscr{D}(T)\to H$的谱表示, 这里$\mathscr{D}(T)$稠密于H, 而T可能是无界的.

为此, 对每一T我们作一算子

$$(1)\qquad U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$$

与之相对应, 并称U为T的 **Cayley 变换**.

算子U是酉的, 正如我们在下面的引理10.6-1中所证明的. 处理方法的要点是从有界算子U的谱定理（见定理10.5-4）我们

可能得出T（可能为无界）的谱定理。

T有谱$\sigma(T)$在复平面$\mathbf{C}$的实轴上（见10.4-2）可是酉算子的谱却在$\mathbf{C}$的单位圆周上（见10.5-1）。把实轴变到单位圆周之一$\mathbf{C}\to\mathbf{C}$的变换是①

$$(2)\qquad u=\frac{t-i}{t+i},$$

这就推出了(1)式。

现在我们证明U是酉算子。

10.6-1 引理(Cayley变换) 自伴线性算子$T:\mathscr{D}(T)\to H$的Cayley变换(1)在H上存在，而且是酉算子，这里$H\neq\{0\}$是一复Hilbert空间。

证．因T是自伴的，故$\sigma(T)$是实的（见10.4-2）。于是i和$-i$都属于豫解集$\rho(T)$。因此，由$\rho(T)$的定义，逆$(T+iI)^{-1}$和$(T-iI)^{-1}$在H之一稠子集上存在，而且是有界算子．定理10.3-3蕴含T是闭的，因为$T=T^*$。另由引理7.2-3我们看出那两个逆算子是定义在整个H上，即

$$(3)\qquad \mathscr{R}(T+iI)=H,\quad \mathscr{R}(T-iI)=H.$$

因I是定义在整个H上的，故我们有

$$(T+iI)^{-1}(H)=\mathscr{D}(T+iI)=\mathscr{D}(T)=\mathscr{D}(T-iI)$$

且

$$(T-iI)(\mathscr{D}(T))=H.$$

上式表明(1)中的U是H到其自身上的双射．由定理3.10-6(f)，我们还需证明U是等距的．为此，我们取任一$x\in H$，令$y=(T+iI)^{-1}x$并引用$\langle y,Ty\rangle=\langle Ty,y\rangle$，直接计算即得所要的结果：

$$\|Ux\|^2=\|(T-iI)y\|^2$$

① 这是一特殊的分式线性变换或Möbius变换．这些映象在大多数的复分析的教科书中都被考虑．亦见 E. Kreyszig(1972)，PP.498—506.

$$
\begin{aligned}
&=\langle Ty-iy, Ty-iy\rangle\\
&=\langle Ty, Ty\rangle+i\langle Ty, y\rangle-i\langle y, Ty\rangle+\langle iy, iy\rangle\\
&=\langle Ty+iy, Ty+iy\rangle\\
&=\|(T+iI)y\|^2\\
&=\|(T+iI)(T+iI)^{-1}x\|^2\\
&=\|x\|^2.
\end{aligned}
$$

于是定理3.10-6(f)现在就推出U为酉算子．▌

因为T的Cayley变换U是酉的，故U有一谱表示(见10.5-4)．现在我们由U的谱表示来得出T的谱表示。为此，我们必须知道如何才能用U表示T。

10.6-2 引理 (Cayley变换) 设T与引理10.6-1中的一样，设U由(1)定义。则

(4) $\qquad T=i(I+U)(I-U)^{-1}.$

而且，1不是U的固有值。

证。设$x\in\mathscr{D}(T)$且

(5) $\qquad y=(T+iI)x.$

因$(T+iI)^{-1}(T+iI)=I$，故

$$Uy=(T-iI)x.$$

把上面的两式相加和相减得

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&(a)\qquad (I+U)y=2Tx,\\
&(b)\qquad (I-U)y=2ix.
\end{aligned}
$$

由(5)和(3)我们看出$y\in\mathscr{R}(T+iI)=H$，而(6b)表明$I-U$映H到$\mathscr{D}(T)$上。由(6b)我们还看出，如果$(I-U)y=0$，则$x=0$，故由(5) $y=0$。于是由定理2.6-10知，$(I-U)^{-1}$存在，而且定义在$I-U$的值域上，由(6b)该值域是$\mathscr{D}(T)$。故(6b)给出

(7) $\qquad y=2i(I-U)^{-1}x,\ x\in\mathscr{D}(T)$

把上式代入(6a)，于是对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$

$$Tx=\frac{1}{2}(I+U)y$$
$$=i(I+U)(I-U)^{-1}x$$

这就证明了(4)

其次，因$(I-U)^{-1}$存在，故1不可能是Cayley变换U的固有值。▮

公式(4)表示T为酉算子U的函数。故我们可以应用定理10.5-4。这就得出下面的结果。

10.6-3 自伴线性算子的谱定理 设$T:\mathscr{D}(T)\to H$是一自伴线性算子，其中$H\neq\{0\}$是一复Hilbert空间，而$\mathscr{D}(T)$在H中稠密。设U是T的Cayley变换(1)，而(E_θ)是10.5节中$-U$的谱表示定理中的谱族，则对一切$x\in\mathscr{D}(T)$

$$(8)\qquad \langle Tx,x\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\tan\frac{\theta}{2}dw(\theta).\qquad w(\theta)=\langle E_\theta x,x\rangle$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\lambda dv(\lambda)\qquad v(\lambda)=\langle F_\lambda x,x\rangle$$

其中$F_\lambda=E_{2\arctan\lambda}$。

证。由谱定理10.5-4有

$$(9)\qquad -U=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\theta}dE_\theta=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta)dE_\theta.$$

在证明的(a)部分中，我们证明了(E_θ)在$-\pi$和π处是连续的。这一性质在建立(8)的(b)部分中是必需的。

(a) (E_θ)是称之为S的有界自伴线性算子的谱族。于是(见10.5节的(7))

$$(10)\qquad -U=\cos S+i\sin S.$$

由定理9.11-1知使(E_θ)为间断的点θ_0是S的固有值。于是存在

$x \neq 0$使得$Sx=\theta_0 x$。故对任意的多项式q，

$$q(S)x=q(\theta_0)x,$$

而且对$[-\pi,\pi]$上的任一连续函数g有

$$(11)\quad g(S)x=g(\theta_0)x.$$

因$\sigma(S)\subset[-\pi,\pi]$，故有$E_{-\pi-0}=0$。于是如果$E_{-\pi}\neq 0$，则$-\pi$就会是$S$之一固有值。由(10)和(11)，算子$U$就会有固有值

$$-\cos(-\pi)-i\sin(-\pi)=1,$$

这与引理10.6-2相矛盾。类似地，因$E_\pi=I$，如果$E_{\pi-0}\neq I$，就会导致1为U的固有值。

(b) 设$x\in H$，$y=(I-U)x$。因$I-U: H\to\mathscr{D}(T)$故$y\in\mathscr{D}(T)$，这正如在引理10.6-2的证明中所证明了的。由(4)即得

$$Ty=i(I+U)(I-U)^{-1}y=i(I+U)x.$$

因为由3.10-6，$\|Ux\|=\|x\|$，引用(9)，即得

$$\begin{aligned}\langle Ty,y\rangle&=\langle i(I+U)x,(I-U)x\rangle\\&=i(\langle Ux,x\rangle-\langle x,Ux\rangle)\\&=i(\langle Ux,x\rangle-\overline{\langle Ux,x\rangle})\\&=-2I_m\langle Ux,x\rangle\\&=2\int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta d\langle E_\theta x,x\rangle.\end{aligned}$$

故

$$(12)\quad \langle Ty,y\rangle=4\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\langle E_\theta x,x\rangle.$$

由定理10.5-4证明中最后的几行，我们记得(E_θ)是(10)中的有界自伴线性算子S的谱族。故由9.8-2，E_θ与S可交换，因而由10.5-2，E_θ与U也可交换。引用10.5节的(6*)，于是得出

$$\begin{aligned}\langle E_\theta y,y\rangle&=\langle E_\theta(I-U)x,(I-U)x\rangle\\&=\langle(I-U)^*(I-U)E_\theta x,x\rangle\\&=\int_{-\pi}^{\pi}(1+e^{-i\varphi})(1+e^{i\varphi})d\langle E_\varphi z,x\rangle,\end{aligned}$$

其中$z=E_\theta x$。因由9.7节的(7)式，当$\varphi\leqslant\theta$时$E_\varphi E_\theta=E_\varphi$，而且

$$(1+e^{-i\varphi})(1+e^{i\varphi})=(e^{i\varphi/2}+e^{-i\varphi/2})^2=4\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

因而得

$$\langle E_\theta y,y\rangle=4\int_{-\pi}^{\theta}\cos^2\frac{\varphi}{2}d\langle E_\varphi x,x\rangle.$$

利用上式，及E_θ在$\pm\pi$处的连续性，以及Stieltjes积分变换法则得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\tan\frac{\theta}{2}\,d\langle E_\theta y,y\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}\right)d\langle E_\theta x,x\rangle$$

$$=4\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\langle E_\theta x,x\rangle.$$

后一积分与(12)式中的一样，这就给出(8)中的第一个公式（除记号y代x外）。另一个公式用指定的变换

$$\theta=2\operatorname{arc\,tan}\lambda$$

即得。注意(F_λ)实际上是一谱族，特别当$\lambda\to-\infty$时，$F_\lambda\to0$，当$\lambda\to+\infty$时，$F_\lambda\to I$。∎

习　　题

1. 试求(2)的逆，并与(4)比较，且加以评论。

2. 设U由(1)定义．试证明$1\in\rho(U)$当而且仅当自伴线性算子T是有界的。

3. （交换算子）．Hilbert空间H上的有界线性算子S：$H\to H$称为与一线性算子T：$\mathscr{D}(T)\to H$可交换，这里$\mathscr{D}(T)\subset H$，如果$ST\subset TS$，即如果$x\in\mathscr{D}(T)$就蕴含$Sx\in\mathscr{D}(T)$而且$STx=TSx$．（注意，如果$\mathscr{D}(T)=H$，则$ST\subset TS$等价于$ST=TS$．）试证如果S与(1)中的T可交换，则S也与由(1)式给出的U相交换．

4. 试证，若第3题中的$SU=US$，则$ST\subset TS$，即S也与T可交换．

5. 若T: $\mathscr{D}(T)\to H$是一对称的线性算子. 试证其Cayley 变换(1)存在, 而且是等距的.

6. 试证如果第5题中的T是闭的, 则T的Cayley变换也是闭的.

7. 如果$T:\mathscr{D}(T)\to H$是一闭对称线性算子, 试证其 Cayley 变换(1)的定义域: $\mathscr{D}(U)$ 和值域 $\mathscr{R}(U)$ 都是闭的. 注意, 在现在的情形, 我们可能有: $\mathscr{D}(U)\neq H$, 或$\mathscr{R}(U)\neq H$, 甚至二者都不等于H.

8. 如果对称线性算子 $T:\mathscr{D}(T)\to H$ 的 Cayley 变换(1)是酉算子. 试证T是自伴的.

9. (亏指数). 在第7题中, 正交补: $\mathscr{D}(U)^{\perp}$和$\mathscr{R}(U)^{\perp}$的 Hilbert 维数(见3.6节) 称为T的亏指数. 试证这两个亏指数都为零当而且仅当 T 是自伴的.

10. 试证, 由公式 $(\xi_1, \xi_2, \cdots)\mapsto(0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$ 所定义的右位移算子 $U:l^2\to l^2$ 是等距的但不是酉的. 并证明 U 是由公式 $x\mathscr{D}y=(\eta_j)$ 所定义的映象$T:\mathscr{D}(T)\to l^2$的Cayley变换, 这里

$$\eta_1=i\xi_1,\quad \eta_j=i(2\xi_1+\cdots+2\xi_{j-1}+\xi_j)\quad j=2,3,\cdots,$$

且

$$\mathscr{D}(T)=\{x=(\xi_j)\,|\,|\xi_1|^2+|\xi_1+\xi_2|^2+|\xi_1+\xi_2+\xi_3|^2+\cdots<\infty\}$$

10.7 乘法算子和微分算子

在本节中我们将考察两类无界线性算子, 即乘以独立变量的算子和微分算子的某些性质。我们提到的这些算子在原子物理学中起到基本的作用。(对这些应用有兴趣的读者, 可以在第十一章中, 特别是在11.1 节和 11.2 节中找到详细的论述。本节自成一体与第十一章无关; 反之第十一章也自成一体与本节无关)

因为我们没有事先假定 Lebesgue 测度和积分理论, 因此, 在本节中我们必须不加证明地介绍某些事实。

这两个算子中的第一个是

$$T:\ \mathscr{D}(T)\to L^2(-\infty,\ +\infty)\qquad (1)$$
$$x\mapsto tx$$

其中$\mathscr{D}(T)\subset L^2(-\infty,+\infty)$.

定义域$\mathscr{D}(T)$由所有这样的$x\in L^2(-\infty,+\infty)$组成，对每一$x\in\mathscr{D}(T)$使得$Tx\in L^2(-\infty,+\infty)$，即

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} t^2|x(t)|^2dt<\infty.$$

这就蕴含$\mathscr{D}(T)\neq L^2(-\infty,\infty)$. 例如，由下式给出的$x$:

$$x(t)=\begin{cases} 1/t, & 当\ t\geqslant 1, \\ 0, & 当\ t<1, \end{cases}$$

就是属于$L^2(-\infty,+\infty)$但不满足(2)，因而该$x\notin\mathscr{D}(T)$,

显然，$\mathscr{D}(T)$包含这样的一切函数$x\in L^2(-\infty,+\infty)$，它在一紧区间之外为零，可以证明这一函数集在$L^2(-\infty,+\infty)$中稠密，因而$\mathscr{D}(T)$在$L^2(-\infty,+\infty)$中稠密.

10.7-1 引理（乘法算子） 由(1)式定义的乘法算子不是有界的.

证. 我们取（图67）

$$x_n(t)=\begin{cases} 1, & 当\ n\leqslant t<n+1, \\ 0, & 别处. \end{cases}$$

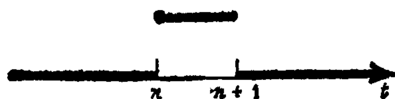


图67 引理10.7-1的证明中的函数x_n

显然，$\|x_n\|=1$，而且

$$\|Tx_n\|^2=\int_n^{n+1} t^2dt>n^2.$$

这就证明了$\|Tx_n\|/\|x_n\|>n$，这里$n\in\mathbf{N}$可取得任意大. ∎

注意，无界性可以由我们所讨论的是无限区间上的函数而得出. 为了比较，在有限区间$[a,b]$的情形，算子

$$(3)\qquad \tilde{T}:\mathscr{D}(\tilde{T})\to L^2[a,b]$$

$$x\mapsto tx$$

就是有界的. 事实上，当$|b|\geqslant|a|$时，则

$$\|\widetilde{T}x\|^2=\int_a^b t^2|x(t)|^2dt\leqslant b^2\|x\|^2.$$

当$|b|<|a|$时，证明完全一样。而且这也表明 $x\in L^2[a,b]$ 就蕴含 $\widetilde{T}x\in L^2[a,b]$。故$\mathscr{D}(\widetilde{T})=L^2[a,b]$，即算子$\widetilde{T}$定义在整个$L^2[a,b]$上。

10.7-2 定理：自伴性） 由(1)定义的乘法算子T是自伴的。

证。正如我们在前面提到的，T 在 $L^2(-\infty,+\infty)$中是稠定的。T是对称的，因为，用$t=\bar{t}$，有

$$\langle Tx,y\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}tx(t)\overline{y(t)}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\overline{ty(t)}\,dt=\langle x,Ty\rangle.$$

于是由10.2-4，$T\subset T^*$。现在我们只要证明 $\mathscr{D}(T)\supset\mathscr{D}(T^*)$ 即可。而此又只要证明当 $y\in\mathscr{D}(T^*)$ 时就蕴含 $y\in\mathscr{D}(T)$。设 $y\in\mathscr{D}(T^*)$，于是对一切$x\in\mathscr{D}(T)$有

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,y^*\rangle,\quad y^*=T^*y,$$

（见10.1-2节），把上面的写出来，即为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}tx(t)\overline{y(t)}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{y^*(t)}\,dt.$$

这就指出

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left[\overline{ty(t)}-\overline{y^*(t)}\right]dt=0.$$

特别，上式对每一这样的$x\in L^2(-\infty,+\infty)$亦成立，该 x 在一任意给定的有界区间(a,b)外为零。显然，这样的x在$\mathscr{D}(T)$ 中。现选取

$$x(t)=\begin{cases} ty(t)-y^*(t), & \text{当}\ t\in(a,b)\\ 0, & \text{别处}\end{cases}$$

由(4)有

$$\int_a^b |ty(t)-y^*(t)|^2 dt=0.$$

故在(a,b)上几乎处处①有 $ty(t)-y^*(t)=0$，即在(a,b)上几乎处处$ty(t)=y^*(t)$。因(a,b)是任意的，这就表明$ty=y^*\in L^2(-\infty,+\infty)$，因而$y\in\mathscr{D}(T)$。我们也有$T^*y=y^*=ty=Ty$。∎

注意，定理10.3-3现在就指明T是闭的，这是因为$T=T^*$。

算子T的重要的谱的性质如下：

10.7-3 定理(谱) 设T是由(1)式定义的乘法算子，$\sigma(T)$是它的谱。则

(a) T没有固有值。

(b) $\sigma(T)$是整个$\mathbf{R}$。

证。(a)对任意的λ，设$x\in\mathscr{D}(T)$使得$Tx=\lambda x$。则$(T-\lambda I)x=0$。于是由T的定义

$$0=\|(T-\lambda I)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|t-\lambda|^2|x(t)|^2dt.$$

因对一切$t\neq\lambda$，$|t-\lambda|>0$，故对几乎一切的$t\in\mathbf{R}$有$x(t)=0$，即，$x=0$。这就证明了x不是固有向量，而且λ不是T的固有值。因λ是任意的，故T没有固有值。

(b) 由10.7-2和10.4-2我们有$\sigma(T)\subset\mathbf{R}$。设$\lambda\in\mathbf{R}$，我们定义(图68)

$$v_n(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } \lambda-\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\lambda+\frac{1}{n},\\ 0, & \text{别处,}\end{cases}$$

并考虑$x_n=\|v_n\|^{-1}v_n$。于是$\|x_n\|=1$。记$T_\lambda=T-\lambda I$，与通常一样，由T的定义我们有

① 即，在(a,b)上，可能对一个Lebesgue测度为零的集合除外。

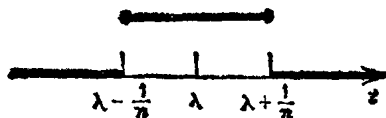


图68 定理10.7-3证明中的函数v_n

$$\|T_\lambda x_n\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\lambda)^2|x_n(t)|^2dt$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_n(t)|^2dt=\frac{1}{n^2};$$

这里我们已经用了在v_n不为零的区间上有$(t-\lambda)^2\leqslant 1/n^2$。开平方根，得

$$(5)\qquad \|T_\lambda x_n\|\leqslant\frac{1}{n}.$$

因为T没有固有值，故豫解式$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$存在，而且$T_\lambda x_n\neq 0$，因为由2.6-10有$x_n\neq 0$。向量

$$y_n=\frac{1}{\|T_\lambda x_n\|}T_\lambda x_n$$

在T_λ的值域中，该值域是R_λ的定义域，而且y_n的范数为1。把R_λ作用于上式两端并引用(5)，于是得

$$\|R_\lambda y_n\|=\frac{1}{\|T_\lambda x_n\|}\|x_n\|\geqslant n.$$

上式表明豫解式R_λ是无界的，故$\lambda\in\sigma(T)$。因$\lambda\in\mathbf{R}$是任意的，故$\sigma(T)=\mathbf{R}$。▮

T的谱族是(E_λ)，这里$\lambda\in\mathbf{R}$，而且

$$E_\lambda: L^2(-\infty,+\infty)\to L^2(-\infty,\lambda)$$

是$L^2(-\infty,+\infty)$到$L^2(-\infty,\lambda)$上的投影，$L^2(-\infty,\lambda)$视为$L^2(-\infty,+\infty)$的子空间，于是

$$(6)\qquad E_\lambda x(t)=\begin{cases}x(t) & \text{当}t<\lambda,\\ 0 & \text{当}t\geqslant\lambda.\end{cases}\quad ▮$$

在本节我们所要考察的另外一个算子是微分算子

$$D: \mathscr{D}(D) \to L^2(-\infty,+\infty), \tag{7}$$
$$x \longmapsto ix',$$

这里 $x'=dx/dt$，而 i 用以帮助 D 成为自伴的，这正如我们在下面的10.7-5中所要谈到的。由定义，D的定义域 $\mathscr{D}(D)$ 由一切这样的$x\in L^2(-\infty,+\infty)$所组成，它在 $\mathbf{R}$ 的每一紧区间上是绝对连续的①，并使得 $x'\in L^2(-\infty,+\infty)$。

$\mathscr{D}(D)$ 包含3.7-2中与Hermite多项式有关的序列(e_n)，而且在 3.7-2 中我们已说过 (e_n) 在 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中是完全的。故$\mathscr{D}(D)$在$L^2(-\infty,+\infty)$中稠密。

10.7-4 引理（微分算子） 由(7)定义的微分算子D是无界的。

证。D 是

$$D_0=D|_Y$$

的一扩张。这里$Y=\mathscr{D}(D)\cap L^2[0,1]$而$L^2[0,1]$被当作 $L^2(-\infty,+\infty)$ 之一子空间。因此，如果D_0无界，则D亦无界。下证 D_0 是无界的。

设（图69。）

$$x_n(t)=\begin{cases} 1-nt, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant 1/n, \\ 0, & \text{当 } 1/n<t\leqslant 1. \end{cases}$$

其导数是

---

① x称为在$[a,b]$上为绝对连续的，如果任给$\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对$[a,b]$中任意有限个两两不相交的开区间$(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$其总长小于$\delta$时，就有

$$\sum_{j=1}^{n}|x(b_j)-x(a_j)|<\varepsilon,$$

于是x在$[a,b]$上几乎处处可微，而且$x'\in L[a,b]$，见H. L. Royden(1968),P.106.

$$x_n'(t)=\begin{cases}-n, & \text{当 } 0<t<1/n,\\ 0, & \text{当 } 1/n<t<1.\end{cases}$$

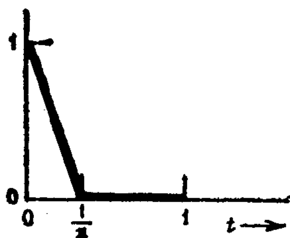


图69 引理10.7-4的证明中的函数x_n

我们算出

$$\|x_n\|^2=\int_0^1 |x_n(t)|^2dt=\frac{1}{3n},$$

而且

$$\|D_0x_n\|^2=\int_0^1 |x_n'(t)|^2dt=n,$$

其商

$$\frac{\|D_0x_n\|}{\|x_n\|}=n\sqrt{3}>n.$$

这就证明了D_0是无界的. ∎

下面的比较是有趣的. 因为$(-\infty,+\infty)$是无限区间, 故(1)中的乘法算子T是无界的, 可是(3)中的乘法算子$\tilde{T}$是有界的.与此相反, 微分算子是无界的, 即使我们所考察的是$L^2[a,b]$, 情况也是一样, 这里$[a,b]$是一紧区间. 根据前面的证明, 这一事实是非常明显的.

10.7-5 定理(自伴性) 由(7)定义的微分算子D是自伴的.

这一定理的证明需要Lebesgue积分理论中的某些工具, 这可以, 比如, 在G. Helmberg(1969), P.130中找到.

最后我们还要指出, D不能有固有值, 而谱$\sigma(D)$是整个数轴$\mathbf{R}$.

算子(1)和(7)的应用包含在下一章中, 在那里这两类算子起着基本的作用(而符号变成物理学中所使用的标准符号; 见该章的开头部分).

第十一章

量子力学中的无界线性算子

量子力学是量子理论的一部分。量子理论开始于1900年，当时 Max Plank 发表了他的革命性的量子概念。这一有决定性意义的事件通常被认为是经典物理学与现代或量子物理学的分界线。物理学新时代的开始渊源于许多新的基本事实的发现——X-射线、电子、放射现象——要求创立与之相应的理论。

量子力学为 Hilbert 空间理论提供了巨大的动力，特别是在与无界自伴线性算子有关的方面。在本章中，我们将对这些事实阐述某些主要的缘由，而且还将讨论无界线性算子在量子力学中的作用。

本章是选读材料，它与第十章无关。

符号

在本章中我们使用物理学中的标准记号：

	在本章中的符号	在其他各章中的符号
独立变量	q	t
函　　数	$\psi,\varphi,\cdots\cdots$	$x,y,\cdots\cdots$

重要概念，主要内容方向摘要

我们从一维的单一质点所组成的物理系统入手。在这种情形，我们必须考察复Hilbert空间$L^2(-\infty,\infty)$，它的元ψ，φ，…叫做状态，自伴线性算子T，Q，D，…称为可观察量，其定义域和值域都在$L^2(-\infty,+\infty)$中。这一术语在11.1节被引出。内积$\langle T\psi,\psi\rangle$是一积分，它可以用概率论来加以解释，这里$\psi$可借以定义一概率密度，而该内积可以称为均值，因为它刻划了可观察量T的平均值，当物理系统在状态ψ下这是人们在实验中所期望的。在这一理论中最重要的可观察量是由$\psi(q)\mapsto q\psi(q)$定义的位置算子Q（见11.1节），和由$\psi(q)\mapsto(h/2\pi i)\,d\psi/dq$所定义的动量算子$D$（见11.2节）。这些算子不可交换，由可观察量的方差这就得出著名的Heisenberg测不准关系式11.2-2。

在这些考虑中时间t保持不变，故t是一不明显出现的参数。对常数t，系统的状态可以作为与时间无关的Schrödinger方程的解而得出（见11.3节）。按照这一方法，人们可以确定物理系统的各种性质，特别可确定各种可能的能级。

与时间相关的状态，由与时间有关的Schrödinger方程所约束和描述（11.5节），这种方程与Hamilton算子有关(11.4节)。Hamilton算子将被得出，如果我们把经典Hamilton函数中的位置和动量分别代之以位置算子和动量算子。

在本书正文和习题集中讨论的基本的物理系统和现象包括调和振子（见11.3-1，11.4-1），三维振子（11.3节），平面波（11.3节），势级和隧道效应（11.4），球对称场中的电子和氢原子（11.5节）。

11.1 基本思想，状态，可观察量，位置算子

为了阐述量子力学的基本思想和概念，我们仅限于考虑一维

（即 R）的单质点。这种物理系统是简单而又基本的，而且对于我们的目的来说是合适的。更一般的系统将在以后讨论。

我们考察在任一固定瞬时的系统，即我们把时间当作固定不变的参数。

在经典力学中，我们的系统在某一瞬时的状态是用质点特有的位置和速度来描述的。因此从经典意义来说，系统的瞬时状态是用一对数来加以描述的。

在量子力学中，系统的状态是用一函数

$$\psi$$

来描述的。这一符号 ψ 是物理学中的标准记号，故我们也采用它（代替我们关于函数的通常符号 x）。函数 ψ 是复值的，且定义在 R 上。因此它是一个实变量

$$q$$

的函数。q 也是物理学中的标准记号，所以我们也采用它（代替通常的字母 t。不过在本章后面几节我们仍把它作为时间看待）。

我们设 ψ 是 Hilbert 空间 $L^2(-\infty,\infty)$ 中的元，这就大大地提供关于 ψ 的物理解释。这种解释如下：

ψ 与质点在给定子集 $J\subset \mathbf{R}$ 中出现的概率有关；更确切地说，这一概率为

$$(1)\qquad \int_J |\psi(q)|^2 dq.$$

对整个一维空间 R 来说，对应的概率应为 1，即我们要求质点在实直线上某处出现。这就要求置以规范化条件

$$(2)\qquad \|\psi\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(q)|^2 dq=1.$$

显然，(1) 中的积分当我们用一绝对值为 1 的复因子乘之仍不变。

我们的考虑表明，经典力学中状态的确定性描述为量子力学中状态的概率描述所代替，正是由于这样的情形才促使我们定义

某一瞬时的物理系统的状态为一元

(3) $\psi \in L^2(-\infty, +\infty)$, $\|\psi\| = 1$;

更确切地说是这样的元的等价类，这里

$$\psi_1 \sim \psi_2 \Leftrightarrow \psi_1 = \alpha\psi_2, |\alpha| = 1.$$

为简单起见，我们仍用字母，例如，ψ，φ 等表示这些等价类。

注意，(3)中的ψ产生 $L^2(-\infty, +\infty)$中的一个一维子空间：

$$Y = \{\varphi | \varphi = \beta\psi, \beta \in C\}.$$

因此我们也可以这样说，我们的系统的状态是一个一维子空间 $Y \subset L^2(-\infty, \infty)$，于是用范数为1的元$\varphi \in Y$按(1)式确定一概率。

从(1)式看出，$|\psi(q)|^2$起着R上概率分布①的密度的作用。按定义，对应的均值或期望为

(4) $$\mu_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} q|\psi(q)|^2 dq,$$

分布的方差是

(5) $$\mathrm{var}_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \mu_\psi)^2 |\psi(q)|^2 dq,$$

而标准差为 $sd_\psi = \sqrt{\mathrm{var}_\psi} (\geqslant 0)$。直观来讲，$\mu_\psi$度量平均值或中心位置，而$\mathrm{var}_\psi$度量分布的范围。

因此对给定的状态ψ，μ_ψ 刻划了质点的“平均位置”。现在我们来讨论一个重要的问题。注意，我们可以把 (4) 式写成下之形式：

(6) $$\mu_\psi(Q) = \langle Q\psi, \psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Q\psi(q)\overline{\psi(q)}dq.$$

这里算子$Q: \mathscr{D}(Q) \to L^2(-\infty, +\infty)$定义为

(7) $$Q\psi(q) = q\psi(q)$$

(乘以独立变量q)。因为$\mu_\psi(Q)$刻划了质点的平均位置，故Q称

① 我们所需要的某些概率论的概念在大多数关于概率论或统计学的教科书里已被解释。例如见H. Cramér(1955)，E. Kreyszig(1970)，S. S. Wilks(1962)。

为位置算子．按定义，$\mathscr{D}(Q)$ 由一切使 $Q\psi\in L^2(-\infty,+\infty)$ 的 $\psi\in L^2(-\infty,+\infty)$ 所组成．

由 10.7 节我们已知 Q 是无界自伴线性算子，其定义域在 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中稠密．

我们注意(5)式现在可以表为

$$\operatorname{var}_\psi(Q)=\langle(Q-\mu I)^2\psi,\psi\rangle \qquad \mu=\mu_\psi(Q)$$

$$(8)\qquad =\int_{-\infty}^{+\infty}(Q-\mu I)^2\psi(q)\overline{\psi(q)}\,dq.$$

物理系统的一个状态 ψ 包含我们关于系统的全部理论知识，只不过不明显而已．这就提出一个问题，如何从 ψ 得到某些表示系统性质的数量方面的知识，系统的性质可以根据实验观察到．任一这样的量称为可观察量．

重要的可观察量是位置、动量和能量．

刚才我们已经看到，在位置的情形为了解决我们提出的问题有自伴线性算子，即位置算子 Q 可资利用．这就提示我们对其他可观察量的情形也可按类似的方式处理，即引入适当的自伴线性算子．

在经典力学中，我们会问在给定的瞬时可观察量将取得什么样的值？在量子力学中我们可以寻求一种测量（一种实验）所取得的可观察量的值落入某一区间的概率．

上述的情况和讨论这就提示我们定义一可观察量（关于我们的物理系统在某一瞬时）为一自伴线性算子 $T:\mathscr{D}(T)\to L^2(-\infty,+\infty)$，这里 $\mathscr{D}(T)$ 在空间 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中稠密．

类似于(6)和(8)式，我们可以用

$$(9)\qquad \mu_\psi(T)=\langle T\psi,\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}T\psi(q)\overline{\psi(q)}\,dq$$

定义均值；用

$$\operatorname{var}_\psi(T)=\langle(T-\mu I)^2\psi,\psi\rangle$$

(10) $$=\int_{-\infty}^{+\infty}(T-\mu I)^2\psi(q)\overline{\psi(q)}\,dq \qquad \mu=\mu_\psi(T)$$

定义方差；用

(11) $$sd_\psi(T)=\sqrt{\operatorname{var}_\psi(T)} \qquad (\geqslant 0)$$

定义标准差。

当其系统在状态ψ下，$\mu_\psi(T)$刻划了可观察量T的平均值，这一平均值正是人们在实验中期待的。方差 $\operatorname{var}_\psi(T)$刻划了（那些值关于平均值的变化的）范围。

11.2 动量算子 Heisenberg测不准原则

我们考察与前一节相同的物理系统，在那里我们引导出位置算子

(1) $$Q:\mathscr{D}(Q)\to L^2(-\infty,+\infty)$$
$$\psi\mapsto q\psi.$$

另一个非常重要的可观察量是动量p。相应的**动量算子**是①

(2) $$D:\mathscr{D}(D)\to L^2(-\infty,+\infty),$$
$$\psi\mapsto \frac{h}{2\pi i}\frac{d\psi}{dq},$$

这里h是 Plank 常数，定义域$\mathscr{D}(D)\subset L^2(-\infty,+\infty)$由一切这样的函数$\psi\in L^2(-\infty,+\infty)$组成，$\psi$在R的每一紧区间上是绝对连续的，且使$D\psi\in L^2(-\infty,+\infty)$。定义$D$的这种动机可给出如下：

根据Einstein质量-能量关系$E=mc^2$（c是光速），能量E有质量

---

① 物理中通用的符号是P，但因我们已用P表投影，故我们写成D，意指"微分"，h是普通自然常数，$h=6.626196\times10^{-27}$尔格秒(见CRC化学物理手册，第64版。Cleveland,Ohio：CRC出版社，1973-74；P.F-101)，绝对连续性在10.7节，脚注3中已被解释，

$$m=\frac{E}{c^2}.$$

因为光子具有速度c，且能量为

$$E=h\nu$$

（ν为频率），它的动量

$$(3)\qquad p=mc=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\Lambda}=\frac{h}{2\pi}k,$$

这里$k=2\pi/\Lambda$，又Λ是波长。1924 年，L. de Broglie 提出满足光波成立的关系式的物质波的概念。因此我们也可以利用 (3) 式与质点相联系。假定我们的物理系统的状态ψ是这样的，那么我们可以应用经典的 Fourier 积分定理得出

$$(4)\qquad \psi(q)=\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p)e^{(2\pi i/h)pq}dp,$$

这里

$$\varphi(p)=\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(q)e^{-(2\pi i/h)pq}dq.$$

物理上这可以解释为用由

$$(6)\qquad \psi_p(q)=\varphi(p)e^{ikq}=\varphi(p)e^{(2\pi i/h)pq}$$

给出的常动量p的函数表示ψ，这里根据(3)，$k=2\pi p/h$，又$\varphi(p)$是振幅。因复共轭$\overline{\psi}_p$在指数中有一负号，故

$$|\psi_p(q)|^2=\psi_p(q)\overline{\psi_p(q)}=\varphi(p)\overline{\varphi(p)}=|\varphi(p)|^2.$$

因为$|\psi_p(q)|^2$是在状态ψ_p时位置的概率密度，故得知$|\varphi(p)|^2$必与动量的密度成比例，而且比例常数为1，因为我们已定义$\varphi(p)$使得(4)和(5)含有同一的常数$1/\sqrt{h}$。因此，由 (5) 式，动量的均值$\widetilde{\mu}_\psi$是

$$\widetilde{\mu}_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}p|\varphi(p)|^2dp=\int_{-\infty}^{\infty}p\varphi(p)\overline{\varphi(p)}dp$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} p\varphi(p)\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(q)}e^{(2\pi i/h)pq}dq\,dp.$$

假定可以交换积分次序而且在（4）式中可以在积分号下微分，即得

$$\bar{\mu}_{\psi}=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(q)}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p)\frac{1}{\sqrt{h}}pe^{(2\pi i/h)pq}dp\,dq$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(q)}\frac{h}{2\pi i}\frac{d\psi(q)}{dq}dq.$$

利用(2)式并用$\mu_{\psi}(D)$表$\bar{\mu}_{\psi}$，我们可以把上式写成下面的形式

$$(7)\qquad \mu_{\psi}(D)=\langle D\psi,\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}D\psi(q)\overline{\psi(q)}dq.$$

这就导出了动量算子的定义(2)。注意 $\psi\in L^2(-\infty,\infty)$，因此为了证明这种形式运算在数学上是合理的，我们还需要测度论的工具，特别是需要推广的Fourier积分定理，这就是熟知的Fourier-Plancherel 定理。其详见 F. Riesz, B. Sz.-Nagy (1955), PP.291—295.

设S和T是具定义域于同一个复Hilbert空间中的任意的自伴线性算子，于是算子

$$C=ST-TS$$

称为S和T的**交换子**，且定义在

$$\mathscr{D}(C)=\mathscr{D}(ST)\cap\mathscr{D}(TS)$$

上。

在量子力学中，位置和动量算子的交换子是基本重要的。由直接微分得

$$DQ\psi(q)=D(q\psi(q))=\frac{h}{2\pi i}[\psi(q)+q\psi'(q)]$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\psi(q)+QD\psi(q).$$

这就给出重要的Heisenberg交换关系

$$(8)\qquad DQ-QD=\frac{h}{2\pi i}\tilde{I},$$

其中 $\tilde{I}$ 是在定义域

$$(9)\qquad \mathscr{D}(DQ-QD)=\mathscr{D}(DQ)\cap\mathscr{D}(QD)$$

上的恒同算子。

我们不加证明地指出，该定义域在空间$L^2(-\infty,\infty)$中稠密。事实上，易于看出在这一定义域中包含3.7-2中与 Hermite 多项式相联系的序列(e_n)，另外在3.7-2中我们还论及(e_n)在$L^2(-\infty,+\infty)$中是完全的（记住，这里的q在3.7-2中用 t 表示）。

为了得出著名的Heisenberg测不准原则，我们首先证明

11.2-1 定理（交换子） 设 S 和 T 是具定义域和值域于$L^2(-\infty,+\infty)$中的自伴线性算子。则 $C=ST-TS$对C的定义域中的每一ψ满足

$$(10)\qquad |\mu_\psi(C)|\leqslant 2sd_\psi(S)sd_\psi(T).$$

证。记

$$\mu_1=\mu_\psi(S),\quad \mu_2=\mu_\psi(T),$$

$$A=S-\mu_1 I,\quad B=T-\mu_2 I.$$

直接计算，我们易于证明

$$C=ST-TS=AB-BA.$$

因为S和T是自伴的，又μ_1和 μ_2是形如11.1节(9)式的内积，这些均值是实的（见10.2节末）。故A和 B 是自伴的。由均值的定义于是我们得出

$$\begin{aligned}\mu_\psi(C)&=\langle (AB-BA)\psi,\psi\rangle\\&=\langle AB\psi,\psi\rangle-\langle BA\psi,\psi\rangle\\&=\langle B\psi,A\psi\rangle-\langle A\psi,B\psi\rangle.\end{aligned}$$

最后的两个内积按绝对值是相等的。故由三角不等式和Schwarz不等式，我们有

$$|\mu_\psi(C)|\leqslant|\langle B\psi,A\psi\rangle|+|\langle A\psi,B\psi\rangle|\leqslant 2\|B\psi\|\cdot\|A\psi\|.$$

这就证明了(10)式。因B是自伴的，故由11.1节的(10)式得知

$$\|B\psi\|=\langle(T-\mu_2 I)^2\psi,\psi\rangle^{1/2}=\sqrt{\mathrm{var}_\psi(T)}=sd_\psi(T).$$

类似地可得关于$\|A\psi\|$的表达式。∎

从(8)得知位置算子和动量算子的交换子是$C=(h/2\pi i)\tilde{I}$。故$|\mu_\psi(C)|=h/2\pi$，即得(10)。

11.2-2 定理（Heisenberg测不准原则） 对位置算子Q和动量算子D，

$$sd_\psi(D)\,sd_\psi(Q)\geqslant\frac{h}{4\pi}. \tag{11}$$

在物理上，不等式(11)意味着不可能同时精确地测量质点的位置和动量。实际上，标准差$sd_\psi(D)$和$sd_\psi(Q)$分别刻划了动量和位置量测的精密度。又(11)式表明左端的两个因子不能同时都减少。因h很小（见脚注2），故在宏观物理学中，$h/4\pi$小到可以忽略不计。但在原子物理学中情况就不再是这样的。如果我们实现系统的任一测量都是改变系统状态的扰动，那么整个情况就变得较为清楚，又当系统是很小时（比如是一个电子），则扰动就是非常显著的。当然，任何测量都会产生由仪器精密度的缺陷所引起的误差，于是人们总是幻想用越来越精密的测量手段使误差变得越来越小，以为至少在原则上可同时测定质点的瞬时位置和动量，并使得这两个相应的误差中的每一个都可以小于任意事先给定的正数。但不等式(11)表明，这是办不到的。这不仅是因为任何测量手段都有其缺陷，而且从原则上（Heisenberg测不准原则）精密度都是有限度的。

更一般说，定理11.2-1表明，任何两个可观察量S和T，其交换子不为零算子，不可能同时按前述意义下无限精密地被测定，原则上精确度是有限的。

习　　题

1. 决定

$$\psi(q)=\alpha e^{-q^{2/2}}$$

中的规范化因子α，并画出对应的概率密度的图形。

2. 对线性算子T和多项式g，由

$$E_\psi(g(T))=\langle g(T)\psi,\psi\rangle$$

定义$g(T)$的期望$E_\psi(g(T))$。试证$E_\psi(T)=\mu_\psi(T)$且

$$\mathrm{var}_\psi(T)=E_\psi(T^2)-\mu_\psi(T)^2.$$

3. 利用第2题中的记号，试证$E_\psi([T-cI]^2)$为极小当而且仅当$c=\mu_\psi(T)$（注意，这就是方差的极小性）。

4. 试证：若在(2)式中代$(-\infty,+\infty)$以一紧区间$[a,b]$，则所得的算子$\widetilde{D}$不再是自伴的（除非我们限制其定义域，在a和b置以适当的条件）。

5. 在课文中我们已证明动量的密度与$|\varphi(p)|^2$成比例，之后还断言它等于$|\varphi(p)|^2$。试用公式(4)和(5)，假定其可以交换积分的次序，证明之。

6. 在空间的情形有类似于(4)和(5)的公式。当利用笛卡尔坐标，并记$p=(p_1,p_2,p_3)$，$q=(q_1,q_2,q_3)$和$p\cdot q=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$时，我们有

$$\psi(q)=h^{-3/2}\int\varphi(p)e^{(2\pi i/h)p\cdot q}dp$$

其中

$$\varphi(p)=h^{-3/2}\int\psi(q)e^{-(2\pi i/h)p\cdot q}dq.$$

试把第5题中的考虑推广到空间的情形。

7. 在空间质点的情形，我们有三个笛卡尔坐标q_1,q_2,q_3，和相应的位置算子Q_1,Q_2,Q_3以及动量算子D_1,D_2,D_3，这里$D_j\psi=(h/2\pi i)\partial\psi/\partial q_j$。试证

$$D_jQ_j-Q_jD_j=\frac{h}{2\pi i}I_j,$$

而D_j和$Q_k(j\neq k)$是可交换的；这里I_j是$\mathscr{D}(D_jQ_j-Q_jD_j)$上的恒等算子。

8. 在经典力学中，空间中质量为m的运动的质点的动能为

$$E_k=\frac{mv^2}{2}=\frac{(mv)^2}{2m}=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2),$$

其中p_1，p_2，p_3是动量向量的分量。这就提示我们定义动能算子$\mathscr{E}_k$为

$$\mathscr{E}_k=\frac{1}{2m}(D_1^2+D_2^2+D_3^2),$$

其中D_i与第7题中的相同。试证

$$\mathscr{E}_k\psi=-\frac{h^2}{8\pi^2m}\Delta\psi,$$

这里ψ的Laplace算子$\Delta\psi$由下式给出：

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial q_2^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial q_3^2}.$$

9. （角动量）在经典力学中，角动量为$M=q\times p$，这里$q=(q_1,q_2,q_3)$是位置向量，而$p=(p_1,p_2,p_3)$是（线性）动量向量。试指出这就提示我们可定义角动量算子$\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2,\mathscr{M}_3$为

$$\mathscr{M}_1=Q_2D_3-Q_3D_2,$$
$$\mathscr{M}_2=Q_3D_1-Q_1D_3,$$
$$\mathscr{M}_3=Q_1D_2-Q_2D_1.$$

证明交换关系

$$\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2-\mathscr{M}_2\mathscr{M}_1=\frac{ih}{2\pi}M_3.$$

并求出关于M_2,M_3和M_3,M_1的另外两个相类似的关系式。

10. 试证明第9题中的算子$\mathscr{M}_1$，$\mathscr{M}_2$和$\mathscr{M}_3$与下面的算子

$$\mathscr{M}^2=\mathscr{M}_1^2+\mathscr{M}_2^2+\mathscr{M}_3^2$$

可交换。

11.3 与时间无关的Schrödinger方程

利用光波和de Broglie物质波（见11.2节）之间的类比，我们将导出基本的（与时间无关的）Schrödinger方程。

为了研究折射，干扰及其他更为精微的光学现象，我们利用**波动方程**

$$(1)\qquad \Psi_{tt}=\gamma^2\Delta\Psi,$$

这里$\Psi_{tt}=\partial^2\Psi/\partial t^2$，常数$\gamma^2$是正的，$\Delta\Psi$是$\Psi$的Laplace算子。如果$q_1,q_2,q_3$是空间的笛卡尔坐标，则

$$\Delta\Psi=\frac{\partial^2\Psi}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial q_2^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial q_3^2}.$$

在上一节中我们所考察的系统只有一个坐标 q， 于是 $\Delta\Psi=\partial^2\Psi/\partial q^2$.)

通常关于驻波现象，我们都假定是简单地周期地依赖于时间，比如说，有如下的形式：

(2) $$\Psi(q_1,q_2,q_3,t)=\Psi(q_1,q_2,q_3)e^{-i\omega t}.$$

把上式代入(1)并消去指数因子，即得 Helmholtz 方程 （与时间无关的波动方程）

(3) $$\Delta\psi+k^2\psi=0,$$

这里

$$k=\frac{\omega}{\gamma}=\frac{2\pi\nu}{\gamma}=\frac{2\pi}{\Lambda},$$

又 ν 是频率。我们选取物质波的 de Broglie 波长为 Λ，即

(4) $$\Lambda=\frac{h}{mv}$$

（亦见11.2节中的(3)式，那里 $v=c$）。于是(3)取得下面的形式

$$\Delta\psi+\frac{8\pi^2m}{h^2}\cdot\frac{mv^2}{2}\psi=0.$$

设 E 表动能 $mv^2/2$ 和势能 V 的和，即

$$E=\frac{mv^2}{2}+V，则\frac{2m^2}{2}=E-V,$$

并且我们把上式写成

(5) $$\Delta\psi+\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-V)\psi=0.$$

这就是著名的与时间无关的 Schrödinger 方程，它在量子力学中是基本的。

注意，我们可以把(5)写成下面的形式

$$(6)\qquad \left(-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta+V\right)\psi=E\psi.$$

这一形式表明，系统的可能的能级将依赖于由(6)式左端所定义的算子的谱。

稍加考虑即可指出，(5)式并不是在目前情况下所可能得出的最为理想的微分方程，然而实践经验和 Schrödinger 的工作表明，(5)式在下面的意义下特别有用。

在物理上，微分方程有意义的解应是有限的，而且在无穷远处趋向于零。当给定一势场，方程(5)仅对能量 E 的某些值才有这样的解。这些值或与 Bohr 的原子理论中的"容许的"能级相一致，或者，当其不一致时，它们比理论预示的值更与实验结果相一致。这就意味着公式(5)既"解释"而且又改进了 Bohr 的理论。公式(5)也奠立了许多基本的物理效应的理论基础，这些效应已由实验观察到但不能用旧理论所充分完善地加以解释。

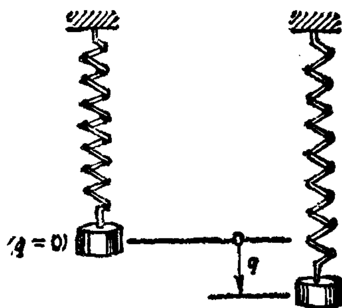


图70 弹簧上的物体
(a) 静止的 (b) 运动的

11.3-1 例（调和振子） 为了阐述 Schrödinger 方程 (5)，我们来考察一基本的物理系统。我们首先指出，Max Plank 首先应用其量子假设的系统就是我们这里所要讨论的系统。图70表明了这一经典的模型：一质量为 m 的物体系在一弹簧的下端，弹簧的上端固定。在一小的垂直运动下，我们可以忽略阻尼，而假定恢复力为 aq，即与静态平衡位置的位移 q 成比例。于是经典的运动微分方程是

$$m\ddot{q}+aq=0,\quad 或\ \ddot{q}+\omega_0^2 q=0,$$

这里 $\omega_0^2=a/m$，故 $a=m\omega_0^2$。所描述的调和运动，由一正弦或余弦函数所表示。另由恢复力 aq，积分即得势能 V；当选取积分常数使得在 $q=0$ 时 V 为 0，则有 $V=aq^2/2=m\omega_0^2q^2/2$。故调和振子的 Schrödinger 方程(5)为

$$(7)\qquad \psi''+\frac{8\pi^2m}{h^2}\left(E-\frac{1}{2}m\omega_0^2q^2\right)\psi=0.$$

令

$$(8)\qquad \lambda=\frac{4\pi}{\omega_0 h}E$$

并乘(7)以 $b^2=h/2\pi m\omega_0$，即得

$$b^2\psi''+\left[\lambda-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]\psi=0.$$

引入 $s=q/b$ 为新的独立变量，并记 $\psi(q)=\tilde{\psi}(s)$，我们有

$$(9)\qquad \frac{d^2\tilde{\psi}}{ds^2}+(\lambda-s^2)\tilde{\psi}=0.$$

现在我们确定能量的值，使(9)在 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中有解。把

$$\tilde{\psi}(s)=e^{-s^2/2}v(s)$$

代入(9)，消去指数因子，得

$$(10)\qquad \frac{d^2v}{ds^2}-2s\frac{dv}{ds}+(\lambda-1)v=0.$$

当

$$(11)\qquad \lambda=2n+1,\ n=0,1,2,\cdots$$

时，除记号外，这与 3.7 节中的式(9)相同。因此我们看出其中之一解是 Hermite 多项式 H_n，而且满足(9)的（其中 λ 由(11)式给出）规范正交的固有函数的完全集是由 3.7 节中(7)式定义的 (e_n)，并于(7)中以 $s=q/b$ 代替 t 作为独立变量。这些函数的前几个在图71中被表示出来。因为频率是 $\nu=\omega_0/2\pi$ 故由(8)看出

固有值(11)对应于能级

$$(12)\qquad E_n=\frac{\omega_0 h}{4\pi}(2n+1)=h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

其中 $n=0,1,2\cdots$. 这些所谓的能量量子 $h\nu$ 的"半整数"倍是振子的特性."零点能量"（最低级）是 $h\nu/2$, 而不是0. 这正如Max Plank在他的著名的1900年开创整个量子理论的第一篇论文中所假定的那样. 规定能级的数 n 称为调和振子的主量子数.

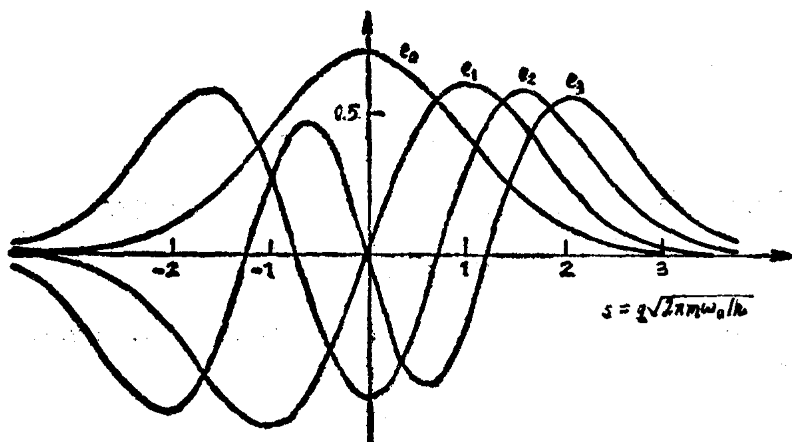


图71 对应于能级 $h\nu/2, 3h\nu/2, 5h\nu/2, 7h\nu/2$ 的调和振子的前4个固有函数 e_0、e_1、e_2、e_3

习　　题

1. 对什么样的值 q （7）式中括号内的式子等于零？又这些值在经典力学中的物理意义是什么？

2. 能从（7）直接看出对一切 E 的值,（7）不能有一非平凡解 $\psi\in L^2(-\infty, +\infty)$ 吗？

3. 求关于

$$\psi_0(s)=e^{-s^2/2}$$

的二阶微分方程，与(9)相比较，并讨论之。

4. 用幂级数方法求解微分方程，试证明（10）有一多项式 $v\neq 0$ 为其解，当而且仅当 λ 在(11)中有一值。

5. 第4题中的递推公式可用以断定一非多项式的解增长如是之快以致相应的 ψ 不可能在 $L^2(-\infty,+\infty)$吗？

6. 利用由下式定义的 Hermite 多项式的生成函数

$$\exp(2us-u^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(s)u^n$$

试证明对应于 $\lambda=2n+1$[见（11）]的函数 $\psi=\psi_n$ 可写成为下面的形式：

$$\psi_n(s)=\frac{(-1)^n}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2}}e^{s^2/2}\ \frac{d^n}{ds^n}(e^{-s^2}).$$

7. (平面波)由

$$\varphi(q,t)=e^{-i(\omega t-k\cdot q)}$$

所表示的波称为平面单色波，这里 $k=(k_1,k_2,k_3)$ $q=(q_1,q_2,q_3)$，又$k\cdot q$为 k 和 q 的点积。试证下面的论断。k 的方向是空间中波的传播方向。$\lambda=2\pi/|k|$为波长，其中$|k|$是 k 的长度。量 $\nu=\omega/2\pi$ 是频率。$v=\nu\lambda=\omega/|k|$ 是位相速度（等位相的平面的传播速度）。φ 满足波动方程(1)。

8. 若

$$\psi(q)=a(q)e^{ib(q)}$$

中的 $a(q)$和 $b(q)$变化非常缓慢，则 Schrödinger 方程 $\psi''+f(q)\psi=0$ 的一近似解通过"代入 ψ 和消去 a"而得到。试证明，这就得出

$$b(q)=\int_0^q\sqrt{f(u)}\,du$$

和

$$a(q)=\frac{\alpha}{\sqrt[4]{f(q)}}\ （\alpha\text{ 为常数}）.$$

9.（三维空间中的振子）．一质量为 m 的质点，被一力束缚于原点，其沿 q_j 轴的分量等于 $-a_jq_j$，$a_j>0$; $j=1,2,3$。试证明问题的Schrödinger方程为

$$\Delta\psi+\left(\lambda-\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^2\ q_j^2\right)\psi=0,$$

这里

$$\lambda=\frac{8\pi^2 m}{h^2}E,\quad \alpha_j=\frac{2\pi m}{h}\omega_j\quad \omega_j=\sqrt{a_j/m}.$$

应用变数分离法，即代

$$\psi(q)=\psi_1(q_1)\psi_2(q_2)\psi_3(q_3)$$

得

$$\psi_j''+(\lambda_j-\alpha_j^2 q_j^2)\psi_j=0,\left(\sum_{j=1}^{3}\lambda_j=\lambda\right).$$

试证明当 $\lambda_j=(2n_j+1)\alpha_j$ 时，其中整数 $n_j\geqslant 0$ 即得

$$\psi_j(q_j)=c_j e^{-\alpha_j q_j^2/2}H_n(\sqrt{\alpha_j}q_j),$$

其中 c_j 是一规范化因子，H_n 是 n 阶 Hermite 多项式，其定义与 3.7-2 中相同。

10. 一能级称为退化的，如果存在一对应的线性无关集，它由多于一个的固有函数所组成。第 9 题中的振子称为各向同性的，如果 $a_1=a_2=a_3=a$。试证，此时最低能级为 $E_0=3h\nu/2$，这里 $\nu=\omega_0/2\pi=\sqrt{a/m}/2\pi$ 且是非退化的，但更高的能级却是退化的。

11.4 Hamilton 算子

在经典力学中，我们可以把质点的守恒系的研究建立在系统的 Hamilton 函数的基础上。总能量为

(1) $$H=E_{kin}+V,$$

(E_{kin}=动能，V=势能）它由位置坐标和动量坐标表示出来。设系统有 n 个自由度，我们有 n 个位置坐标 $q_1,\cdots,q_n$ 和 n 个动量坐标 $p_1,\cdots,p_n$。

用量子力学的方法处理系统，第一步我们要决定

$$H(p_1,\cdots,p_n;\ q_1,\cdots,q_n).$$

第二步我们用动量算子[见11.2节(2)式]

(2) $$D_j:\mathscr{D}(D_j)\to L^2(R^n),$$

$$\psi\mapsto\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}.$$

其中$\mathscr{D}(D_j)\subset L^2(R^n)$，代替每一$p_j$，并用位置算子［见11.1节(7)式］

(3) $$Q_j:\mathscr{D}(Q_j)\to L^2(R^n),\quad \psi\mapsto q_j\psi,$$

其中$\mathscr{D}(Q_j)\subset L^2(R^n)$，代替每一$q_j$. 由上面的Hamilton函数$H$于是得到Hamilton算子，记为$\mathscr{H}$. 即

$$\mathscr{H}(D_1,\cdots,D_n;\ Q_1,\cdots,Q_n)$$

是

$$H(p_1,\cdots,p_n;\ q_1,\cdots,q_n)$$

用D_j代p_j，Q_j代q_j而得到的. 根据定义，$\mathscr{H}$被假定是自伴的.

代换的这一过程称为量子化法则. 注意该过程不是唯一的，因为对于数而言乘法是可交换的，但对算子而言却未必如此. 这是量子力学的一大缺点.

11.3节中的方程(6)，现在可以用Hamilton算子$\mathscr{H}$表出. 实际上，空间中质量为m的质点的动能是

$$\frac{m}{2}|v|^2=\frac{m}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2)=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2).$$

根据量子化法则，上式右端的式子给出

$$\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}D_j^2=\frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta.$$

故11.3节中的(6)式可以写作

(4) $$\mathscr{H}\psi=\lambda\psi,$$

其中$\lambda=E$为能量.

若λ在$\mathscr{H}$的豫解集中，则$\mathscr{H}$的豫解式存在，而且(4)只有平凡解（在$L^2(R^n)$中考虑）. 若λ是在点谱$\sigma_p(\mathscr{H})$中，则(4)有非平凡解$\psi\in L^2(R^n)$. 因$\mathscr{H}$是自伴的，故剩余谱$\sigma_r(\mathscr{H})$是空的（见10.4节第7题）. 若$\lambda\in\sigma_c(\mathscr{H})$（$\mathscr{H}$的连续谱）则(4)没有解

$\psi \in L^2(R^n)$，这里$\psi \neq 0$。不过，此时(4)可能有非零解，其不属于$L^2(R^n)$，而且依赖于一参数，我们可以对参数进行积分，即得$\psi \in L^2(R^n)$.在物理中我们称在这一积分过程中构造了包波。注意，在这里，(4)中的$\mathscr{H}$表示原算子的一个扩张，使得所考察的函数是在扩张算子的定义域中。这一过程可以用下面的物理系统来加以解释。

我们考虑在$(-\infty, +\infty)$上的一质量为m的自由质点。Hamilton函数是

$$H(p,q) = \frac{1}{2m} p^2,$$

于是得到Hamilton算子

$$\mathscr{H}(D,Q) = \frac{1}{2m} D^2 = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{d^2}{dq^2}.$$

故(4)成为

$$(5) \qquad \mathscr{H}\psi = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\psi'' = \lambda\psi,$$

其中$\lambda = E$是能量，解由下式给出：

$$(6) \qquad \eta(q) = e^{-ikq},$$

其中参数k与能量λ通过下式相关联：

$$\lambda = E = \frac{h^2 k^2}{8\pi^2 m}.$$

这些函数η可用以表示任意$\psi \in L^2(-\infty, \infty)$为下之形式的波包

$$(7a) \qquad \psi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \varphi(k) e^{-ikq} dk,$$

其中

$$(7b) \qquad \varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \psi(q) e^{ikq} dq.$$

极限是按$L^2(-\infty, \infty)$中的范数而取的（在(7a)中关于q，在

(7b) 中关于 k) . 这样的极限也称为平均极限. 公式(7)及其下面的假定称为 Fourier-Plancherel 定理. 这一定理我们已在 11.2 节谈到过, 而且在那里也给出一参考文献. 亦见N. Dunford, J. T. Schwartz (1958-71), 第 2 部分, 第 974 和 976 页.

把上面的考虑推广到三维空间中质量为 m 的自由质点的情形如下: 代替(5)我们有

$$\mathscr{H}\psi = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi = \lambda\psi$$

其中 Δ 与前节中的一样. 解是由下式表示的一平面波

(9a) $$\eta(q) = e^{-ik\cdot q},$$

其中 $q=(q_1, q_2, q_3)$, $k=(k_1, k_2, k_3)$ 且

$$k\cdot q = k_1 q_1 + k_2 q_2 + k_3 q_3,$$

而能量是

(9b) $$\lambda = E = \frac{h^2}{8\pi^2 m} k\cdot k.$$

对 $\psi \in L^2(R^3)$, Fourier-Plancherel 定理给出

(10a) $$\psi(q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{R^3}\varphi(k)e^{-ik\cdot q}dk,$$

这里

(10b) $$\varphi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{R^3}\psi(q)e^{-ik\cdot q}dq,$$

其中积分仍理解为三维空间中有限区域上相应积分的平均极限.

11.4-1 例(调和振子) 调和振子的Hamilton函数(见11.3-1)是

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2.$$

故 Hamilton 算子为

$$(11)\qquad \mathscr{H}=\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}D^2+\alpha^2Q^2\right),\ (\alpha^2=m\omega_0).$$

为了在进一步讨论中简化公式起见，我们定义

$$(12)\qquad A=\beta\left(\alpha Q+\frac{i}{\alpha}D\right),\ \left(\beta^2=\frac{\pi}{h}\right).$$

Hilbert 自伴算子是

$$(13)\qquad A^*=\beta\left(\alpha Q-\frac{i}{\alpha}D\right).$$

由 11.2 节的(8)式

$$(14)\quad \begin{aligned}&(\mathrm{a})\ A^*A=\frac{\pi}{h}\left(\alpha^2Q^2+\frac{1}{\alpha^2}D^2-\frac{h}{2\pi}\tilde{I}\right),\\ &(\mathrm{b})\ AA^*=\frac{\pi}{h}\left(\alpha^2Q^2+\frac{1}{\alpha^2}D^2+\frac{h}{2\pi}\tilde{I}\right).\end{aligned}$$

故

$$(15)\qquad AA^*-A^*A=\tilde{I}.$$

由(14a)和(11)，

$$(16)\qquad \mathscr{H}=\frac{\omega_0h}{2\pi}\left(A^*A+\frac{1}{2}\tilde{I}\right).$$

下面我们证明$\mathscr{H}$的任一固有值（如果存在）必等于由11.3节(12)式所给出的某一值。

设λ是$\mathscr{H}$的一固有值，ψ是一固有函数。则$\psi\neq 0$且

$$\mathscr{H}\psi=\lambda\psi.$$

根据(16)，

$$(17)\qquad A^*A\psi=\bar{\lambda}\psi,\ \text{这里}\ \bar{\lambda}=\frac{2\pi\lambda}{\omega_0h}-\frac{1}{2}.$$

应用A给出

$$AA^*(A\psi)=\bar{\lambda}A\psi.$$

在左端，由（15）$AA^*=A^*A+\tilde{I}$，故

$$A^*A(A\psi)=(\tilde{\lambda}-1)A\psi.$$

类似地，再一次应用A有

$$A^*A(A^2\psi)=(\tilde{\lambda}-2)A^2\psi,$$

j步之后得

$$A^*A(A^j\psi)=(\tilde{\lambda}-j)A^j\psi. \tag{18}$$

对充分大的j必有$A^j\psi=0$。因为，不然的话，在(18)式的两端与$A^j\psi$取内积，于是对每一j，我们就会得出

$$\langle A^j\psi,\ A^*A(A^j\psi)\rangle=\langle A^{j+1}\psi,\ A^{j+1}\psi\rangle=(\lambda-j)\langle A^j\psi, A^j\psi\rangle,$$

即对每一j

$$\tilde{\lambda}-j=\frac{\|A^{j+1}\psi\|^2}{\|A^j\psi\|^2}\geqslant 0, \tag{19}$$

这不可能成立，因为$\tilde{\lambda}$是某一数。因此存在某一$n\in N$使$A^n\psi\neq 0$，但$A^j\psi=0$，当$j>n$时，特别$A^{n+1}\psi=0$。当$j=n$时，则由(19)中的等式得知

$$\tilde{\lambda}-n=0.$$

由上式及（17），因$\omega_0=2\pi\nu$，故

$$\lambda=\frac{\omega_0 h}{2\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)=h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

这与11.3节中的（12）式一致。

习　　题

1. 试用变数分离法由(8)得出(9)。

2. 若ψ_0是$\mathscr{H}$的一规范化的固有函数，它对应于例11.4-1中的最小的固有值。试用归纳法证明

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}=(A^*)^n\psi_0$$

是A^*A的对应于$\tilde{\lambda}=n$的一规范化的固有函数。

3. 试证明第2题中

$$A^*\psi_n=\sqrt{(n+1)}\psi_{n+1},$$
$$A\psi_n=\sqrt{n}\,\psi_{n-1}.$$

4. 试计算调和振子在状态 ψ_0（最低能的状态）时 Q 的均值和方差，这里 $\|\psi_0\|=1$。并说明在那些方面所得结果与经典力学中的不同。

5. 试证明例11.4-1中的算子满足交换法则

$$AQ^s-Q^sA=\sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}SQ^{s-1},\ S=1,2,\cdots.$$

6. 利用第5题试证明调和振子在状态 ψ_0 时的 Q^{2s} 的均值为

$$\mu_{\psi_0}(Q^{2s})=\left(\frac{h}{4\pi m\omega_0}\right)^s(2s-1)(2s-3)\cdots3\cdot1.$$

7. 试证明：对图72中的势级 Schrödinger 方程给出

$$\psi''+b_1^2\psi=0,\ b_1^2=\frac{8\pi^2m}{h^2}E\quad(q<0)$$

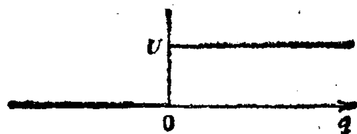


图72　第7题中的势级

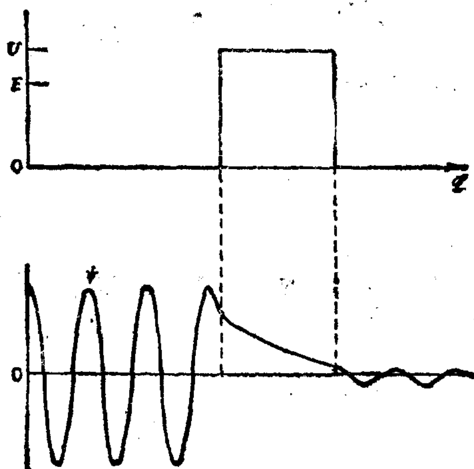


图73　通过垒的电子的势垒和波函数 ψ

$$\psi'' + b_2^2\psi = 0,\ b_2^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)(q \geqslant 0).$$

假定$E>U$，试对左入射波求解这一问题。

8. 试证明：第 7 题中传递和反射的质点数的和等于入射质点数。

9. 当 $E<U$ 时，试求解第 7 题。题中现在的解与经典的解间的主要区别是什么？

10. （隧道效应）。试证明，第 9 题的解答表明在势垒的情形，质点的波函数可以近似地看作如图73所示的函数。

11.5 与时间有关的Schrödinger方程

在本章前四节我们考察了在某一瞬时的物理系统，即我们总是把时间作为保持不变的参数处理。在本节中我们将简单地谈一谈关于状态和观察量与时间有关的问题。

物理系统的**稳定态**是这样一种状态，它仅通过一指数因子，比如，$e^{-i\omega t}$ 与时间相关联。因此，这种状态的一般形式为 11.3 节（2）式的形式。其他的状态叫做**不稳定态**。现在我们提出一个问题，这样一个 p_j，q_j 和 t 的一般的函数 φ 应该满足什么样的微分方程？当然，这样的基本方程只能够从经验中导出，因为人们不可能得到关于方程形式的直接实验的结果。人们所能做的是考察各种方程，弄清楚它们是否符合实验的结果和具有人们对逻辑方面所要求的各种性质。

11.3节中的波动方程（1）是不适合的。理由之一如下。我们要求函数 φ 如果它在某时刻 t 被给定，则对一切 t 都被确定。因为该方程中包含关于 t 的二阶导数，它使其一阶导数不能确定。这一事实乍看起来会使读者感到惊奇，因这一方程我们常用于光学中。可是真空中电磁波的瞬时状态仅当磁场向量 b 和电场向量 e 的所有分量被给定时，才被完全确定。这是依赖于空间中的点和时间 t 的六个函数，而且它们由 Maxwell 方程确定。这些方

程关于 t 是一阶的；在真空中，按向量形式且按Gauss单位写出。这些方程是

$$\mathrm{curl}\, b=\frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial t},\ \mathrm{curl}\, e=-\frac{1}{c}\frac{\partial b}{\partial t},\ \mathrm{div}\, b=\mathrm{div}\, e=0,$$

这里 c 是光速。这些方程表明，b 和 e 的每一分量满足波动方程，而且在光学中也是一个分量不能确定未来的整个状态。

这一情况表明为了寻求类似于 Maxwell 方程的方程，为了要求对稳定态所得到的方程能产生在11.3节所研究的与时间无关的Schrödinger 方程，这种类型的方程就是由 Erwin Schrödinger 于 1926年所给出的与时间有关的 Schrödinger 方程

$$(1)\qquad \mathscr{H}\varphi=-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

因为(1)中含 i，故非零解 φ 必然是复的。$|\varphi|^2$ 视为波的强度的一种量度。

平稳解，其在一点的强度与 t 无关，由命

$$(2)\qquad \varphi=\psi e^{-i\omega t}$$

而得出，其中 ψ 不依赖于 t，$\omega=2\pi\nu$。把它代入(1)得

$$\mathscr{H}\psi=-\frac{h}{2\pi i}(-2\pi i\nu)\psi,$$

另因 $E=h\nu$，故

$$(3)\qquad \mathscr{H}\psi=\lambda\psi,$$

其中 $\lambda=E$ 是系统的能量。这与前节中的(4)式相一致，故我们前面的要求得以满足。

方程(1)常称为**运动的量子力学方程**，不过这必须按下面的意义来理解。

在经典力学中运动的（向量）微分方程确定了物理系统的运动；即当涉及某一时刻，比如说，$t=0$ 时的初始条件被给定，则位置、速度等即作为时间的函数而被确定。在量子力学中则情况

就不同。系统与诸可观察量之间不再有某种决定性的关系，不过系统仍由状态决定。事实上，若φ在某一时刻，比如$t=0$时，被给定，则方程对一切t都确定了φ（只要系统不因测量或其他原因而被扰动）。这就指明前面考虑过的概率密度对时间是确定性的。因此我们可以按11.1节和11.2节所阐述的方法计算在任意时间的可观察量的概率。

在本节最后的习题中包含某些进一步的基本的应用，特别是关于球对称物理系统，例如氢原子方面的应用。

习　　题

1.（球面波）试证明当ψ仅依赖于r，这里$r_2=q_1^2+q_2^2+q_3^2$，则11.3节的Helmholtz方程（3）成为

$$R''+\frac{2}{r}R'+k^2R=0.$$

并证明对应于11.3节方程（1）的特解为

$$\frac{1}{r}\exp[-i(\omega t-kr)] \text{ 和 } \frac{1}{r}\exp[-i(\omega t+kr)],$$

它们分别表示输出球面波和输入球面波，这里$\exp x=e^x$。

2.（球面对称场中的电子）．若势V仅依赖于到空间某定点的距离r，于是把Schrödinger方程①

$$\Delta\psi+a(E-V(r)\psi=0,\quad a=\frac{8\pi^2\tilde{m}}{h^2}$$

变为由下面定义的球面坐标r，θ，ϕ（图74）的方程是方便的。

$$q_1=r\sin\theta\cos\phi,\quad q_2=r\sin\theta\sin\phi,\quad q_3=r\cos\theta.$$

（这一类型的重要的物理系统是氢原子和单离子化的氦）．试证

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}L\psi,$$

这里“角部分”为

$$L\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+(\cot\theta)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}.$$

①我们用$\tilde{m}$表电子的质量，用m表示磁量子数。

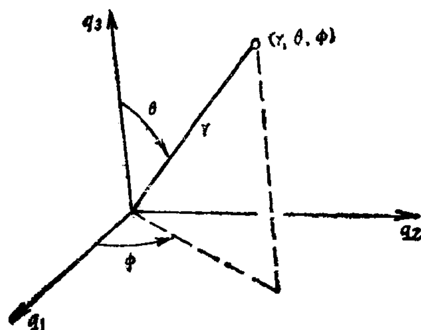


图74　第 2 题中的球面坐标

次证，我们可以把上两式写成

$$\Delta\psi=\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}L\psi,$$

$$L\psi=\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}.$$

再证，令

$$\psi(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi)$$

并分离变量，由 Schrödinger 方程得

$$R''+\frac{2}{r}R'+a(E-V)\,R-\frac{\alpha}{r^2}R=0,$$

其中 α 是一分离常数，且

$$LY+\alpha Y=0.$$

这里我们应注意到一个值得非常重视的事实。角部分的方程不依赖于 $V(r)$ 的特别形式。令

$$Y(\theta,\phi)=f(\theta)g(\phi),$$

并应用另外的变量分离。试证

$$f''+(\cot\theta)f'+\left(\alpha-\frac{\beta}{\sin^2\theta}\right)f=0,$$

其中 β 是另一分离常数且

$$g''+\beta g=0.$$

试断定 g 必然是 2π 为周期的周期函数，比如说，

$$g(\phi)=e^{im\phi},\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,$$

即 $\beta=m^2$，这里 m 称为磁量子数①（因为它在所谓的 Zeeman 效应中起作用，该效应是由磁场所引起的谱线的分裂）．

为了对 f 求解方程，这里 $\beta=m^2$，令 $x=\cos\theta$，$f(\theta)=y(x)$，试证这就推出

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left(\alpha-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0.$$

现考察 $m=0$ 的情形，试证明当

$$\alpha=l(l+1),\ l=0,1,\cdots$$

时，该方程的一个解是 Legendre 多项式 P_l（见3.7-1）．[我们可以证明，对其他 α 值所得到的无穷级数在 $x=\pm1$ 处不收敛．] l 称为角量子数或轨道角动量量子数（因为它与第 7 题中的算子 μ 有关，该算子有时称为角动量算子）．

3．（相伴的 **Legendre** 函数，球面调和函数）现考察方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0,$$

一般 $m=0,1,2,\cdots$，作代换

$$y(x)=(1-x^2)^{m/2}z(x),$$

试证 z 满足

$$(1-x^2)z''-2(m+1)xz'+[l(l+1)-m(m+1)]z=0.$$

从关于 P_l 的 Legendre 方程出发，并对它作 m 次微分，试证上之方程的一解 z 由下式给出

$$z(x)=P_l(x)^{(m)},$$

上式右端表 P_l 的 m 次导数。对应的 y 由下式给出

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}P_l(x)^{(m)},$$

并称之为相伴的 **Legendre** 函数。对负整数 $m=-1,\ -2,\ \cdots$ 证明上面的式子在以 $|m|$ 代替 m 时仍成立，并证明我们必须要求 $-l\leqslant m\leqslant l$．函数

$$Y_l^m(\theta,\ \phi)=e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta)$$

称为球面调和函数（或曲面调和函数）．

4．（氢原子）现对氢原子考察第 2 题中关于 R 的方程，故 $V(r)=-e^2/r$，这里 e 是一电子的电荷。求解 $\alpha=l(l+1)$（见第 2 题）且 $E<0$（电子的约束状态的条件）时的方程，其法如下：

作代换 $\rho=\gamma r$，证明

---

①字母 m 是标准的符号，不会与质量相混淆（质量用 $\bar{m}$ 表示）．

$$\tilde{R}'' + \frac{2}{\rho}\tilde{R}' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\tilde{R} = 0,$$

这里"$'$"表对 ρ 的导数，$R(r) = \tilde{R}(\rho)$，且

$$\gamma^2 = -4aE, \quad n = ae^2/\gamma.$$

作代换 $\tilde{R}(\rho) = e^{-\rho/2}w(\rho)$，证明

$$w'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)w' + \left(\frac{n-1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)w = 0.$$

作代换

$$w(\rho) = \rho^l u(\rho),$$

证明

$$\rho u'' + (2l+2-\rho)u' + (n-1-l)u = 0.$$

并证明该方程之一解是

$$u(\rho) = L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = L_{n+l}(\rho)^{(2l+1)},$$

(Laguerre 多项式 L_{n+l}（见 3.7-3）的（$2l+1$）次导数）. 函数 L_{n+l}^{2l+1} 称为一相伴的 Laguerre 多项式。最后总起来证明我们有下面的结果

$$R(r) = R(\rho/\gamma) = e^{-\rho/2}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho).$$

其中 $\rho = \gamma r = 2r/na_0$，又 a_0 是由下式给出的所谓 Bohr 半径

$$a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 \tilde{m} e^2} = 0.529 \cdot 10^{-8}\text{cm}.$$

并证明我们应该要求 $l \leqslant n-1$，且 n 应是一正整数。

5.（氢谱）证明第 4 题中的能量 E 仅依赖于 n（称为主原子数）；实际上，要证明

$$E = E_n = -\frac{2\pi^2 \tilde{m} e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

再证对每一 n，对应于 n^2 个不同的解

$$\psi_{nlm} = c_{nlm} R_{nl} f_{lm} g_m,$$

其中 c_{nlm} 是一规范化常数，f 和 g 是函数，与第 2 题中所得出的相同. 试证明与调和振子相反，氢原子有无穷多的约束状态。

我们应述及电子迁移到低能状态对应于一能量的发射. 图 75 表示氢谱的 Lyman，Balmer，Paschen 序列，这些序列分别对应于迁移

$$E_n \to E_1, \quad E_n \to E_2, \quad E_n \to E_3.$$

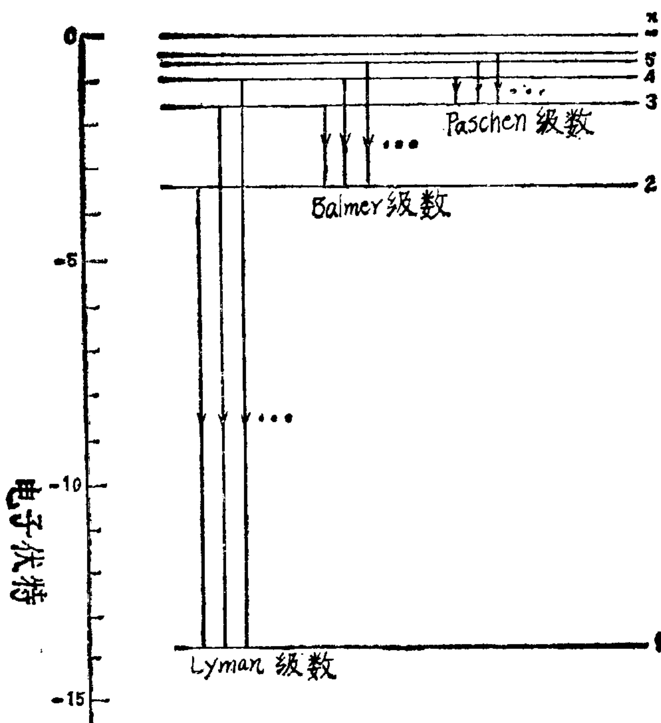


图75 能级图和氢原子的谱序列。此图表明

(i) 对应于主量子数 $n=1,2,\cdots$ 的能级；

(ii) 能量单位电子伏特（ev）（这里 $n\to\infty$ 时对应于 oev 和 $n=1$ 到 $-13.53ev$；其中 $13.53ev$ 是电离能量）

(iii) 三个序列的线段其波长（单位Å）如下：

Lyman 序列（在紫外线区域）

$E_2\to E_1$	1216Å
$E_3\to E_1$	1026Å
$E_4\to E_1$	973Å

Balmer 序列（可见光区域）

$E_3\to E_2$	6563Å（H_α线）
$E_4\to E_2$	4861Å（H_β线）
$E_5\to E_2$	4340Å（H_γ线）。

Paschen 序列（在红外线区域）

$E_4 \to E_3$　　18751Å

$E_5 \to E_3$　　12818Å

$E_6 \to E_3$　　10938Å.

因 $E=h\nu$，于是由上面的公式得出 Rydberg 公式

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\nu}{c}=\frac{1}{hc}(E_n-E_m)=R^*\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right),$$

其中 R^* 是 Rydberg 常数，对氢来说它由下式给出：

$$R^*=\frac{2\pi^2\widetilde{m}e^4}{ch^3}=109737.3\text{cm}^{-1}.$$

（数值见11.2节脚注 2 中提到的书，F-104页）。

6.（角动量算子）注意如下事实是有趣的。在用球坐标分离 Schrödinger 方程时所出现的方程可能与角动量算子有关。事实上只要证明（见 11.2 节第 9 题）

$$\mathscr{M}_3\psi=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial\phi},$$

故 $g''+\beta g=0$（见第 2 题）且 $\beta=m^2$，乘以 Rf 后，即可写成

$$\mathscr{M}_3^2\psi=\frac{h^2m^2}{4\pi^2}\psi.$$

7.（角动量算子）试证明，按球坐标，11.2 节第 9 题中的角动量算子有下面的表达式

$$\mathscr{M}_1\psi=-\frac{h}{2\pi i}\left(\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right),$$

$$\mathscr{M}_2\psi=\frac{h}{2\pi i}\left(\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right).$$

又由第 6 题，11.2 节第 10 题中的算子 $\mathscr{M}^2$ 有下面的表达式

$$\mathscr{M}^2\psi=-\frac{h^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right].$$

由上式和第 3 题试推断 Y_l^m 是 $\mathscr{M}^2$ 对应于固有值

$$\frac{h^2}{4\pi^2}l(l+1),\quad l=0,\cdots,n-1$$

的固有函数。这是一个著名的结果，它改进了 Bohr 理论所预期的值 $h^2l^2/4\pi^2$。

8.（球面 Bessel 函数）。值得非常注意的是第 2 题中所得的方程

$$R''+\frac{2}{r}R'+\left[a(E-V(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

也能应用于呈球面对称的其他的问题。例如，设（图76）

$$V(r)=\begin{cases}-V_0<0, & \text{当 } r<r_0\\ 0, & \text{当 } r\geqslant r_0.\end{cases}$$

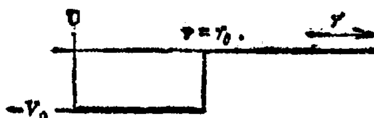


图76　第 8 题中的势 $V(r)$.

假定 $E<0$ 且 $E+V_0>0$。试找出当 $r<r_0$ 时用 Bessel 函数表示的解，并以之证明该方程可以变为 Bessel 方程

$$u''+\frac{1}{\rho}u'+\left(1-\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2}\right)u=0.$$

[正由于这一原因，解 R（带一适当的数值因子）称为球面 Bessel 函数]。

9. 第 8 题中若 $l=0$，试证 Bessel 方程的解是

$$J_{1/2}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sin\rho,\quad J_{-1/2}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\rho.$$

利用上式及下之递推关系

$$J_{\nu-1}(\rho)+J_{\nu+1}(\rho)+\frac{2\nu}{\rho}J_\nu(\rho),$$

试证对一切 $l=1,2,\cdots$ 第 8 题中的解可以用无穷多的正弦和余弦函数和 ρ 的负幂表出。

10. 当 $r>r_0$ 时试求解第 8 题中的方程，如前一样假定 $E<0$。此时的解与 $r<r_0$ 时的解其本质差别是什么？

复习和参考资料

A1.1 集合

集用单个的大写字母 A, B, M 等表示，或用花括号表示，例如

$\{a, b, c\}$表以字母 a, b, c 为元的集，

$\{t|f(t)=0\}$表一切这样的 t 的集合，函数 f 在该集的每点处为 0。

在集合论中所使用的某些符号是

Φ	空集（没有元的集）
$a\in A$	a 是 A 的元
$b\notin A$	b 不是 A 的元
$A=B$	A 和 B 相等（为恒等，即由相同之元组成）
$A\neq B$	A 和 B 不相等（或相异）
$A\subset B$	A 是 B 之一子集(A 的每一元也属于 B)。也写作 $B\supset A$。
$A\subset B, A\neq B$	A 是 B 的真子集(A 是 B 的子集，而且 B 至少有一元不在 A 中)
$A\cup B$	$=\{x\|x\in A$ 或 $x\in B\}$，A 和 B 的并。见图 77。
$A\cap B$	$=\{x\|x\in A$ 且 $x\in B\}$，A 和 B 的交。见图77。
$A\cap B=\Phi$	A 和 B 是不相交的集合（没有公共元的集合）

$A-B$ $=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，A 与 B 的差。(这里 B 可以是也可以不是 A 的子集)。见图 78。(亦见图 79。)

A^c $=X-A$，A 在 X 中的补集（这里 $A\subset X$）（当 X 含混时，似乎用符号 C_XA 也可以）。

下面的公式直接由定义得出。

(1a) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$。

(1b) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

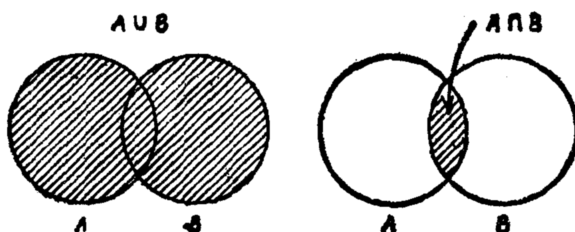


图77 两个集合 A 与 B 的并 $A\cup B$（阴影部分）与交 $A\cap B$（阴影部分）

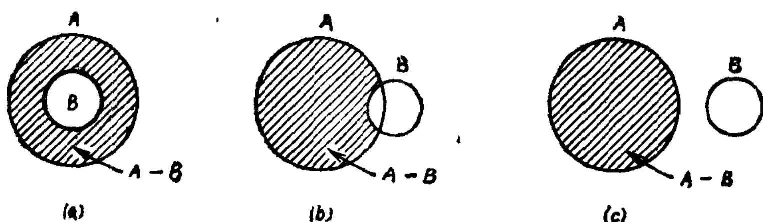


图78 两集合 A（大圆盘）和 B（小圆盘）分别当 $(a)B\subset A$，$(b)A\cap B\neq\phi$ 且 $B\not\subset A$，$(c)A\cap B=\phi$ 时的差（阴影部分）

(1c) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，写成 $A\cup B\cup C$。

(1d) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，写成 $A\cap B\cap C$。

(1e) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

(1f) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

(1g) $A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$。

(1h) $A\cup B\supset A$，$A\cup B\supset B$。

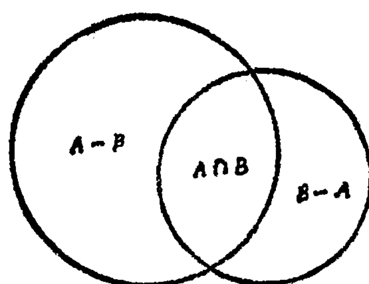


图79　二集合 A（大圆盘）和 B（小圆盘）的差 $A-B$，和 $B-A$ 及交 $A\cap B$

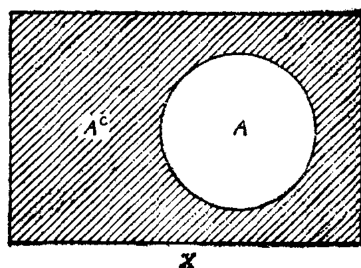
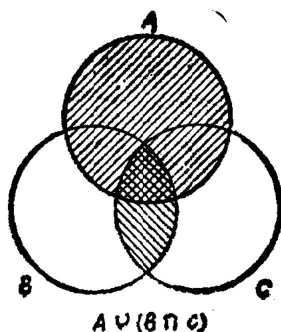


图80　一集 X 的子集 A 的补集 $A^c=X-A$（阴影部分）



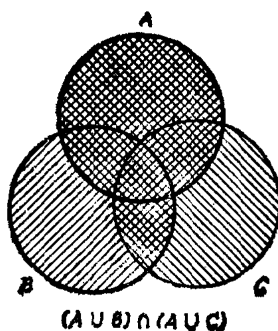
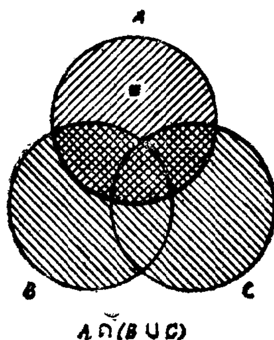


图81　公式(1e)



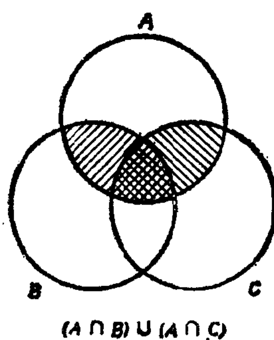


图82　公式(1f)

其次

$A\subset B \Longleftrightarrow A\cup B=B \Longleftrightarrow A\cap B=A.$

（2） $A\subset C$ 且 $B\subset C \Longleftrightarrow A\cup B\subset C.$

$C\subset A$ 且 $C\subset B \Longleftrightarrow C\subset A\cap B.$

由补集的定义

（3） $(A^c)^c=A,\ X^c=\Phi,\ \Phi^c=X.$

De Morgan 律为（A, B 是 X 的任意子集）

（4） $$\begin{aligned}(A\cup B)^c&=A^c\subset B^c,\\(A\cap B)^c&=A^c\cup B^c.\end{aligned}$$

显然，

（5） $$\begin{aligned}&A\subset B \Longleftrightarrow A^c\supset B^c,\\&A\cap B=\Phi \Longleftrightarrow A\subset B^c \Longleftrightarrow B\subset A^c,\\&A\cup B=X \Longleftrightarrow A^c\subset B \Longleftrightarrow B^c\subset A.\end{aligned}$$

一给定的集 S 的一切子集的集称为 S 的**幂集**，以 $\mathscr{P}(S)$ 记之。

两个给定的非空集 X 和 Y 的**笛卡尔积**（或积）$X\times Y$ 是这样的一切有序对 (x, y) 的集，其中 $x\in X$，$y\in Y$。见图 83。

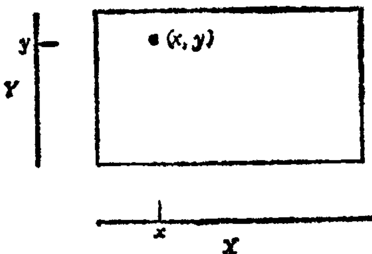


图83　两集 X 和 Y 的笛卡尔积 $X\times Y$ 形象化的一种方法

集 M 称为**可数的**，如果 M 是有限的（有有限多个元）或者如果我们能在正整数集与 M 的元之间建立某种联系，使得对 M 的每一元对应于唯一的正整数，反之对每一正整数 1,2,3,…对应于 M 的唯一元。

A1.2 映象

设 X 和 Y 是二集合，$A\subset X$ 是任意的子集。与每一 $x\in A$ 对

应唯一的 $y\in Y$，记为 $y=Tx$，并称为x．关于T的象，由这一方法即得 A 到 Y 的一**映象**(或变换，函数关系，抽象函数)。集 A 称为 T 的**定义域**，并以 $\mathscr{D}(T)$ 记之，我们把它写成

$$T:\mathscr{D}(T)\to Y,$$

$$x\mapsto Tx.$$

T 的**值域** $\mathscr{R}(T)$ 是一切象的集合，于是

$$\mathscr{R}(T)=\{y\in Y\mid y=Tx \text{ 对某一 } x\in\mathscr{D}(T)\}.$$

任一子集 $M\subset\mathscr{D}(T)$ 的象 $T(M)$ 是一切象 $Tx, x\in M$ 的集合。注意 $T(\mathscr{D}(T))=\mathscr{R}(T)$．

这一情况的一种说明在图 84 中被给出。

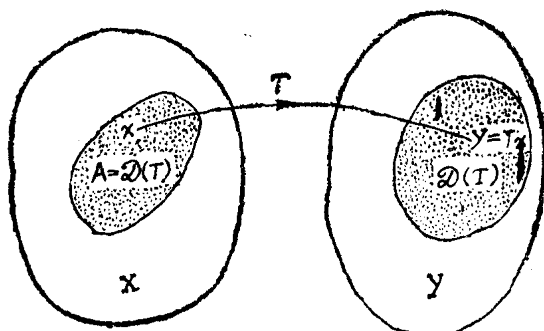


图84 映象的形象化

一点 $y_0\in Y$ 的**逆象**是所有使得 $Tx=y_0$ 的 $x\in\mathscr{D}(T)$ 的集合。类似地，一个子集合 $Z\subset Y$ 的逆象是一切使 $Tx\in Z$ 的 $x\in\mathscr{D}(T)$ 的集合。注意一点 $y_0\in Y$ 的逆象可能是空的，也可能是 $\mathscr{D}(T)$ 中的一个点，或是 $\mathscr{D}(T)$ 的任一子集，这由 y_0 和 T 的具体特性而决定。

一映象 T 是**内射的**，或**一对一的**，如果 x_1，$x_2\in\mathscr{D}(T)$

$$x_1\neq x_2 \text{ 就指出 } Tx_1\neq Tx_2,$$

即 $\mathscr{D}(T)$ 中不同的点就有不同的象，故 $\mathscr{R}(T)$ 中任意点的逆象是一个点。见图85。

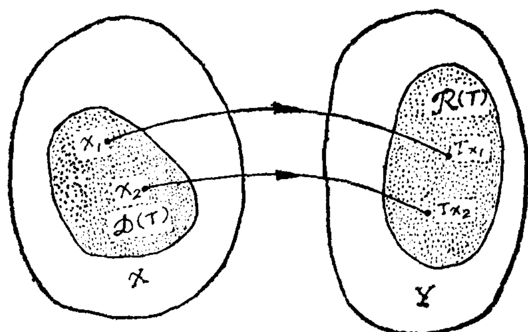


图85　关于内射映象的概念

$T:\mathscr{D}(T)\to Y$ 是**满射的**，或**满映象**，或把$\mathscr{D}(T)$映成Y（或映到Y上）的映象，如果$\mathscr{R}(T)=Y$。见图86。显然

$$\mathscr{D}(T)\to\mathscr{R}(T)$$
$$x\mapsto Tx$$

总是满射的。

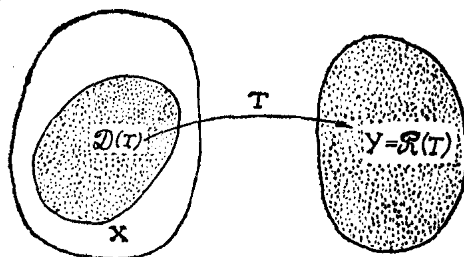


图86　满映象

T 是**双射的**，或**双射映象**，如果T既是内射的又是满射的。于是$T:\mathscr{D}(T)\to Y$ 的**逆映象** T^{-1} 是由 $Tx_0\mapsto x_0$定义的映象$T^{-1}:Y\to\mathscr{D}(T)$，即 T^{-1} 对每一 $y_0\in Y$，对应于 $x_0\in\mathscr{D}(T)$，对该 x_0 有 $Tx_0=y_0$。见图87

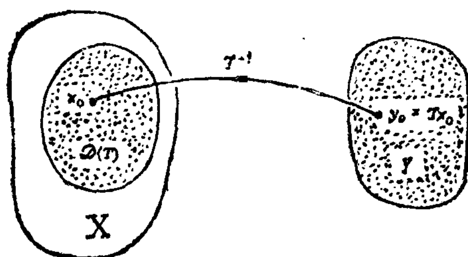


图87 双射映象 T 的逆 $T^{-1}: Y \to \mathscr{D}(T) \subset X$

对内射映象 $T: \mathscr{D}(T) \to Y$，其逆映象 $T^{-1}: \mathscr{R}(T) \to \mathscr{D}(T)$ 被定义为这样的映象，对每一 $y_0 \in \mathscr{R}(T)$ 被映成这样的 $x_0 \in \mathscr{D}(T)$，使得 $Tx_0 = y_0$.（见图88）。因此，按照上面稍为广泛一点使用逆的术语时，并不要求 T 是映满 Y 的；这一为许多作者所采用的方便术语，在本书中并不会引起误解

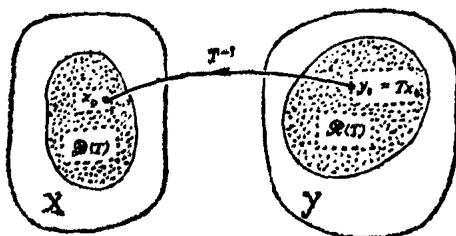


图88 一内射映象 T 的逆 $T^{-1}: \mathscr{R}(T) \to \mathscr{D}(T)$

两个映象 T_1 和 T_2 称为是**相等的**，如果 $\mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T_2)$ 而且对一切 $x \in \mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T_2)$，有 $T_1 x = T_2 x$.

映象 $T: \mathscr{D}(T) \to Y$ 到一子集 $B \subset \mathscr{D}(T)$ 的**限制** $T|_B$ 是 $B \to Y$ 的这样的映象，它由 T 限制 $x \in B$ 而得出（并不是让 x 在整个定义域 $\mathscr{D}(T)$ 上变动）；即 $T|_B: B \to Y$，$T|_B x = Tx$，对一切 $x \in B$ 成立。见579页图89.

T 由 $\mathscr{D}(T)$ 到一集 $C \supset \mathscr{D}(T)$ 的**扩张**是一映象 $\tilde{T}$，使得

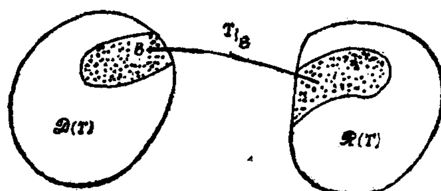


图89　映象 T 到一子集 $B\subset\mathscr{D}(T)$ 的限制 $T|_B$

$\tilde{T}|\mathscr{D}_{(T)}=T$，即 $\tilde{T}x=Tx$ 对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 成立．

T 的扩张 $\tilde{T}$ 称为是**真的**，如果 $\mathscr{D}(T)$ 是 $\mathscr{D}(\tilde{T})$ 的一**真子集**；于是 $\mathscr{D}(\tilde{T})-\mathscr{D}(T)\neq\Phi$，即对某一 $x\notin\mathscr{D}(T)$ 有 $x\in\mathscr{D}(\tilde{T})$．

映象的复合定义和记法如下．如果 $T:X\to Y$，$U:Y\to Z$，则

$$x\longmapsto U(Tx)\qquad\qquad (x\in X)$$

定义了一个由 X 到 Z 的映象，记为 U_0T 或简写成 UT，于是

$$UT:X\to Z,\quad x\longmapsto UTx\quad (x\in X)$$

并称之为 U 与 T 的**复合**或**积**(见图90)．注意，T 是首先作用，次序是本质的．TU 一般来说甚至没有意义．如果 $T:X\to Y$，$U:Y\to X$，则 $UT:X\to X$ 和 $TU:Y\to Y$ 都有意义，不过如果 $X\neq Y$，则 UT 和 TU 是不同的．(一般来说，即使当 $X=Y$ 时，它们也将是不同的)．

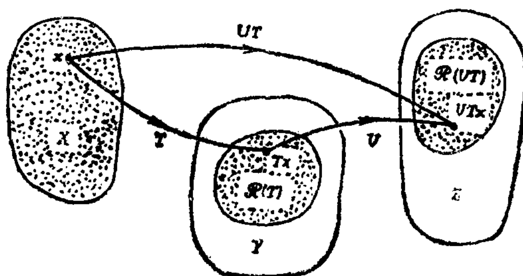


图90　两个映象的复合

A1.3　族

若对每一正整数 n 有一实或复数 x_n 与之相应，于是得出一

实或复数的序列(x_n)。这一方法可当作$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$到实或复数之一映象，$x_n$是$n$的象集。$\mathbf{N}$称为序列的**指标集**。

"标注指标"的这种方法可加以推广．我们可以取任意非空集I（有限，可数或不可数）代替$\mathbf{N}$，而且可以映I到任何其他给定的非空集X。这就得出X的**元的一个族**，记为$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$，或简记为(x_α)，这里$x_\alpha\in X$是$\alpha\in\mathrm{I}$的象。我们注意到，对I中的某$\alpha\neq\beta$，可能发生$x_\alpha=x_\beta$。集I称为族的**指标集**。如果把指标映象限制到指标集之一非空子集，则得该族之一**子族**。

若X的元是一给定集的子集，则得一**子集族**$(B_\alpha)_{\alpha\in I}$，这里B_α是α的象。

族(B_α)的**并**$\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$是这样的元的集合，其每一元至少属于某一$B_\alpha$，又**交**$\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$是这样的元的集合，其每一元属于每一$B_\alpha$，$\alpha\in I$。如果$I=\mathbf{N}$，我们写成

$$\bigcup_{\alpha=1}^{\infty}B_\alpha \text{和} \bigcap_{\alpha=1}^{\infty}B_\alpha$$

如果$I=\{1, 2\}$，我们分别写成$B_1\cup B_2$和$B_1\cap B_2$。

我们必须注意区分一个族$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$与其元是该族的元的集X的子集之间的差别，前者是指标集I在指标映象下的象。

对任意的非空子集$M\subset X$，我们总可以找出一X的元的族，其元的集为M。例如，我们可以取由M到X的自然内射（即X上的恒等映象$x\longmapsto x$在M上的限制）所定义的族。

A1.4 等价关系

设X和Y是给定的非空集。笛卡尔积$X\times Y$（见前面）的任一子集R称为一（二元）**关系**。$(x,y)\in R$记为$R(x,y)$。

X上的一**等价关系**是一关系$R\subset X\times X$，它满足下面的条件：

$$R(x,x) \text{ 对一切 } x\in X \qquad \text{(自反性)}$$

$$(1) \qquad R(x,y) \text{ 蕴含 } R(y,x) \qquad \text{(对称性)}$$

$$R(x,y)\text{和 } R(y,z)\text{蕴含 } R(x,z). \qquad \text{(传递性)}$$

当 R 是 X 上之一等价关系时，则通常把 $R(x,y)$ 写成 $x\sim y$（读做"x 等价于 y"）。此时，（1）变成

$$x\sim x$$

$$x\sim y\Longrightarrow y\sim x$$

$$x\sim y,\ y\sim z\Longrightarrow x\sim z.$$

任一 $x_0\in X$ 的**等价类**是一切等价于 x_0 的 $y\in X$ 的集合，而且任一这样的 y 称为该类的代表元。关于 R 的等价类构成 X 的一个分划。

由定义，一非空集 X 的一**分划**，是 X 这样的一非空子集族，它们是两两不相交的且其并为 X。

A1.5 紧性

集 X 的子集 M 的一**覆盖**是 X 的一子集族，比如，$(B_\alpha)_{\alpha\in I}$（I 为指标集），使得

$$M\subset\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha.$$

特别，若 (B_α) 是 X 的一覆盖，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha=X.$$

一覆盖称为**有限的**，如果它仅由有限多个集 B_α 组成。若 $X=(X,\mathscr{T})$ 是一拓扑空间（例如，一度量空间；见 1.3节），一覆盖称为**开的**，如果每一 B_α 都是开集。

一拓朴空间 $X=(X,\mathscr{T})$ 称为

（a） **紧的**，如果 X 的每一开覆盖包含 X 的一有限的覆盖，即覆盖 X 的一有限子族。

（b） **可数紧的**，如果 X 的每一可数的开覆盖都包含 X 的

一有限覆盖.

(*c*) **列紧的**，如果 X 中的每一序列都包含一收敛的子列.

子集 $M\subset(X,\mathscr{T})$ 称为紧的(可数紧的，列紧的)，如果 M 作为子空间 $(M,\mathscr{T}_M)$ 考虑时是紧的(可数紧的，列紧的)；这里 M 上的诱导拓扑 $\mathscr{T}_M$ 由一切集 $M\cap A$，$A\in\mathscr{T}$ 所组成。

对度量空间而言，这三个紧性概念是等价的，即其中任一个蕴含其他两个.

A1.6 上确界和下确界

实直线 $\mathbf{R}$ 的子集 E 是**上有界的**，如果 E 有一**上界**，即存在一 $b\in\mathbf{R}$，使得对一切 $x\in E$ 有 $x\leqslant b$. 于是如果 $E\neq\varnothing$，则存在 E 的**上确界**(或 E 的最小上界)，记为

$$\sup E,$$

即是 E 的这样的上界使得 $\sup E\leqslant b$ 对 E 的每一上界 b 皆成立.

另外对每一非空子集 $C\subset E$ 有

$$\sup C\leqslant\sup E.$$

类似地，E 是**下有界的**，如果有一**下界**，即如果存在 $a\in\mathbf{R}$，使得对一切 $x\in E$ 有 $x\geqslant a$. 于是如果 $E\neq\varnothing$，则存在 E 的**下确界**(或 E 的最大下界)，记为

$$\inf E,$$

即是 E 的这样的下界使得 $\inf E\geqslant a$ 对 E 的每一下界 a 成立. 而且对每一非空子集 $C\subset E$ 有

$$\inf C\geqslant\inf E.$$

E 是**有界的**，如果 E 既是上有界的又是下有界的. 于是如果 $E\neq\varnothing$，则

$$\inf E\leqslant\sup E.$$

对一映象 $T:\mathscr{D}(T)\to\mathbf{R}$，如果值域 $\mathscr{R}(T)$ (假定不空) 是上有界的，则其上确界记为

$$\sup_{x\in\mathscr{D}(T)} Tx;$$

如果$\mathscr{R}(T)$是下有界的，其下确界记为

$$\inf_{x\in\mathscr{D}(T)} Tx.$$

类似的记号被用于$\mathscr{R}(T)$的子集。

A1.7 Cauchy收敛准则

一数a称为一（实或复）数列(x_n)的极限点，如果对每一给定的$\varepsilon>0$，对无限多的n有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

Bolzano-Weierstrass定理 说明一有界序列(x_n)至少有一极限点，根据定义，在这里一序列有无穷多项是本质的。

一（实或复）序列(x_n)称为是收敛的，如果存在一数x，使得对每一给定的$\varepsilon>0$，下面的条件成立：

$$|x_n-x|<\varepsilon,\ \text{除有限多个外，对一切}\ n\ \text{成立。}$$

这一x称为序列(x_n)的极限。

收敛序列的极限是唯一的。注意它是极限点（为什么？），而且是收敛序列所具有的唯一的极限点。

现在我们叙述并证明Cauchy收敛定理，其重要性是由于当决定收敛性时，我们不必知道极限。

Cauchy收敛定理 一（实或复）序列(x_n)是收敛的当而且仅当对每一$\varepsilon>0$，存在一N，使得对一切$m,n>N$有

$$(1)\qquad |x_m-x_n|<\varepsilon,$$

证（a）如果(x_n)收敛且c是它的极限，则对每一给定的$\varepsilon>0$，存在一N（依赖于ε），使得

$$|x_n-c|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{对每一}\ n>N,$$

因此由三角不等式，当$m,n>N$时，我们得出

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - c| + |c - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(*b*) 反之，设(1)中的论断成立。给定$\varepsilon>0$，我们可以在(1)中选取$n=k>N$，而且得知每一x_m，$m>N$都位于以x_k为心，ε为半径的圆盘D中。因为有一包含D和有限个$x_n \notin D$的圆盘，故序列(x_n)是有界的。由 Bolzano-Weierstrass 定理，它有一极限点a. 因为(1)对任意给定的$\varepsilon>0$成立，故存在一个N^*，使得当$m,n>N^*$时有$|x_m-x_n|<\varepsilon/2$。取定$n>N^*$使得$|x_n-a|<\varepsilon/2$，由三角不等式，对一切$m>N^*$有

$$|x_m - a| \leqslant |x_m + x_n| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

这就证明了(x_n)是极限为a的收敛列。∎

A1.8 群

群的定义仅在 7.7 节中需要。

群$G=(G,\cdot)$是元x，y，$z\cdots$的集合G及一映象

(1) $$G \times G \to G$$
$$(x,y) \mapsto xy$$

使得下面的公理被满足。

($G1$) 结合性。对一切$x,y,z\in G$,

$$(xy)z = x(yz).$$

($G2$) 单位元e的存在性。即存在这样的元e，使得对一切$x\in G$有

$$xe = ex = x。$$

($G3$) x的逆x^{-1}的存在性。对每一$x\in G$存在G的元，写作x^{-1}，并称为x的逆，使得

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e。$$

e是唯一的。对每一$x\in G$，逆x^{-1}是唯一的，G称为交换群

或 Abel 群，如果 G 还满足下面的

(G_4) 可交换性。对一切的 $x,y\in G$ 有

$$xy=yx.$$

附 录 二

奇数题号习题答案

1.1 节

3. $(M1)$到$(M3)$是显然的。我们在下式

$$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|\leqslant(|x-z|^{1/2}+|z-y|^{1/2})^2$$

两端开平方根，即得$(M4)$。

5. (i) $k>0$，(ii) $k=0$。

7. 离散度量，见1.1-8。

9. $(M1)$到$(M3)$是显然的。$(M4)$得自于$d(x,y)\leqslant 1$和

$d(x,z)+d(z,y)\geqslant 1$， $(x,y,z$不全相等$)$

当$x=y=z$时是显然的。

13. $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)\Longrightarrow d(x,z)-d(y,z)\leqslant d(x,y)$,

$d(y,z)\leqslant d(y,x)+d(x,z)\Longrightarrow -d(x,y)\leqslant d(x,z)-d(y,z)$.

15. 在$(M4)$中令$y=x$，等等。

1.2 节

1. 三角形不等式的证明思想仍与以前的相同。

3. 当$1\leqslant j\leqslant n$时取$\eta_j=1$，当$j>n$时取$\eta_j=0$，并平方(11)。

5. $(1/n)\notin l^1$，但$(1/n)\in l^p(p>1)$，因为$\sum n^{-p}<\infty$，如果

$p>1$。

7. $\delta(A)=\sup\limits_{x,y\in A}d(x,y)=0 \Longrightarrow d(x,y)=0 \Longrightarrow x=y$。

逆结论是显然的。

9. 逆命题不成立。

11. $(M1)$到$(M3)$显然。$(M4)$有下面的形式

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leqslant \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}.$$

上式由关于 d 的$(M4)$和 1.2-1 中所用的讨论可得。

X 的有界性由$\tilde{d}(x,y)<1$ 得出。

15. $\tilde{\tilde{d}}(x,y)=0 \Longleftrightarrow d_1(x_1,y_1)=d_2(x_2,y_2)=0 \Longleftrightarrow x=y$。

三角不等式由下式得出：

$$\max_{k=1,2} d_k(x_k,y_k) \leqslant \max_{k=1,2}[d_k(x_k,z_k)+d_k(z_k,y_k)]$$

$$\leqslant \max_{i=1,2} d_i(x_i,z_i)+\max_{j=1,2} d_j(z_j,y_j).$$

1.3 节

1. (a)设 $x\in B(x_0;r)$。则$d(x,x_0)=a<r$，且$B(x;(r-a)/2)$是 x 的包含于 $B(x_0;r)$ 中的一邻域。(b)通过证明对每一$y\notin \tilde{B}(x_0;r)$在 $\tilde{B}(x_0;r)^c$ 中存在以 y 为心的球来证明 $\tilde{B}(x_0,r)^c$是开集。

3. $\sqrt{2}$。

5. (b)任意子集 $A\subset X$ 是开的，因对任一 $a\in A$，开球 $B\left(a;\frac{1}{2}\right)=\{a\}\subset A$。用同样的讨论，$A^c$ 是开的，故 $(A^c)^c=A$ 是闭的。

7. (a)整数，(b)R，(c)C，$(d)$$\{z \mid |z|\leqslant 1\}$。

11. $(a)$$\{-1,1\}$，$(b)$R，$(c)$圆$\{z \mid |z|=1\}$。

13. 设 X 是可分的。则 X 有一可数的稠密子集 Y。设 $x\in X$，且 $\varepsilon>0$ 被给定。因 Y 在 X 中稠，故有 $\bar{Y}=X$，且 $x\in\bar{Y}$，故 x 的 ε-邻域 $B(x;\varepsilon)$ 包含 $y\in Y$，且 $d(x,y)<\varepsilon$。反之，若 X 有一可数子集 Y 具有在题目中所给定的性质，则每一 $x\in X$ 是 Y 之一点或是 Y 之一聚点。故 $\bar{Y}=X$，所以 X 是可分的。

15. $x(t)=\sin t$ 定义了一个 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的连续映象，它把开集 $(0,2\pi)$ 映成闭集 $[-1,1]$。

1.4 节

1. $d(x_n,x)<\varepsilon\,(n>N)$ 蕴含 $d(x_{n_k},x)<\varepsilon\,(n_k>N)$。

9. 这得自于 $\tilde{\tilde{d}}(x,y)\leqslant\tilde{d}(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant 2\tilde{\tilde{d}}(x,y)$。

1.5 节

1. 见1.4-7。

3. (x_n)，这里 $x_n=(1,\ 1/2,\ 1/3,\ \cdots,\ 1/n,\ 0,\ 0,\ \cdots)$，是 M 中的 Cauchy 列，因为 $d(x_m,x_n)=1/(m+1)$，$m<n$，但 $x_n\to x=(1/n)\in X$，$x\notin M$。

5. X 是 $\mathbf{R}$ 中的闭集；利用 1.4-7。第二个证明。X 中 Cauchy 序列 (x_n) 的项，从某项 x_n 起必是相等的。

7. 非收敛的 Cauchy 列是 (x_n)，这里 $x_n=n$。

9. 我们证明在任一 $t=t_0\in[a,b]$ 处 x 是连续的。因为收敛是一致的，故对每一 $\varepsilon>0$，存在一 $N(\varepsilon)$ 使得

$$|x(t)-x_N(t)|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad\text{对一切 } t\in[a,b]\text{成立。}$$

因 x_N 在 t_0 处是连续的，故存在 $\delta>0$，使得对一切满足 $|t-t_0|<\delta$ 的 $t\in[a,b]$ 都有

$$|x_N(t)-x_N(t_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

对这些 t，根据三角不等式

$$|x(t)-x(t_0)|\leqslant|x(t)-x_N(t)|+|x_N(t)-x_N(t_0)|$$
$$+|x_N(t_0)-x(t_0)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3},$$

故 x 在 t_0 处连续。

11． 设 $x_n\to x$。取任意固定的 j，则对每一 $\varepsilon>0$，存在 N 使得

$$\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}{1+|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}\leqslant d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2^j(1+\varepsilon)},\ (n>N).$$

故 $|\xi_j^{(n)}-\xi_j|<\varepsilon$，$(n>N)$．充分性的证明是显然的。

13． 由直接算得 $d(x_n,x_m)=m^{-1}-n^{-1}(m<n)$．

15． 对每一 $\varepsilon>0$，存在 N 使得当 $n>m>N$ 时，有

$$d(x_n,x_m)=\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{j^2}<\varepsilon.$$

但(x_n)不收敛于任一 $x=(\xi_j)\in X$，因为当 j 大于某一 $\widetilde{N}$时 $\xi_j=0$，故当 $n>\widetilde{N}$ 时

$$d(x_n,x)=|1-\xi_1|+\left|\frac{1}{4}-\xi_2\right|+\cdots+\frac{1}{(\widetilde{N}+1)^2}$$
$$+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{(\widetilde{N}+1)^2}.$$

因 $\widetilde{N}$ 是一定数，故 $d(x_n,x)\to 0$ 是不可能的。

1.6 节

3． X

5.(b) R 和具 R 上的距离的区间$(-1,1)$。一同胚映象是 $x\mapsto\frac{2}{\pi}\arctan x$.

7. 如果$\tilde{d}(x_m,x_n)<\varepsilon<\frac{1}{2}$，则

$$d(x_m,x_n)=\frac{\tilde{d}(x_m,x_n)}{1-\tilde{d}(x_m,x_n)}<2\tilde{d}(x_m,x_n).$$

因此，如果(x_n)是$(X,\tilde{d})$中的 Cauchy 列，则它也是(X,d)中的 Cauchy 列，而且它在(X,d)中的极限就是它在$(X,\tilde{d})$中的极限。

9. 当$n\to\infty$时，$d(x_n',l)\leqslant d(x_n',x_n)+d(x_n,l)\to 0$。

11. 如果$(x_n)\sim(y_n)$，$(y_n)\sim(z_n)$，则$(x_n)\sim(z_n)$，这由下式可以看出

$$d(x_n,z_n)\leqslant d(x_n,y_n)+d(y_n,z_n)\to 0\ (n\to\infty).$$

15. 宽为 2 的开的“垂直带”。

2.1 节

3. 平面$\xi_1=\xi_2$。

7. $\{e_1,\cdots,e_n,ie_1,\cdots,ie_n\},n,2n$。

9. $\{e_0,\cdots,e_n\}$，这里$e_j(t)=t^j,t\in[a,b]$。不是。

15. 全体平行于ξ_1-轴的直线的集合，$\{0\}$，X。

2.2 节

3. 由三角不等式和$(N3)$，

$$\|y\|=\|y-x+x\|\leqslant\|y-x\|+\|x\|,$$
$$\|x\|=\|x-y+y\|\leqslant\|y-x\|+\|y\|.$$

由上即得

$$\|y\|-\|x\|\leqslant\|y-x\|,$$
$$\|y\|-\|x\|\geqslant-\|y-x\|.$$

5. $(N1)$到$(N3)$易于证明，而$(N4)$由 1.2 节当$p=2$时的 Minkowski 不等式得之（求和只从 1 到n）。

7. $(N1)$ 到 $(N3)$ 是显然的，而 $(N4)$ 由（1.2节的）Minkowski 不等式得出。

11. $\|z\|=\|\alpha x+(1-\alpha)y\|\leqslant\alpha\|x\|+(1-\alpha)\|y\|$

$$\leqslant\alpha+(1-\alpha)=1.$$

13. 它不满足(9b)。

15. 设 M 是有界的，比如说，$\delta(M)=\sup_{x,y\in M}\|x-y\|=b<\infty$。考察任意的 $x\in M$。取一固定的 $x_0\in M$，令 $c=b+\|x_0\|$。则有

$$\|x\|=\|x-x_0+x_0\|\leqslant\|x-x_0\|+\|x_0\|\leqslant b+\|x_0\|=c.$$

反之，对每一 $x\in M$ 设 $\|x\|\leqslant c$，则对一切 $x,y\in M$ 有

$$\|x-y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\leqslant 2c,\text{ 且 }\delta(M)\leqslant 2c.$$

2.3 节

3. 例如，$x=(\xi_n)=(1/n)\in\overline{Y}$，但 $x\notin Y$。

5. 这可由第 4 题直接得出。

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，但

$$\sum_{j=1}^{n}y_j=s_n=(1,1/4,1/9,\cdots 1/n^2,0,0,\cdots)\to s\notin Y.$$

9. 部分和的序列(s_n)是 Cauchy 序列，因为当 $m<n$ 时

$$\|s_n-s_m\|=\|x_{m+1}+\cdots+x_n\|\leqslant\|x_{m+1}\|+\cdots+\|x_n\|$$
$$\leqslant\|x_{m+1}\|+\|x_{m+2}\|+\cdots.$$

13. 如果 $p(x)=p(y)=0$，则由$(N4)$，$(N3)$和$(N1)$有 $p(\alpha x+\beta y)=0$。$\|\hat{x}\|_0$ 是唯一的，因为对任一$v\in N$ 和 $x\in X$ 我们有 $p(v)=0$。又由$(N4)$

$$p(x)=p(x+v-v)\leqslant p(x+v)+0\leqslant p(x).$$

$(N2)$成立，这是因为 $p(0)=0$ 和$\|\hat{x}\|_0=0$ 就蕴含 $p(x)=0$，从而

有$x\in N$。故 x 是 X/N 的零元。

15. $\|x\|=0 \Longleftrightarrow \|x_1\|_1=\|x_2\|_2=0 \Longleftrightarrow x=(0,0)=0$。

设 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$。则有

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=\max(\|x_1+y_1\|_1,\|x_2+y_2\|_2)\\&\leqslant\max(\|x_1\|_1+\|y_1\|_1,\|x_2\|_2+\|y_2\|_2)\\&\leqslant\max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2)+\max(\|y_1\|_1,\|y_2\|_2)\\&=\|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

2.4 节

7. 设 $e_1=(1,0,\cdots,0)$，$e_2=(0,1,0\cdots)$等等。根据1.2节的 Cauchy-Schwarz 不等式(11)

$$\|x\|\leqslant\sum|\xi_j|\,\|e_j\|\leqslant b\|x\|_2,\quad 这里\ b^2=\sum\|e_j\|^2.$$

2.5 节

7. 设$\{b_1\cdots b_n\}$是 Y 的基。设 $y_k=\sum\alpha_{kl}b_l\in Y$ 且 $\|y_k-v\|\to a$。则诸 α_{kl} 构成一有界集(见引理2.4-1)，而且(y_k)有一子序列(y_{k_j})使得对每一 $l=1,\cdots,n$，$\alpha_{k_jl}\to\alpha_l$，并有

$$\tilde{y}=\sum\alpha_l b_l\in Y,\quad \|v-\tilde{y}\|\leqslant\|v-y_{k_j}\|+\sum|\alpha_{k_jl}-\alpha_l|\,\|b_l\|,$$

这就蕴含$\|v-\tilde{y}\|=a$。现在我们重复 Riesz 引理证明中的讨论(注意此时应代(1)式以$\|v-\tilde{y}\|=a$)。于是我们导出，对每一 $y\in Y$，$\tilde{z}=\|v-\tilde{y}\|^{-1}(v-\tilde{y})$满足$\|\tilde{z}-y\|\geqslant1$。

9. 因 X 是紧的，故 M 中任一序列(x_n)有在 X 中收敛的子序列(x_{n_k})，比如，$x_{n_k}\to x\in X$，而且由1.4-6(a)，$x\in\overline{M}$。因 M 是闭的，故 $x\in M$。于是 M 是紧集。

2.6 节

3. 定义域是$\mathbf{R}^2$。值域是ξ_1-轴，ξ_2-轴，$\mathbf{R}^2$。零空间是ξ_2-轴，ξ_1-轴，原点。

5． 设 Tx_1，$Tx_2\in T(V)$。则 $x_1, x_2\in V$，$\alpha x_1+\beta x_2\in V$。故 $T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2\in T(V)$。

设 x_1, x_2在逆象内。于是$Tx_1, Tx_2\in W$, $\alpha Tx_1+\beta Tx_2\in W$, $\alpha Tx_1+\beta Tx_2=T(\alpha x_1+\beta x_2)$。故 $\alpha x_1+\beta x_2$ 是逆象内之一元。

7． 不是，在几何上这也是显然的。

11． b 是非奇异的($\det b\neq 0$)。

13． 否则对某些 $\alpha_j\neq 0$ 有 $\alpha_1 Tx_1+\cdots+\alpha_n Tx_n=0$。又因 T^{-1} 存在且为线性的，故

$$T^{-1}(\alpha_1 Tx_1+\cdots+\alpha_n Tx_n)=\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n=0,$$

上式表明$\{x_1, \cdots, x_n\}$的线性相关性。矛盾。

15． 因对每一 $y\in X$ 有 $y=Tx$，故 $\mathscr{R}(T)=X$，这里

$$x(t)=\int_0^t y(\tau)\,d\tau.$$

但 T^{-1} 不存在，因为对每一常值函数 $Tx=0$。这就表明第 14 题中有限维的假定是本质的。

2.7 节

1． 我们有

$$\|T_1T_2\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_1T_2x\|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|T_1\|\,\|T_2x\|$$
$$=\|T_1\|\sup_{\|x\|=1}\|T_2x\|=\|T_1\|\cdot\|T_2\|.$$

3． 由假定$\|x\|=\gamma<1$，另由(3)$\|Tx\|\leqslant\|T\|\gamma<\|T\|$。

5． $\|T\|=1$。

7． 设 $Tx=0$，于是 $0=\|Tx\|\geqslant b\|x\|$，$\|x\|=0$，$x=0$，故由 2.6-10(a)T^{-1}存在。因$\mathscr{R}(T)=Y$，故$T^{-1}: Y\to X$。令$y=Tx$。则 $T^{-1}y=x$；又 T^{-1} 的有界性，由下式得之。

$$\|T^{-1}y\|=\|x\|\leqslant\frac{1}{b}\|Tx\|=\frac{1}{b}\|y\|.$$

9. 在$[0,1]$上使$y(0)=0$的全体连续可微函数y所构成的子空间。$T^{-1}y=y'$，T^{-1}是线性的，但是无界的，因为$|(t^n)'|=n|t^{n-1}|$蕴含$\|T^{-1}\|\geqslant n$。亦见 2.7-5。

11. 是、是。

13. 第一个论断由2.7-7中最后的公式得出。为了证明第二个论断，考察单位矩阵。

15. 设$\|\cdot\|_0$是自然范数。由第14题

$$\|A\|_0=\sup_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_2\leqslant\|A\|.$$

$\|A\|=0$的情形是显然的。如果$\|A\|>0$，则存在$k=s$使得

$$\|A\|=\max_k\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{jk}|=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{js}|.$$

选取这样的$x=(\xi_j)$，其中$\xi_s=1$，当$j\neq s$时$\xi_j=0$。于是$\|x\|_1=1$，$\|Ax\|_2=\sum|\alpha_{js}|=\|A\|$。故$\|A\|_0=\|A\|$。

2.8 节

3. 2.

5. 是的，$\|f\|=1$。

7. $g=\bar{f}$是有界的但不是线性的，因为$g(\alpha x)=\overline{f(\alpha x)}=\bar{\alpha}g(x)$。

9. 设$a=f(x)/f(x_0)$且$y=x-ax_0$。于是我们有$x=ax_0+y$，$f(y)=f(x)-af(x_0)=0$。故$y\in\mathcal{N}(f)$。

唯一性。设$y+ax_0=\tilde{y}+\tilde{a}x_0$，于是$y-\tilde{y}=(\tilde{a}-a)x_0$。故$\tilde{a}=a$，因为，不然的话，就有

$$x_0=(\tilde{a}-a)^{-1}(y-\tilde{y})\in\mathcal{N}(f),$$

矛盾。故也有$y=\tilde{y}$。

11. 由第 9 题 $x=y+[f_1(x)/f_1(x_0)]x_0$。因$y\in\mathcal{N}(f_1)=$

$\mathcal{N}(f_2)$，故$f_2(y)=0$。这就得出比值$f_2(x)=f_1(x)f_2(x_0)/f_1(x_0)$。

13． 对一$y_0\in Y$，$f(y_0)=\gamma\neq 0$的假定就与下式发生矛盾：对任意的

$$a=\frac{a}{\gamma}f(y_0)=f\left(\frac{a}{\gamma}y_0\right)\in f(y).$$

15． 如果$\|x\|\leqslant 1$，则$f(x)\leqslant|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|\leqslant\|f\|$，但$\|f\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|$表明，对任意的$\varepsilon>0$，存在一$x$，$\|x\|\leqslant 1$，使得$f(x)>\|f\|-\varepsilon$。

2.9 节

1． $\{ax_0\mid a\in\mathbf{R},x_0=(2,4,-7)\}$

3． $f_1=(1,0,0)$，$f_2=(0,1,0)$，$f_3=(0,0,1)$

5． n或$n-1$

7． $(a_2,-a_1,0)$，$(a_3,0,-a_1)$

11． 否则，$f(x)-f(y)=f(x-y)=0$对一切$f\in X^*$成立。另由2.9-2有$x-y=0$，矛盾。

13． 设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是X中这样的基，使得当$p<n$时，$\{e_1\cdots,e_p\}$是Z的一组基，再设$\{f_1,\cdots,f_n\}$是对偶基。令

$$\tilde{f}=\sum_{j=1}^{p}f(e_j)f_j.$$

于是$\tilde{f}(e_k)=f(e_k)$，$k=1,\cdots,p$。故$\tilde{f}|_Z=f$。

15． $\tilde{f}(x)=\frac{1}{2}\xi_1+k\xi_2-\frac{1}{2}\xi_3$。是的。

2.10 节

1． 零算子0：$X\to\{0\}\subset Y$，算子$-T$。

3． $\mathscr{D}(\alpha T_1+\beta T_2)=\mathscr{D}(T_1)\cap\mathscr{D}(T_2)$；二值域必在同一空

间内。

7. 在X上，其中范数由$\|x\|_1=|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|$定义，由$f(x)=\alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n$所表示的线性泛函有范数$\|f\|=\max|\alpha_j|$。

11. 利用第10题，其中$Y=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$。

13. 如果$f\in\overline{M^a}$，则在M^a中存在一序列(f_n)，使得$f_n\to f$。对任一$x\in M$我们有$f_n(x)=0$，和$f(x)=0$。故$f\in M^a$，于是M^a是闭的。$\{0\}, X'$。

15. $(1,1,1)$

3.1 节

1. 我们得出

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\&\quad+\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\&=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle=2\|x\|^2+2\|y\|^2.\end{aligned}$$

3. 根据假定

$$\begin{aligned}0&=\langle x+y,x+y\rangle-\|x\|^2-\|y\|^2\\&=\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle=\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}=2Re\langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

7. $\langle x,u-v\rangle=0$；取$x=u-v$。

9. 这由直接计算可得.

11. 不是，见3.1-7。

15. 不是，$\gamma_{jk}=\langle e_j,e_k\rangle=\overline{\langle e_k,e_j\rangle}=\overline{\gamma_{kj}}$。

3.2节

1. 对向量$x\neq0$和$y\neq0$，点积是

$x\cdot y=|x||y|\cos\theta$，故$|x\cdot y|\leqslant|x||y|$。

3. 见3.2-4(b)。是。否。

5 我们有

$$\|x_n-x\|^2=\langle x_n-x, x_n-x\rangle$$
$$=\|x_n\|^2-\langle x_n, x\rangle-\langle x, x_n\rangle+\|x\|^2$$
$$\to 2\|x\|^2-2\langle x, x\rangle=0.$$

7. 由

$$\langle x\pm\alpha y, x\pm\alpha y\rangle=\|x\|^2\pm\bar{\alpha}\langle x, y\rangle\pm\alpha\langle y, x\rangle+|\alpha|^2\|y\|^2$$

我们看出，正交性蕴含所给的条件。反之，该条件蕴含

$$\bar{\alpha}\langle x, y\rangle+\alpha\langle y, x\rangle=0.$$

若空间是实的，取 $\alpha=1$，若为复的则取 $\alpha=1$, $\alpha=i$，即得 $\langle x, y\rangle=0$。

9. 使用定理1.4-8和

$$\|x\|_2^2=\int_a^b|x(t)|^2dt\leqslant(b-a)\|x\|_\infty^2.$$

3.3节

1. (x_n)是Cauchy列，因为由假定和3.1节的平行四边形等式，我们可得

$$\|x_n-x_m\|^2=2\|x_m\|^2+2\|x_n\|^2-\|x_n+x_m\|^2$$
$$\leqslant 2\|x_m\|^2+2\|x_n\|^2-4d^2.$$

5. $(a)\{z\mid z=\alpha(\xi_2,-\xi_1), \alpha\in\mathbf{R}\}, (b)\{0\}$.

7. $(a)\ x\in A\Rightarrow x\perp A^{\perp}\Rightarrow x\in A^{\perp\perp}\Rightarrow A\subset A^{\perp\perp}$，这如课文中所得。

$(b)\ x\in B^{\perp}\Rightarrow x\perp B\supset A\Rightarrow x\in A^{\perp}\Rightarrow B^{\perp}\subset A^{\perp}$.

(c)由(a)，$A^{\perp\perp\perp}=(A^{\perp})^{\perp\perp}\supset A^{\perp}$；由$(b)$有

$$A\subset A^{\perp\perp}\Rightarrow A^{\perp}\supset(A^{\perp\perp})^{\perp}.$$

9. 令$Y=Y^{\perp\perp}=(Y^{\perp})^{\perp}$。于是由第8题$Y$是闭的。逆结论在引理3.3-6中已叙述。

3.4 节

1. 这是Gram—Schmidt法的一直接的推论。

3. 对任意的x和$y\neq 0$，令$e=\|y\|^{-1}y$，由$n=1$时的（12*）式我们有

$$|\langle x,e\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$$

用$\|y\|^2$乘之，即得$|\langle x,y\rangle|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$。

5. $y\in Y_n, x=y+(x-y)$，且$x-y\perp e_m$，因为

$\langle x-y,e_m\rangle=\langle x-\sum\alpha_k e_k,e_m\rangle=\langle x,e_m\rangle-\alpha_m=0$。

7. 由Cauchy—Schwarz不等式(1.2节)和(12)

$$\begin{aligned}\sum|\langle x,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle|&\leqslant[\sum|\langle x,e_k\rangle|^2]^{1/2}[\sum|\langle x,e_k\rangle|^2]^{1/2}\\&\leqslant\|x\|\|y\|.\end{aligned}$$

9. $1/\sqrt{2}$，$(3/2)^{1/2}t$，$(5/8)^{1/2}(3t^2-1)$。

3.5 节

1. 引用正交性和3.5-2的证明中的符号，我们得出

$\|s_n\|^2=\|\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n\|^2=|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_n|^2=\sigma_n$

又由3.2-2，$s_n\to x$蕴含$\|s_n\|^2=\langle s_n,s_n\rangle\to\langle x,x\rangle$。

3. 对函数$z\perp(e_k)$，和可能异于x。例如，取$x=(1,1,1)\in\mathbf{R}^3$，且$(e_1,e_2)\in\mathbf{R}^3$，这里$e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0)$。

5. (s_n)，其中$s_n=x_1+\cdots+x_n$是Cauchy列，因为

$$\|s_n-s_m\|\leqslant\sum_{j=m+1}^{n}\|x_j\|\leqslant\sum_{j=m+1}^{\infty}\|x_j\|\to 0(m\to\infty).$$

又(s_n)的收敛性由H的完备性得出，亦见2.3节习题7到习题9。

7. 由3.5-2(c)，级数收敛并定义了y，又由3.5-2(b)，$\langle x,e_k\rangle=\langle y,e_k\rangle$，故$x-y\perp e_k$得自于

$$\langle x-y,e_k\rangle=\langle x,e_k\rangle-\langle y,e_k\rangle=0.$$

9. 8题指出，$e_n\in\overline{M}_2$当而且仅当(a)成立，而$\tilde{e}_n\in\overline{M}_1$当而且仅当(b)成立。于是(a)推出$(e_n)$在$\overline{M}_2$内，而(b)推出$(\tilde{e}_n)$在$\overline{M}_1$内。故$\overline{M}_1=\overline{M}_2$。

3.6 节

1. 否。

3. 勾股弦定理。

5. 这由定理3.6-3和第4题中的关系蕴含(3)的事实得出。反之亦然。

7. 在这种情况下，我们可以利用 Gram—Schmidt 方法，这与第 6 题所证明的一样.

9. $\langle v-w, x\rangle=0$ 对一切 $x\in M$ 成立就蕴含 $v-w\perp M$。故由 3.6-2(a)，$v-w=0$。

3.7 节

1. 我们得出

$$\int_{-1}^{1} p_m[(1-t^2)p_n']'\,dt-\int_{-1}^{1} p_n[(1-t^2)p_m']'\,dt$$

$$=(m-n)(m+n+1)\int_{1}^{1} p_n p_m dt.$$

在左端分部积分指出左端为零，故右端的积分当 $m-n\neq 0$ 时必然为零。

3. 用二项式定理展开 $(1-q)^{-1/2}$。然后代 $q=2tw-w^2$。用二项式定理展开 q 的幂。证明在所得的展式中，幂 w^n 有系数 $p_n(t)$，这正如由(2c)所给出者.

9. $y(t)=e^{-t^2/2}H_n(t)$。

11. 我们得出

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\,w^n=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\frac{t^m w^n}{m!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}w^n$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^m}{m!}\quad\frac{w^m}{(1-w)^{m+1}}=\frac{e^{-wt/(1-w)}}{1-w}.$$

13．对第12题中的(a)式微分．在结果中用第12题的(b)式表示L'_{n+1}和L'_{n-1}，这就给出(c)。由(c)和(b)得

$$(d)\qquad nL'_{n-1}=nL_n+(n-t)L'_n.$$

微分(c)，代换(d)并简化，即得(11)。

15．考察

$$\int_0^{\infty}e^{-t}L_mL_n dt\qquad (m<n).$$

只要证明

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^kL_n dt=0\qquad (k<n)$$

即可得出本题结论，利用分部累次积分法即可证明上式。

3.8 节

1．在$\mathbf{R}^3$中，每一线性泛函是有界的，而且（1）中的内积是点积。

3．我们得出

$|f(x)|=|\langle x,z\rangle|\leqslant\|x\|\|z\|$，$|f(x)|/\|x\|\leqslant\|z\|$，$(x\neq 0)$。故$\|f\|\leqslant\|z\|$．若$z=0$，也有$\|f\|=\|z\|$．设$z\neq 0$，于是

$\|f\|\|z\|\geqslant|f(z)|=\langle z,z\rangle=\|z\|^2$，$\|f\|\geqslant\|z\|$.

5．$l^{2\prime}$到l^2上的一同构是$f\mapsto z_f$，这里z_f由下式定义（见3.8-1）：

$$f(x)=\langle x,z_f\rangle.$$

（注意对复空间l^2，该映象是共轭线性的，因为$\alpha f\mapsto\bar{\alpha}z_f$。

9．我们有

$M^a=\{f\mid f(x)=\langle x,z_f\rangle=0$对一切$x\in M\}$成立。

故$f\in M^a\Leftrightarrow z_f\in M^{\perp}$。

11. 第一个论断是非常显然的，而第二个论断由下式得出：

$$f_2(\alpha y_1+\beta y_2)=\overline{h(x_0,\alpha y_1+\beta y_2)}=\alpha\,\overline{h(x_0,y_1)}+\beta\,\overline{h(x_0,y_2)}.$$

13. $h(x,y)=h(y,x)$；则h称为一对称的双线性型，正定条件，即对一切$x\in X$，$h(x,x)\geqslant 0$，而且$h(x,x)>0$，如果$x\neq 0$.

15. 第14题中的Schwarz不等式用类似于3.2节的方法给出三角不等式

3.9 节

3. $\|T_n^*-T^*\|=\|(T_n-T)^*\|=\|T_n-T\|\to 0$.

5. 设$T(M_1)\subset M_2$. 则由第4题，$M_1^\perp\supset T^*(M_2^\perp)$. 反之，设$M_1^\perp\supset T^*(M_2^\perp)$，则由第4题 $T^{**}(M_1^{\perp\perp})\subset M_2^{\perp\perp}$，这里由3.9-4，$T^{**}=T$. 另由3.3-6，$M_1^{\perp\perp}=M_1$，$M_2^{\perp\perp}=M_2$.

7. 引用3.9-3(b).

9. 设$\{b_1,\cdots,b_n\}$是$T(H)=\mathscr{R}(T)$之一规格正交基. 设$x\in H$且$Tx=\sum\alpha_j(x)b_j$. 则$\langle Tx,b_k\rangle=\alpha_k(x)=\langle x,T^*b_k\rangle$，且

$$Tx=\sum_{j=1}^{n}\langle x,v_j\rangle w_j,\ \text{这里}v_j=T^*b_j,w_j=b_j.$$

3.10 节

1. 引用3.9-4.

3. 引用3.10-4.

5. $T^*x=(\xi_1+\xi_2,-i\xi_1+i\xi_2)$，故

$$T_1x=\left(\xi_1+\frac{1+i}{2}\xi_2,\ \frac{1-i}{2}\xi_1\right),$$

$$T_2x=\left(\frac{1+i}{2}\xi_2,\ \frac{1-i}{2}\xi_1-\xi_2\right).$$

7. 这得自于$\bar{U}^TU=U^{-1}U=I$。

9. 由2.6-9$\mathscr{R}(T)$是一子空间$Y\subset H$。对$Y\in\bar{Y}$，在Y中存在序列(y_n)使得$y_n\to y$。设$y_n=Tx_n$。则(x_n)是 Cauchy 列（由等距性得知）。因H是完备的，设$x_n\to x$。由 1.4-8，有$Y=Tx\in Y$，故$\bar{Y}$是闭的。若$Y=H$，则T是酉算子。

11. $S^*=(UTU^*)^*=UT^*U^*=UTU^*=S$。见3.9-4。

13. $$\|TT^*-T^*T\|\leqslant\|TT^*-T_nT_n^*\|+\|T_nT_n^*-T_n^*T_n\|$$
$$+\|T_n^*T_n-T^*T\|.$$

上式右端第二项为零。$T_n\to T$就指出$T_n^*\to T^*$（见3.9节习题3），故右端其他两项当$n\to\infty$时趋近于零。

15. 引用3.9-3(b)，对一切x我们有

$$\begin{aligned}\|T^*x\|^2=\|Tx\|^2&\Leftrightarrow\langle T^*x,T^*x\rangle=\langle Tx,Tx\rangle\\&\Leftrightarrow\langle TT^*x,x\rangle=\langle T^*Tx,x\rangle\\&\Leftrightarrow\langle[TT^*-T^*T]x,x\rangle=0\\&\Leftrightarrow TT^*-T^*T=0.\end{aligned}$$

由$\|T^*x\|=\|Tx\|$及$x=Tz$，我们有$\|T^*Tz\|=\|T^2z\|$。
又由3.9节中的(6e)

$$\|T^2\|=\sup_{\|z\|=1}\|T^2z\|=\sup_{\|z\|=1}\|T^*Tz\|=\|T^*T\|=\|T\|^2.$$

4.1 节

5. 对A的元的个数使用归纳法。

7. 12,24,36…（一切被4和6能整除的 $x\in N$）.1,2.

4.2 节

5. $p(x)\leqslant\gamma, p(y)\leqslant\gamma$和$\alpha\in[0,1]$推出$1-\alpha\geqslant0$ 和

$$p(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant \alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)\leqslant \alpha\gamma$$
$$+(1-\alpha)\gamma=\gamma.$$

9. 若$\alpha>0$。则$f(x)=p(\alpha x_0)=p(x)$。若$\alpha<0$，于是由第4题

$$f(x)=\alpha p(x_0)\leqslant -\alpha p(-x_0)=p(\alpha x_0)=p(x).$$

4.3 节

1. $p(0)=p(0x)=0p(x)=0$；这就指出
$0=p(0)=p(x+(-x))\leqslant p(x)+p((-1)x)=2p(x)$.

7. 由Riesz定理3.8-1，$\tilde{f}(x)=\langle x,x_0\rangle/\|x_0\|$.

9. 令$g_1(z+ay_1)=f(z)+ac$即可把f扩张到空间$Z_1=\mathrm{span}(Z\cup\{y_1\})$，$y_1\in X-Z$，这里确定$c$的方法与证明定理 4.2-1（其中的$p$应换成本节的(9)式）的第（c）步的方法相同，经可数多次这样的步骤后，我们得出f在X中稠密的一集合上的扩张，由定理2.7-11即得结果。

11. $f(x)-f(y)=f(x-y)=0$。应用4.3-4。

13. $\tilde{f}=\|x_0\|^{-1}\tilde{f}$.

15. 由定理4.3-3，$\|x_0\|>c$就将推出存在$\tilde{f}\in X'$使得$\|\tilde{f}\|=1$且$\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|>c$。

4.5 节

3. $((S+T)^\times g)(x)=g((S+T)x)=g(Sx)+g(Tx)$
$=(S^\times g)(x)+(T^\times g)(x)$.

5. $((ST)^\times g)(x)=g(STx)=(S^\times g)(Tx)$
$=(T^\times(S^\times g))(x)=(T^\times S^\times g)(x)$.

7. $(AB)^T=B^TA^T$.

9. $g\in M^a\Leftrightarrow 0=g(Tx)=(T^\times g)(x)$对一切$x\in X$成立。
$\Leftrightarrow T^\times g=0$.

$\Leftrightarrow g\in\mathcal{N}(T^{\times})$

4.6 节

1. $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $f(x)=\alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n$, $g_x(f)=\alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n$($\xi_j$是固定的)．

3. 设$h\in X'''$。因X是自反的，故对每一$g\in X''$存在$x\in X$，使得$g=Cx$。于是$h(g)=h(Cx)=f(x)$定义了X上之一有界线性泛函f，而且$C_1f=h$，这里$C_1: X'\to X'''$是典则映象。故C_1是满射的，因而X'是自反的。

5. $h=\delta^{-1}\tilde{f}$。

7. 若$Y\neq X$，因Y是闭的，故存在$x_0\in X-Y$，且$\delta=\inf_{y\in Y}\|y-x_0\|>0$。由引理4.6-7，存在$\tilde{f}\in X'$，它在$Y$上为零，而在$x_0$处不为零，这就与我们的假定矛盾。

9. 若M不是完全的，$Y=\overline{\mathrm{span}M}\neq X$，引理4.6-7指出，存在$\tilde{f}\in X'$它在$Y$上处处为零，故在$M$上也为零，但在$x_0\in X-Y$处不为零。若$M$是完全的，则$Y=X$，且题中的条件被满足。

4.7 节

1. (a)第一纲，(b)第一纲。

3. Φ，因X的每一子集是开的。

5. $(\overline{M})^C$的闭包是整个X，当而且仅当$\overline{M}$没有内点，故每一$x\in\overline{M}$是$(\overline{M})^C$之一聚点。

7. 由定理4.7-3直接推出。

9. $\|x\|$; $\|T_nx\|^2=|\xi_{2n+1}|^2+|\xi_{2n+2}|^2+\cdots\to0$ $(n\to\infty)$; 1; 1。

11 利用这样的事实，一Cauchy列是有界的（见1.4节），并应用定理4.7-3。

13. 我们记$f(x_n)=g_n(f)$。则对每一f，$(g_n(f))$是有界的，

故由4.7-3，($\|g_n\|$)是有界的。又由4.6-1，$\|x_n\|=\|g_n\|$。

15. $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots\right)$.

4.8 节

1. 在$C[a,b]$上之一有界线性泛函是δ_{t_0}，其定义为$\delta_{t_0}(x)=x(t_0)$，这里$t_0\in[a,b]$，又$\delta_{t_0}(x_n)\to\delta_{t_0}(x)$意味着$x_n(t_0)\to x(t_0)$。

3. 这由X上的泛函是线性的而得出。

5. 否则，从x_0到$\bar{Y}$的距离δ是正数，由4.6-7存在$\tilde{f}\in X'$使得$\tilde{f}(x_0)=\delta$，而且对一切$x\in\bar{Y}$，$\tilde{f}(x)=0$。故$\tilde{f}(x_n)=0$，于是$(\tilde{f}(x_n))$不收敛于$\tilde{f}(x_0)$。这与$x_n\xrightarrow{w}x_0$矛盾。

7. 利用第6题。

9. 否则，A就将包含一无界序列(x_n)使得$\lim\|x_n\|=\infty$。于是对(x_n)的每一子序列(x_{n_j})有$\lim\|x_{n_j}\|=\infty$，故由第8题(x_n)没有弱Cauchy子序列。这与假设相矛盾。

4.9 节

1. $\|T_nx-Tx\|=\|(T_n-T)x\|\leqslant\|T_n-T\|\|x\|\to 0\ (n\to\infty)$.

3. 这直接得自于定理4.8-4 (a)（其中应以$y_n=T_nx$和$y=Tx$分别代替x_n和x）

5. 因$x\in l^1$，级数$\Sigma|\xi_n|$收敛。故对每一$x\in l^1$我们有$\xi_n=f_n(x)\to 0$，当$n\to\infty$时。但$\|f_n\|=1$。

7. 由假定，(T_nx)对每一$x\in X$收敛。故$(\|T_nx\|)$由1.4-2是有界的，而且$(\|T_n\|)$也是有界的。见4.7-3。

9. $(\|T_n\|)$是有界的。因$\|T_nx\|\leqslant\|T_n\|\|x\|$，且范数是连续的，故

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_nx\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\|.$$

4.10 节

1. $$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\end{bmatrix}.$$

3. $\xi_1=\eta_1$, $\xi_n=n\eta_n-(n-1)\eta_{n-1}$; $(1, 0, 0, \cdots)$.

5. H_1给出$(1,-1,1,-1, \cdots)$; H_2 给出 $(1,0,\frac{1}{3},0, \frac{1}{5},0, \cdots)$; 故序列是$H_2$-可和的但不是$H_1$-可和的。

7. 对k应用归结法。

4.11 节

9. 公式(16)不包含$x'''(0)$。

4.12 节

1. T把开球映成开区间。故论断由1.3节习题4得出。否。

3. $\{a,2a,3a,4a\}$, $\{1+w,2+w,3+w,4+w\}$,
   $\{2,3,\cdots,8\}$.

5. $\|T\|=1$; $1=\|x\|=\|T^{-1}y\|=k\|y\|$, 这里 $x=(\delta_{kj})$, 其中除第k项为1, 其他各项为 0.于是$\|T^{-1}\|\geqslant k$.否,因X不是完备的.

7. 这直接由有界逆定理得出。

9. T: $X_2\to X_1$ (由 $x\mapsto x$ 定义) 是双射的连续映象, 因为 $\|x\|_1/\|x\|_2\leqslant c$, 而且由4.12-2, T^{-1}是连续的。

4.13 节

5. 由2.6-10T^{-1}是线性的. T^{-1} 的图象可以写成$\mathscr{G}(T^{-1})=$

$\{(Tx,x)|x\in\mathscr{D}(T)\}\subset Y\times X$，而且是闭的，因为$\mathscr{G}(T)\subset X\times Y$是闭的。又由$(x,y)\mapsto(y,x)$所定义的映象$X\times Y\to Y\times X$是等距的。

7. $T:X\to Y$是有界的线性的，而且$\mathscr{D}(T)=X$是闭的。故由4.13-5(a)T是闭的。由假设T^{-1}：$Y\to X$存在，故T^{-1}是闭的（证明见第5题的答案）；另由闭图象定理，因$\mathscr{D}(T^{-1})=y$是闭的，故T^{-1}是连续的。

9. 任一闭子集$K\subset Y$是紧的（2.5节，习题9），而且其逆象是闭的（第8题）故T是连续的（1.3节，习题14），又由2.7-9它是有界的。

11. 利用定理4.13-3.

13. T^{-1}是闭的（第5题），故由4.13-5 (b)，$\mathscr{R}(T)=\mathscr{D}(T^{-1})$是闭的。

15. (a)因一线性算子映0为0，故条件是必要的。

(b)因$\mathscr{G}(T)$是一向量空间，故$\overline{\mathscr{G}(T)}$亦然。设$(x,y_1)$，$(x,y_2)\in\overline{\mathscr{G}(T)}$，于是

$$(x,y_1)-(x,y_2)=(0,y_1-y_2)\in\overline{\mathscr{G}(T)}.$$

由条件知$y_1-y_2=0$，故$\tilde{T}$是一映象。因$\overline{\mathscr{G}(T)}$是一向量空间，故$\tilde{T}$是线性的。因$\overline{\mathscr{G}(T)}$是闭的，故$\tilde{T}$是一闭线性算子。

5.1 节

1. (a)一致扩张映象；(b)直线上的平面反射，空间中关于一固定轴的旋转，到任意直线上的平面投影，恒等映象。

5. 存在两个不动点x和$y\neq x$，就会推出矛盾

$$d(x,y)=d(Tx,Ty)<d(x,y).$$

7. 当$d(x_1,x_2)<\delta=\frac{\varepsilon}{\alpha}$时，有$d(Tx_1,Tx_2)<\varepsilon$。

11. 由微分学的中值定理

$$|g(x)-g(y)|=|x-y||g'(\xi)|\leqslant\alpha|x-y|,$$

其中ξ在x和y之间。应用5.1-4和第9题。

13. (a)$x_1=0.500$, $x_2=0.800$, $x_3=0.611$。是的。

(b)$|g'(x)|\leqslant 3\sqrt{3}/8<0.65=\alpha$（由$g''(x)=0$这就给出$x=1/\sqrt{3}$，其中$|g'|$有一极大值）；这一$\alpha$产生误差界0.93, 0.60, 0.39（误差分别是0.18, 0.12, 0.07）。

(c)$1-x^3$的导数在靠近根（0.682328）时，其绝对值大于1，故我们不能期望收敛。

15. 因$f(\hat{x})=0$，中值定理给出

$$|f(x)|=|f(x)-f(\hat{x})|=|f'(\xi)||x-\hat{x}|\leqslant k_1|x-\hat{x}|,$$

($k_1>0$)。因$\hat{x}$是单根，故在$\hat{x}$之一闭邻域N上($N\subset[a,b]$) $f'(x)\neq 0$，f''在N上是有界的，而且对任一$x\in N$

$$|g'(x)|=\frac{|f(x)f''(x)|}{f'(x)^2}\leqslant k_2|f(x)|\leqslant k_1k_2|x-\hat{x}|<\frac{1}{2},$$ 如果 $|x-\hat{x}|<\frac{1}{2k_1k_2}$。

17. 当$m=1$时为真。设公式对任一$m\geqslant 1$成立。我们有

$$d(T^{m+1}x,\ S^{m+1}x)\leqslant d(TT^mx,TS^mx)+d(TS^mx,SS^mx)$$

$$\leqslant\alpha d(T^mx,\ S^mx)+\eta\leqslant\alpha\eta\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}+\eta.$$

19. 公式是关于y_m的误差估计式，它得自于

$$d(x,y_m)\leqslant d(x,T^my_0)+d(T^my_0,S^my_0)$$

$$\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(y_0,Ty_0)+\eta\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}$$

$$\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}[d(y_0,\ Sy_0)+\eta]+\eta\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}.$$

5.2 节

3. (a) $\begin{bmatrix}1.00\\1.00\\0.75\\0.75\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0.9375\\0.9375\\0.6875\\0.6875\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0.90625\\0.90625\\0.65625\\0.65625\end{bmatrix}$, ...

(b) $\begin{bmatrix}1.0000\\1.0000\\0.7500\\0.6875\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0.9375\\0.9063\\0.6563\\0.6407\end{bmatrix}$, ….

5. 两种方法对应于两个序列

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix},\ \cdots.$$

和

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2.0\\1.0\\0.5\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1.2500\\1.1250\\0.8125\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1.0312500\\1.0781250\\0.9453125\end{bmatrix},\ \cdots.$$

7. $$d_1(Tx,Tz)=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}c_{jk}(\xi_k-\zeta_k)\right|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|c_{jk}||\xi_k-\zeta_k|$$

$$\leqslant\left(\max_k\sum_{j=1}^{n}|c_{jk}|\right)\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\zeta_k|.$$

9. 在(10)中我们有$D^{-1}=\operatorname{diag}(1/a_{jj})$.

5.3 节

1. 应用微分学的中值定理。

3. 在包含t-轴的点($x=0$)的区域中不满足。

5. 由(2)，解曲线必定在通过(t_0，x_0)和具斜率$-c$和c的两条直线之间；又对任一$t\in[t_0-a, t_0+a]$使得$|t-t_0|<\frac{b}{c}$，曲线不能离开R。其次，$\beta k=a<1$就蕴含T是压缩映象。

7. 课文中的证明表明，对新的选取，T仍然是$\tilde{C}$到其自身的压缩映象。

9. 不在包含$x=0$的区域中。

5.4 节

1. 我们得出

$$x_n(t)=v(t)+\mu k_0 e^t(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1}),$$

$$x(t)=v(t)+\frac{\mu}{1-\mu}k_0 e^t,\quad k_0=\int_0^t e^{-\tau}v(\tau)d\tau.$$

3. (a)一非线性Volterra方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(\tau,x(\tau))d\tau,$$

(b)二次微分，我们可以证明方程是

$$x(t)=\int_{t_0}^t (t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau+(t-t_0)x_1+x_0.$$

5. (a) $x(t)=1+\mu+\mu^2+\cdots=\frac{1}{1-\mu}$.

(b)积分是一未知常数c。故$x(t)-\mu c=1$，$x(t)=1+\mu c$。把它代入积分号下，得值$e=1/(1-\mu)$。

9. $k_{(2)}=0$，$k_{(3)}=0$，…，$x(t)=v(t)+\mu\int_0^{2\pi}k(t,\tau)v(\tau)d\tau$.

6.2 节

1. 当而且仅当$x\in Y$（由2.4-3）.

3. 这由三角不等式得之；事实上，令$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$并引用2.2节中的(2)式，我们得

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\leqslant\|\Sigma(\beta_j-\alpha_j)e_j\|\leqslant\max|\beta_k-\alpha_k|\Sigma\|e_j\|.$$

5. $x=(1,0)$，$y=(0,1)$给出$\|x+y\|_1=2$.

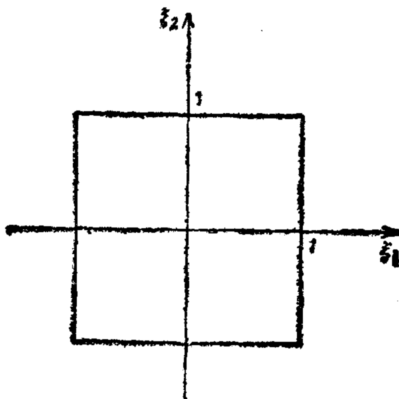


图91　第7题中的单位球面

7. $\|(1,0)+(1,1)\|=2=\|(1,0)\|+\|(1,1)\|$.

9. $(a)(0,0)$；(b)线段$\xi_1=0$，$-1\leqslant\xi_2\leqslant1$；$(c)(0,0)$.

11. 这由引理6.2-1直接得出.

13. 我们令

$$x_1=\frac{1}{\|x\|}x,\quad y_1=\frac{1}{\|y\|}y,\quad a=\frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}.$$

于是$\|x_1\|=\|y_1\|=1$，而且给定的等式得出

$$1=\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|}=\left\|\frac{x}{\|x\|+\|y\|}+\frac{y}{\|x\|+\|y\|}\right\|$$

$$=\|ax_1+(1-a)y_1\|.$$

因X是严格凸的，由第12题$x_1=y_1$，故$x=cy$，这里$c=\|x\|/\|y\|>0$。

15．这由这样的事实直接得出：在严格凸的情形，单位球面上不能包含直线段。

6.3 节

1．这由有关(1)的论断而得出，这一论断表示(1)中的n行向量的线性无关性。

3．这些是(1)中行列式的列向量，在线性无关情形行列式恰好不为0。

5．不然的话，存在$y_0\in Y$，使得

$$\|x-y_0\|<\min_j|x(t_j)-y(t_j)|.$$

于是$y_0-y=x-y-(x-y_0)\in Y$必与$x-y$在那$n+1$个点$t_1, t_2, \cdots, t_n$处有同一的符号．故它在$[a,b]$中的n个或更多个点处必然为0，由Haar条件这是不可能的。

7．$\tilde{y}(t)=t$与$x(t)$在0和1处一致，而且$(x(t)-\tilde{y}(t))'=0$得出$\cos(\pi t/2)=\dfrac{2}{\pi}$，$t=t_0=\dfrac{2}{\pi}\arccos\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=0.56$。而且$x(t_0)-\tilde{y}(t_0)=0.211$，$y(t)=\tilde{y}(t)+\dfrac{0.211}{2}$。

9．把$\beta_1,\cdots,\beta_r$当作函数x在$t_1,\cdots,t_r$的r个值，把$\gamma_{1k},\cdots\gamma_{rk}$($k$固定）当作$y_k$在$t_1,\cdots,t_r$的$r$个值，我们得知$\zeta_1,\cdots,\zeta_n$对应于$y=\sum a_k y_k$中的$a_1,\cdots,a_n$，而且(1)式变成为：

$$\begin{vmatrix} \gamma_{j_1 1} & \gamma_{j_2 1} & \cdots & \gamma_{j_n 1} \\ \gamma_{j_1 2} & \gamma_{j_2 2} & \cdots & \gamma_{j_n 2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_{j_1 n} & \gamma_{j_2 n} & \cdots & \gamma_{j_n n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

其中$\{j_1, \cdots, j_n\}$是由$\{1, 2, \cdots, n\}$中取出之一n元组。

6.4 节

1. $T_6(t)=32t^6-48t^4+18t^2-1$。

3. $\cos n\theta$在$[0,\pi]$中的$\theta_j=(2j-1)\pi/2n, j=1,\cdots,n$处为0，又$t=\cos\theta$，故零点是$t=\cos[(2j-1)\pi/2n]$。

5. 否则，由(10)T_{n-2}在同一点处为零，重复这一结论我们得出在某t处$T_0(t)=0$。因$T_0(t)=1$，这是不可能的。

7. 设$v(\theta)=\cos n\theta$。则$v''+n^2v=0$。令$t=\cos\theta$。

9. 令$t=\cos\theta$，我们看出积分变成

$$\int_\pi^0 \frac{1}{\sin\theta}\cos n\theta \cos m\theta(-\sin\theta)d\theta.$$

6.5 节

3. 利用定理6.5-1和这样的事实，线性无关集的子集是线性无关的。类似地

$$G(y_1,\cdots,y_n,y_{n+1},\cdots,y_p)=0.$$

5. 不等式当$n=1$时成立，假设它对任意n成立，并引用(5)，其中$x=y_{n+1}$，我们得到

$$G(y_1,\cdots,y_{n+1})=G(y_{n+1},y_1,\cdots,y_n)=\|z\|^2G(y_1,\cdots,y_n)\geqslant 0.$$

第二个论断直接由定理6.5-1得出。

7. 利用(5)和下面的不等式（这些不等式是显然的，由定理6.5-2中关于z的说明）：

$$\min_\alpha\|y_k-\alpha_{k+1}y_{k+1}-\cdots-\alpha_ny_n\|$$
$$\leqslant\min_\beta\|y_k-\beta_{k+1}y_{k+1}-\cdots-\beta_my_m\|,$$

和

$$\min_\alpha\|y_m-\alpha_{m+1}y_{m+1}-\cdots-\alpha_ny_n\|\leqslant\|y_m\|.$$

9. 第一个论断由第8题直接得出。为了得出第二个论断，取$y_j=(a_{j1},\cdots,a_{jn})$。于是$(\det A)^2=G(y_1,\cdots,y_n)$由关于表二行列式的积为一行列式的熟知的公式得出。而且$\langle y_j,y_j\rangle=a_j$。

6.6 节

1. $n+3$。

3. 我们找出

$$y(t)=\begin{cases}-2t^3-t^2, & 当 -1\leqslant t<0,\\ 2t^3-t^2, & 当 0\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

5. $\frac{1}{8}$与$\frac{1}{16}$，但这不与Chebyshev多项式的极小性相矛盾，因为样条函数不是多项式。

7. $y(t)=-4t^3/\pi^3+3t/\pi$。

9. 正交性$\langle y,x-y\rangle_2=0$指出

$$p(x-y)^2=p(x)^2-p(y)^2\geqslant 0。$$

故$p(x)^2\geqslant p(y)^2$，它即是(b)。

7.1 节

1. $3,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$9,\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$；$a+ib,\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$，$a-ib,\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$。

3. 我们有$Ax=\lambda x(x\neq 0)$，$\bar{x}^{\top}Ax=\bar{x}^{\top}\lambda x=\lambda\bar{x}^{\top}x$；故

$$\lambda=\frac{\bar{x}^{\top}Ax}{\bar{x}^{\top}x},$$

$\bar{x}^{\top}x$是实数。数$N=\bar{x}^{\top}Ax$是纯虚数或零，因为

$$\bar{N}=\bar{N}^{\top}=(\overline{\bar{x}^{\top}Ax})^{\top}=(x^{\top}\bar{A}\bar{x})^{\top}=\bar{x}^{\top}\bar{A}^{\top}x=-\bar{x}^{\top}Ax=-N。$$

5. 这由第2题和第4题得出，亦见3.10-2。

7. A^{-1}存在当而且仅当$\det A\neq 0$，而且$\det A$是A的n个特徵值的乘积，因为$\det A$是首项系数为$(-1)^n$的特征多项式的常数

项。为了得出第二个论断，左乘$Ax_j=\lambda_j x_j$以A^{-1}。

9. 用归纳法并用A左乘于$A^{m-1}x_j=\lambda_j^{m-1}x_j$两端得

$$A^m x_j=\lambda_j^{m-1}A\ x_j=\lambda_j^{m-1}\lambda_j x_j。$$

11. 因$x_j=Cy_j$，故得

$$C^{-1}ACy_j=C^{-1}Ax_j=C^{-1}\lambda_j x_j=\lambda_j C^{-1}x_j=\lambda_j y_j。$$

13 $\lambda=1$，代数重数为n，几何重数为1，特征向量为$(1\ 0\ 0\cdots 0)^T$。

15 因$x(t)=e^{\lambda t}$，其中$\lambda\neq 0$不定义一多项式，故$Tx=x'=\lambda x$，$\lambda=0$，$x(t)=1$；代数重数为n，几何重数为1。

7.2 节

1. $\sigma(I)=\{1\}=\sigma_p(I)$，对应于1的特征子空间为$X$，而且对一切$\lambda\neq 1$，$R_\lambda(I)=(1-\lambda)^{-1}I$是有界的。

5. $Y_n=\mathrm{span}\{e_n,e_{n+1},\cdots\}$。

7. 设$\lambda\in\sigma_r(T_1)$，则$T_{1\lambda}^{-1}$存在且其定义域不在X中稠密。现因$\mathscr{D}(T_1)\supset\mathscr{D}(T)$就指出$\mathscr{D}(T_{1\lambda})\supset\mathscr{D}(T_\lambda)$和$\mathscr{R}(T_{1\lambda})\supset\mathscr{R}(T_\lambda)$，于是$\mathscr{R}(T_\lambda)$不能在$X$中稠，且$\lambda\in\sigma_\lambda(T)$。

9. 设$\lambda\in\rho(T_1)$，则$T_{1\lambda}^{-1}$存在且是有界的，而且$\mathscr{R}(T_{1\lambda})$在$X$中稠。故$T_\lambda^{-1}$存在且是有界的，且其定义域$\mathscr{R}(T_\lambda)\subset\mathscr{R}(T_{1\lambda})$可能在$X$中稠[于是$\lambda\in\rho(T)$]，也可能不在$X$中稠[于是$\lambda\in\sigma_r(T)$]。

7.3 节

1. $\sigma(T)$是v的值域，它是一闭区间，因为v是连续的，而且在紧集[0,1]上有一极大值和一极小值。

3. $\{\lambda\}$。

5. $T_\lambda(l^2)$在l^2中稠，故$\lambda \notin \sigma_r(T)$，于是$\lambda \in \sigma_c(T)$。

7. 设$|\lambda| > \|T\|$，$y = T_\lambda x$，于是

$$\|y\| = \|\lambda x - Tx\| \geqslant |\lambda| \|x\| - \|Tx\| \geqslant (|\lambda| - \|T\|)\|x\|;$$

故

$$\|R_\lambda(T)\| = \sup_{y \neq 0}(\|x\|/\|y\|) \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

9. (a) $\|T\| = 1$；引用 7.3-4。(b) $T_\lambda x = (\xi_2 - \lambda\xi_1, \xi_3 - \lambda\xi_2, \cdots) = 0$，$Y = \{x \in X \mid x = (\alpha, \alpha\lambda, \alpha\lambda^2, \cdots), \alpha \in \mathbf{C}\}$。

7.4 节

1. 在$(T - \lambda I)(T - \mu I) = (T - \mu I)(T - \lambda I)$上取逆。

3. 因$R_\lambda(S)S_\lambda = I$，$T_\lambda R_\lambda(T) = I$即得

$$\begin{aligned} R_\lambda(S)(T - S)R_\lambda(T) &= R_\lambda(S)(T_\lambda - S_\lambda)R_\lambda(T) \\ &= (R_\lambda(S)T_\lambda - I)R_\lambda(T) \\ &= R_\lambda(S) - R_\lambda(T). \end{aligned}$$

7. 利用7.4-2。

9. (a) 当$|\lambda| > 1$时我们有

$$R_\lambda(T) = \lambda^{-1}[I - T + T(1 + \lambda^{-1} + \lambda^{-2} + \cdots\cdots)],$$

故

$$R_\lambda(T) = -\lambda^{-1}(I - T) - (\lambda - 1)^{-1}T,$$

上式对任意$\lambda \neq 0$，1也成立。

(b) $p(T) = T^2 - T = 0$。 $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0$。

7.5 节

1. $\sigma(T) = \{0\}$，这由(10)可得。

3. $(1 - \lambda^2)^{-1}(A + \lambda I)$。

5. 由(10)得

$$r_\sigma(ST) = \lim \|(ST)^n\|^{1/n} = \lim \|S^n T^n\|^{1/n}$$

$$\leqslant \lim \|S^n\|^{1/n} \cdot \lim \|T^n\|^{1/n} = r_\sigma(S) r_\sigma(T).$$

7. $\|T\| = 2$, $\|T^2\|^{1/2} = \sqrt{2}$, $\|T^3\|^{1/3} = \sqrt[3]{4}$，等等。

9. 利用(10)和3.10节中的习题15。

7.6 节

1. $\dim X < \infty$，见2.4-2。

3. 引用$\|x\| = \max(|\xi_1|, \cdots, |\xi_n|)$并用下式定义乘法
$(\xi_1, \cdots, \xi_n)(\eta_1, \cdots \eta_n) = (\xi_1 \eta_1, \cdots, \xi_n \eta_n)$。

9. $x^{-1}y = x^{-1}y(xx^{-1}) = x^{-1}xyx^{-1} = yx^{-1}$。

7.7 节

1. 定理7.7-1的平凡推论。

3. 定理7.7-1的直接推论。

7. 否则，A就会包含一x使得$x-\lambda e \neq 0$对一切$\lambda \in \mathbf{C}$成立，因而$\sigma(x) = \Phi$。这与定理7.7-4矛盾。

9. 考察任一$x \neq 0$。根据假定，对某一$v \in A$，$vx = e$。于是$v \neq 0$，因为不然的话，就有$0 = vx = e$。令$xv = w$。于是$w \neq 0$，因为不然的话

$$v = ev = vxv = vw = 0.$$

根据假定对某一$y \in A$，$yw = e$，即$yxv = e$。故v有左逆yx和右逆x。二者应相等（见7.6节习题8），故$yx = x$。因$yxv = e$（见前面），故有$xv = e$，这与$vx = e$一起指出：任一$x \neq 0$都有逆。

8.1 节

3. 考察任一$T \in \overline{C(X,Y)}$。由1.4-6(a)在$C(X,Y)$中存在一序列(T_n)，按$B(X,Y)$中的范数收敛于T。故由8.1-5 T是紧的，即$T \in C(X,Y)$。

7. 这得自于定理8.1-3。

9. 见8.1-4(a)。

11. 这得自于8.1-4(a)。

15. $\bar{A}$是紧的。$T(\bar{A})$是紧的（由2.5-6）而且是闭的（由2.5-2）。故$T(A)\subset T(\bar{A})$蕴含$\overline{T(A)}\subset\overline{T(\bar{A})}=T(\bar{A})$，从而$\overline{T(A)}$是紧的(由 2.5 节习题 9)，故$T(A)$是相对紧的。

8.2 节

1. 对给定的$\varepsilon>0$，空间X有一$\frac{\varepsilon}{2}$网，$M=\{x_1,\cdots,x_s\}$故Y位于S个球$B(x_1; \varepsilon/2),\cdots,B(x_s; \varepsilon/2)$的并中。因$Y$是无限的，故其中之一球必包含$Y$之一无限子集$Z$。

5. 因X是紧的，故它是全有界的。

7. $Tx=(\eta_j)=(\xi_j/\sqrt{j})$定义一紧线性算子，但$\sum\sum|\alpha_{jk}|^2=\sum n^{-1}$发散。

9. 是的。

8.3 节

1. 因$S=T^p$是紧的，故论断对S成立。现应用谱映象定理7.4-2。

3. 利用8.3-1和8.3-3。

5. 设(x_n)是有界的，比如，$\|x_n\|\leqslant c$对一切n成立。于是(Sx_n)是有界的，因为

$$\|Sx_n\|\leqslant\|S\|\|x_n\|\leqslant\|S\|c.$$

故(Sx_n)包含一子序列(Sx_{n_k})使得(TSx_{n_k})收敛。这就证明了TS是紧的。

7. T^*是线性和有界的（见3.9-2），TT^*是紧的（由引理8.3-2），故由第6题$TT^*=(T^*)^*T^*$，且T^*是紧的。

9．我们记 $\mathcal{N}=\mathcal{N}(T_\lambda)$，并假定 $\dim\mathcal{N}=\infty$。于是 $\mathcal{N}$ 有一无穷的线性无关的子集，比如，(x_n)。现考察 $K_m=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_m\}$。于是 $K_1\subset K_2\subset\cdots$ 是 $\mathcal{N}$ 的闭子空间，且这些包含式是真的。设 $y_1=\|x_1\|^{-1}x_1$。由2.5-4(其中 $\theta=\frac{1}{2}$) 存在一 $y_2\in K_2$ 使得 $\|y_2\|=1$，$\|y_2-y_1\|\geqslant 1/2$，和一 $y_3\in K_3$ 使得 $\|y_3\|=1$，$\|y_3-y_2\|\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $\|y_3-y_1\|\geqslant\frac{1}{2}$ 等等。这就得出一无限序列 (y_m)，使得 $\|y_m\|=1$，$\|y_m-y_q\|\geqslant\frac{1}{2}$，$m\neq q$。故

$$\text{(A)}\qquad \|\lambda y_m-\lambda y_q\|\geqslant\frac{\lambda}{2}\quad(m\neq q).$$

因 $y_m\in\mathcal{N}$，故有 $0=T_\lambda y_m=(T-\lambda I)y_m$。于是

$$\text{(B)}\qquad Ty_m=\lambda y_m.$$

因 $\lambda\neq 0$，关系式(A)和(B)表明 (Ty_m) 没有收敛的子序列，这就是一矛盾，因为 (y_m) 是有界的，而且 T 是紧的。故 $\dim\mathcal{N}=\infty$ 是不可能的。

11．如果 $\dim X=\infty$，则 $T=I$ 不是紧的 [见 8.1-2(b)]，又当 $\lambda=1$ 时，我们有 $\dim\mathcal{N}(T_\lambda)=\dim X=\infty$. 算子 $T=0$ 是紧的。但是如果 $\dim X=\infty$，则对 $\lambda=0$ 我们有 $\dim\mathcal{N}(T_\lambda)=\dim X=\infty$。

13．与在第 9 题的解答中一样，如果我们假定 $\dim\mathcal{N}(T_\lambda^p)=\infty$，由2.5-4我们有一序列 (y_m)，$\|y_m\|=1$，$y_m\in\mathcal{N}(T_\lambda^p)$，而且 $\|y_m-y_q\|\geqslant\frac{1}{2}$，$m\neq q$，故（见课文8.3-4靠近末尾的证明）

$$0=T_\lambda^p y_m=(W-\mu I)y_m.$$

因 T^p 是紧的且 S^p 是有界的，故得知算子 $W^p=(TS)^p=(ST)^p=S^pT^p$ 是紧的。于是 $(W^p y_m)=(\mu^p y_m)$ 就会有一收敛的子序列，然

而这是不可能的，因为 $\lambda\neq 0$ 从而 $\mu\neq 0$，且

$$\|\mu^p y_m-\mu^p y_q\|\geqslant|\mu^p|/2\quad(m\neq q).$$

15. 如果 $\lambda=0$ 则 $\{x\mid\xi_{2k}=0\}$，如果 $\lambda=1$，则 $\{x\mid\xi_{2k-1}=0\}$，如果 $\lambda\neq 0,1$，则 $\{0\}$。否。

8.4 节

1. 把 T 应用于(3)，当 $n>m$ 时得

$$T^2y_n-T^2y_m=\lambda^2(y_n-x_2),\quad x_2\in\mathcal{N}_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T^py_n-T^py_m=\lambda^p(y_n-x_p),\quad x_p\in\mathcal{N}_{n-1},$$

$$\|T^py_n-T^py_m\|\geqslant|\lambda^p|/2,$$

等等。

3. $\lambda\in\rho(\tilde{T})$ 时就蕴含 $\lambda\in\rho(T)\cup\sigma_r(T)$；见7.2节习题9。

5. $Tx=\lambda x$，$0=\lambda\xi_1$，$\xi_{n-1}/(n-1)=\lambda\xi_n(n=2,3,\cdots)$，$x=0$。每一 $\lambda\neq 0$ 在 $\rho(T)$ 中。如果 $\lambda=0$，则 $\eta_1=0$，这里 $Tx=(\eta_j)$，$\overline{\mathscr{R}(T)}\neq l^2$，$0\notin\sigma_c(T)$，故 $0\in\sigma_r(T)$，因为 $\sigma_p(T)=\Phi$。

7. 每一 α_j 是 T 之一特征值。应用8.3-1。

9. 如果 $\lambda\notin[0,1]$，则 $T_\lambda^{-1}x(t)=x(t)/(t-\lambda)$；$\sigma(T)=[0,1]$。利用8.3-1和8.4-4。

8.6 节

3. 我们有 $\sum\limits_k\alpha_{jk}\xi_k=\eta_j$。设 $f=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ 是这样的，使得

$$\sum_k\alpha_{kj}\varphi_k=0.$$

用 φ_j 乘第一式两端并作和，即得

$$\sum\sum\alpha_{jk}\xi_k\varphi_j=\sum\sum\alpha_{kj}\varphi_k\xi_j=\sum\varphi_j\eta_j=f(y)=0.$$

5. 设 $A=T-\lambda I$。则(1)变成 $Ax=y$，它有解 x 当而且仅当任一满足 $\sum\limits_j\alpha_{jk}\omega_j=0$，$k=1,\cdots,n$ 的 $w=(\omega_j)$ 也满足 $\sum\limits_j\eta_j\omega_j$

$=0$。利用点积和 A 的列向量 $a_1,\cdots,a_n$，得知该条件变成为

$$w\cdot a_k=0(k=1,\cdots,n)\Rightarrow w\cdot y=0.$$

即任一正交于 A 的一切列向量的向量 w 也是正交于增广矩阵的一切列向量，故该二矩阵有相同的秩。

11. $z_1,z_2,\cdots;y_1,y_2,\cdots;\langle z_k,y_j\rangle=\delta_{kj}$，作为 Riesz 定理3.8-1之一推论。

13. 下面的两个方程组

$$\sum_k \alpha_{jk}\xi_k=0,)j=1,\cdots,n)$$

和

$$\sum_j \alpha_{jk}\eta_j=0,\quad(k=1,\cdots,n)$$

有相同数的线性无关的解（即，如果 $r=\operatorname{rank}A=n$ 则只有平凡解；如果 $r<n$，则有 $n-r$ 个线性无关的解）.

15. 给定的级数一致收敛，逐项积分，即得关于 Tx 的 Fourier 级数表示。又 $Tx=0$ 当而且仅当 $x=0$，这是因为 $Tx\in C[0,\pi]$。但是当 $y(0)\neq0$时，$Tx=y$是不可解的，因为该级数的每一项在 $s=0$ 处为零。

8.7 节

1. 在这种情形，(2)中的 T 是一 n 行方阵，而 x 和 y 是列向量。或者对右端每一给定的向量非齐次方程组有唯一解，或者对应的齐次方程组至少有一非平凡解。前一情形对转置方程组同样成立。对第二种情形，齐次方程组与其转置方程组有相同数目的$(n-r)$个线性无关的解，这里 r 是系数矩阵的秩。

3. 例如，当 $s<\frac{1}{2}$时 $k(s,t)=1$，当 $s\geqslant\frac{1}{2}$时，$k(s,t)=0$，$s,t\in[0,1]$。故 T 不是到 $C[0,1]$的映象。

5. 注意，积分是一未知常数 c。故 $x(s)=1+\mu c$。把它代

入给定的方程中得$c=1/(1-\mu)$，$\mu\neq1$，又$x(s)=1/(1-\mu)$，$\mu\neq1$。Neumann 级数是几何级数

$$x(s)=1+\mu+\mu^2+\cdots=1/(1-\mu),\quad (|\mu|<1).$$

对齐次方程我们得出：当$\mu\neq1$时$x(s)=0$，当$\mu=1$时$x(s)=c$（任意常数）。这与8.7-3中的一致。

9． $k_{(2)}=0$，$k_{(3)}=0$，…，$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_0^{2\pi}k(s,t)\tilde{y}(t)dt$。

11． $\lambda=1/\mu=e^2-1$；特征函数e^s。

13． (x_n)在$[-1,1]$上，这里$x_n(t)=|t|^{1/n}$。收敛性不可能是一致的，因为极限函数是不连续的。另外的例子是$[0,1]$上的，(x_n)，其中$x_n(t)=t^n$。

15．(a) 我们得

$$\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)c_1-\mu c_2=y_1,\quad -\frac{1}{3}\mu c_1+\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)c_2=y_2,$$

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_0^1\frac{6(\mu-2)(s+t)-12\mu st-4\mu}{\mu^2+12\mu-12}\tilde{y}(t)dt.$$

(b) 特征值和特征函数是

$$\mu_1=-6+4\sqrt{3},\quad \mu_2=-6-4\sqrt{3},$$

$$\lambda_1=\frac{1}{\mu_1},\qquad \lambda_2=\frac{1}{\mu_2}\qquad x(s)=\frac{2\mu}{2-\mu}s+1\,(\mu=\mu_1,\mu_2).$$

9.1 节

1． 若A是n-行Hermitian矩阵，则对每一$x\in\mathbf{C}^n$，$\bar{x}^TAx$为一实值，见3.10-2。每一Hermitian矩阵有实特征值，而且不同的特征值对应于相互正交的特征向量。

3． 记$T_\lambda x=y$，我们有$\|x\|=\|R_\lambda y\|\leqslant c^{-1}\|y\|$。

5．
$$\langle W^*TWx,y\rangle=\langle TWx,Wy\rangle=\langle Wx,TWy\rangle$$
$$=\langle x,W^*TWy\rangle.$$

7. $Tx=\lambda_j x$，这里 $x=(\xi_n)$，$\xi_n=\delta_{nj}$，$\sigma(T)\supset[a,b]$ 如果 (λ_j) 在 $[a,b]$ 中稠密。这里我们已经用到 $\sigma(T)$ 是闭的，见7.3-2。

9. 注意到 t 是实的，$T|_X$ 的自伴性即得；对于 T 在 $L^2[0,1]$ 上，其自伴性也得自于内积的积分表示，这里积分为 Lebesgue 积分。$R_\lambda(T)x(t)=(t-\lambda)^{-1}x(t)$ 表明我们有 $\sigma(T)=[0,1]$。又当 $\lambda\in[0,1]$ 时，我们看出

$$T_\lambda x(t)=(t-\lambda)x(t)=0$$

蕴含对一切 $t\neq\lambda$，$x(t)=0$，即 $x=0$（$L^2[0,1]$ 中的零元素）。故 λ 不可能是 T 的特征值。

9.2 节

3. $m=0$，$M=1$。

5. 这由定理 9.2-3 直接得出。

7. 特征值 1，1/2，1/3，…而且 $\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\{0\}$。因 $Tx=0$ 蕴含 $x=0$。故我们有 $0\notin\sigma_p(T)$。因 T 是自伴的，故知 $\sigma_c(T)=\{0\}$ 由定理9.2-4得出。

9. 第一个论断由定理9.2-1和9.2-3得出，因 A 映 Y_j 到其自身，故第一个论断蕴含第二个论断。

9.3 节

1. $0\leqslant\langle(T-S)x,x\rangle$，$0\leqslant\langle(S-T)x,x\rangle$，故对一切 x，$\langle(T-S)x,x\rangle=0$。另由引理3.9-3(b)，$T-S=0$。

3. $S=B-A\geqslant0$，$ST=TS$，而且定理9.3-1蕴含 $ST\geqslant0$；这就得出结果。

5. 这得自于定理9.2-1和9.2-3。设 A 是一 n-行Hermitian矩阵（见3.10节）。则对一切 $x\in\mathbf{C}^n$，$\bar{x}^T Ax\geqslant0$ 当而且仅当 A 的一切特征值是非负的。

7. 由下式自伴性是显然的：

$$\langle T_1^2 T_2 x, y\rangle = \langle x, T_2 T_1^2 y\rangle = \langle x, T_1^2 T_2 y\rangle.$$

记 $y = T_1 x$，我们得出

$$\langle T_1^2 T_2 x, x\rangle = \langle T_2 T_1 x, T_1 x\rangle = \langle T_2 y, y\rangle \geqslant 0.$$

（注意结果也得自第 6 题）．

9．设 $(I+T)x=0$．则 $-x=Tx$，而且，因 $T\geqslant 0$

$$0 \leqslant \langle Tx, x\rangle = -\langle x, x\rangle = -\|x\|^2 \leqslant 0,$$

这就指出 $x=0$．故 $(I+T)^{-1}$ 存在．见 2.6-10．

13．这得自于第12题和定理9.2-1．

15．$\langle Tx, Tx\rangle \geqslant c^2\langle x, x\rangle$，$T^*T \geqslant c^2 I$，$T^*T$ 不是紧的(由 8.1-2(b)和第14题)，而且 T 不是紧的(见 8.3节习题6)．

9.4 节

1．例如，由下面的矩阵所表示的算子，其中 a_{12} 和 a_{21} 是任意的．$I^{\frac{1}{2}} = I$．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3．是的．是的．是的．$Ax = (0, 0, \xi_3, \xi_4, \cdots)$．

5．因 $T = T^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}}$，且 $T^{\frac{1}{2}}$ 是自伴的，故

$$\begin{aligned} |\langle Tx, y\rangle| &= |\langle T^{1/2}x, T^{1/2}y\rangle| \leqslant \|T^{\frac{1}{2}}x\| \, \|T^{\frac{1}{2}}y\| \\ &= \langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{\frac{1}{2}}x\rangle^{1/2} \langle T^{\frac{1}{2}}y, T^{\frac{1}{2}}y\rangle^{1/2} \\ &= \langle Tx, x\rangle^{1/2} \langle Ty, y\rangle^{1/2}. \end{aligned}$$

7．当 $Tx=0$ 时，那一不等式成立．设 $Tx \neq 0$．记 $y = Tx$，我们得

$$\|Tx\|^2 \leqslant \langle Tx, x\rangle^{1/2} \langle T^2 x, Tx\rangle^{1/2}.$$

因

$$\langle T^2 x, Tx\rangle \leqslant \|T^2 x\| \|Tx\| \leqslant \|T\| \|Tx\|^2,$$

故有

$$\|Tx\|^2 \leqslant \langle Tx, x\rangle^{1/2}\|T\|^{1/2}\|Tx\|,$$

除以$\|Tx\|$即得结果.

9. $DD^T = D^T D = I$.

9.5 节

1. 引用定理9.5-2,显然 $P=0$,如果P投影到$\{0\}$上; $P=I$,如果 P 投影到 H 上.

3. 例如, 由下面的矩阵所表示的 T, 其中 a_{21} 是任意的,不为零:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

5. 如果空间 $Y_j = P_j(H)$, $j=1,\cdots,m$, 是两两正交的, 则 P 是投影算子, 这由归纳法可得. 反之, 如果 P 是投影算子, 则

$\|Px\|^2 = \langle P^2x, x\rangle = \langle Px, x\rangle$, $\|P_kx\|^2 = \langle P_kx, x\rangle$, 故对一切 x

$$\|P_1x\|^2 + \|P_2x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m}\langle P_kx, x\rangle = \langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

对每一 y 和 $x=P_1y$, 于是我们有 $P_1x = P_1^2y = P_1y$, 且

$$\|P_1y\|^2 + \|P_2P_1y\|^2 \leqslant \|x\|^2 = \|P_1y\|^2,$$

故 $P_2P_1y=0$, 即 $P_2P_1=0$, 故由9.5-3, $Y_1 \perp Y_2$. 类似地, 对一切 j 和 $k \neq j$, $Y_j \perp Y_k$.

9. 设(e_k)是一内积空间 X 中的规格正交化序列. 则由 $P_kx = \langle x, e_k\rangle e_k$ 所定义的 P_k 是到空间 $Y_k = P_k(X)$上的投影. 由定理9.5-4我们看出 $P_1+P_2+\cdots+P_n$ 是一投影算子. 因

$$\|P_kx\|^2 = |\langle x, e_k\rangle|^2\|e_k\|^2 = |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

故第 8 题得出 3.4 节的(12*), 这就推出 3.4-6 的(12)

9.6 节

3. $(P_2-P_1)x=([\xi_1-\xi_2]/2, [\xi_2-\xi_1]/2, 0)$。否（见9.5-4）。

5. 例如，设 P_n 是 l^2 到这样的子空间上的投影，该子空间由一切这样的序列 $x=(\xi_j)$所组成，对一切 $j>n$，$\xi_j=0$。

7. $P(H)=\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n(H)$。

9. $T^*(Y^\perp)\subset Y^\perp$当而且仅当 $Y^{\perp\perp}\supset(T^*)^*(Y^{\perp\perp})$（这由3.9节习题5得知）。由3.3节的（8）式有 $Y^{\perp\perp}=Y$。又由3.9-4，$(T^*)^*=T$。

11. 如果 $\dim Y=r$，$\dim Y^\perp=n-r$，$Y=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_r\}$ 这里$(e_1,\cdots,e_n)$是H之一基，于是矩阵前面 r 行和最后的 $n-r$ 列相交处的元，以及最后的 $n-r$ 行和前面的 r 列相交处的元全为0。

13. 我们得出

$$TP_2=T(I-P_1)=T-TP_1=T-P_1T=(I-P_1)T=P_2T.$$

15. 设 $y\in Y$，$z\in Y^\perp$。则由假定 $Ty\in Y$，又 $Tz\in Y^\perp$ 由自伴性得出，因为

$$\langle Tz,y\rangle=\langle z,Ty\rangle=0.$$

9.8 节

1. $F_\lambda=E_{\lambda-0}$。

5. (a) 以零代一切负元。

(b) 以零代一切的正元，并弃掉负元的减号。

(c) 弃掉负元的减号。

7. 具主对角元：(a)$t_{jj}-\lambda$(t_{jj}是$\widetilde{T}$的主对角元)；(b) $\max(t_{jj}-\lambda,0)$；(c)$\max(-t_{jj}+\lambda,0)$；(d)$|t_{jj}-\lambda|$的对角形矩阵。

9. 若 $\lambda<0$，则 $E_\lambda=0$；若 $\lambda\geqslant0$，则 $E_\lambda=I$。

9.9 节

1. 若 $\lambda<0$，则 $E_\lambda=0$；若 $\lambda\geqslant0$，则 $E_\lambda=I$，

$$T=\int_{0-0}^{0}\lambda dE_\lambda=0(E_0-E_{0-0})=0(I-0)=0.$$

3. 若 $\lambda<1$，则 $E_\lambda=0$；若 $\lambda\geqslant1$，则 $E_\lambda=I$. 故

$$T=\int_{1-0}^{1}\lambda E_\lambda=1(E_1-E_{1-0})=1(I-0)=I.$$

5. E_λ 是在矩阵的不超过 λ 的一切特征值的特征空间的和上的投影.

9. 设 $x=(\xi_j)\in l^2$，则

$$\left\|\left(T-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}P_j\right)x\right\|^2=\left\|\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{j}\xi_je_j\right\|^2$$

$$=\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}|\xi_j|^2\leqslant\frac{1}{(m+1)^2}\sum_{j=m+1}^{\infty}|\xi_j|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{(m+1)^2}\|x\|^2,$$

于是

$$\left\|T-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}P_j\right\|\leqslant\frac{1}{m+1}\to0\quad(m\to\infty).$$

9.11节

1. 当 $\lambda<\lambda_1$（最小特征值）时，$E_\lambda=0$；E_λ 在特征值处恰好有"跳跃"，而且当 $\lambda=\lambda_n$ 时达到 I（这里 λ_n 是最大的特征值），当然这只证实我们在 9.7 节开始时的考虑.

3. $\lambda\mapsto E_\lambda$ 是连续的 $(\sigma_p(T)=\Phi)$，当 $\lambda<0$ 和 $\lambda\geqslant1$ 时是常值映象，而在 $[0,1]=\sigma(T)=\sigma_c(T)$ 上是非常值映象.

5. 如果一实数λ_0在$\rho(T)$中，则由定理9.11-2推出，对一切充分靠近λ_0的$\lambda\in\mathbf{R}$有$\lambda\in\rho(T)$。故$\rho(T)\cap\mathbf{R}$是$\mathbf{R}$之一开子集，其在$\mathbf{R}$上的补集是闭的。

7. 9.2节习题7中的T是一例。

9. 设Y是由T的一切特征向量生成的闭包。则$T_1=T|_Y$有一纯点谱且$T_1(Y)\subset Y$。而且T_1在Y上是自伴的。类似地，$T_2=T|_Z$在$Z=Y^\perp$上是自伴的并有一纯连续谱，这与由Y的构造所得出的正好一样。

10.1 节

5. $\mathscr{D}(S+T)$在H中稠密。

7. 由定理2.7-11扩张T到$\overline{\mathscr{D}(T)}$把所得的算子$\tilde{T}$扩张到$H$，例如当$x\in\overline{\mathscr{D}(T)}^\perp$令$\hat{T}x=0$。

9. 利用证明Hellinger-Toeplitz定理的思想。

10.2 节

3. 利用3.10-3的证明的思想。

5. 由10.2-1(b)，$T\subset T^{**}$，另由10.1节习题9 T^{**}是有界的。故T是有界的。

7. 引用2.7-11。$\tilde{T}$的对称性得自于T的对称性及内积的连续性(见3.2-2)。

9. 设S是T之一对称扩张。于是

$$T\subset S\subset S^*\subset T^*=T.$$

(见10.2-1(a))；故$T=S$。

10.3 节

1. 这由定理10.3-2(a)得出，因为，例如

$$x_n=\left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\cdots,\frac{1}{n^2},0,0\cdots\right)\to x=\left(\frac{1}{j^2}\right)\notin\mathscr{D}(T),$$

$$Tx_n=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},0,0\cdots\right)\to y=\left(\frac{1}{j}\right)\in l^2.$$

3. 设(w_n)是$H\times H$中之一Cauchy列，这里$w_n=(x_n,y_n)$。于是

$$\|w_n-w_m\|^2=\|x_n-x_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2$$

表明(x_n)和(y_n)是H中的Cauchy列，故$x_n\to x$和$y_n\to y$。于是$w_n\to w=(x,y)$。

5. 我们有$T_1=S^{-1}$，这里S：$l^2\to l^2$由$Sx=\left(\frac{\xi_j}{j}\right)$定义。显然，$S$是有界的。因$\mathscr{D}(S)=l^2$是闭的，故由10.3-2(c)，$S$是闭的；又由第4题$S^{-1}=T_1$也是闭的。

7. 设$(x_0,y_0)\in[U(\mathscr{G}(T))]^\perp$。则对一切$x\in\mathscr{D}(T)$，

$$0=\langle(x_0,y_0),\ (Tx,-x)\rangle=\langle x_0,Tx\rangle+\langle y_0,-x\rangle,$$

即$\langle Tx,x_0\rangle=\langle x,y_0\rangle$。故$x_0\in\mathscr{D}(T^*)$且$y_0=T^*x_0$，于是$(x_0,y_0)\in\mathscr{G}(T^*)$。反之，从$(x_0,y_0)\in\mathscr{G}(T^*)$出发，倒推，即得$(x_0,y_0)\in[U(\mathscr{G}(T))]^\perp$。

9. 由10.1节习题9，T^*是有界的；又由10.3-3知其为闭的。于是由10.3-2(c)$\mathscr{D}(T^*)$是闭的，由第8题它还是稠密的，故$\mathscr{D}(T^*)=H$。另由10.1节的习题9（其中应以T^*代替T）知T^{**}是有界的，而且由第8题知$T^{**}=T$。

10.4 节

1. 证明与定理9.1-1(a)的证明逐字相同。

3. 由10.4-1得之。

5. T_λ^{-1}存在且$\overline{\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})}\neq H$。故存在$y\neq 0$使得对一切$x\in\mathscr{D}(T_\lambda)=\mathscr{D}(T)$

$$0=\langle T_\lambda x,y\rangle=\langle Tx,y\rangle-\langle x,\bar{\lambda}y\rangle,$$

上式表明$T^*y=\bar{\lambda}y$。

7. 设 $\lambda\in\sigma_r(T)$。于是由第 5 题$\bar{\lambda}\in\sigma_p(T^*)$，故由 10.4-2 和 $T=T^*$，这就推出 $\lambda\in\sigma_p(T)$。矛盾。

9. $Tx=\lambda x$ 且 $x\neq 0$，这就推出

$$\lambda\langle x,x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle=\langle Tx,x\rangle=\langle x,Tx\rangle=\bar{\lambda}\langle x,x\rangle,$$

于是 $\lambda=\bar{\lambda}$。对应于不同特征值的特征向量是正交的；这与在定理9.1-1(b)中得出的一样。$\sigma_p(T)$的可数性现由定理3.6-4(a)得出。

10.5 节

1. $Ux_1=\lambda_1 x_1$，$Ux_2=\lambda_2 x_2$ 和

$$\langle x_1,x_2\rangle=\langle Ux_1,Ux_2\rangle=\lambda_1\bar{\lambda}_2\langle x_1,x_2\rangle,$$

故$\langle x_1,x_2\rangle=0$，因为 $\lambda_1\bar{\lambda}_2\neq 1$。

5. 若 λ 是一特征值，则 T_λ 完全没有逆，反之亦然。设 λ 是一近似特征值，且$\|T_\lambda x_n\|\to 0$，$\|x_n\|=1$，再设 T_λ^{-1} 存在。则

$$\|y_n\|=\|T_\lambda x_n\|^{-1}T_\lambda x_n\in\mathscr{R}(T_\lambda)=\mathscr{D}(T_\lambda^{-1}),$$

$\|y_n\|=1$，且

$$\|T_\lambda^{-1}y_n\|=\|T_\lambda x_n\|^{-1}\|x_n\|=\|T_\lambda x_n\|^{-1}\to\infty,$$

上式表明 T_λ^{-1} 是无界的。

反之，若 T_λ^{-1} 是无界的，则在$\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$中存在序列$\{y_n\}$使得$\|y_n\|=1$且$\|T_\lambda^{-1}y_n\|\to\infty$。取 $x_n=\|T_\lambda^{-1}y_n\|^{-1}T_\lambda^{-1}y_n$，我们有$\|x_n\|=1$ 且

$$\|T_\lambda x_n\|=\|T_\lambda^{-1}y_n\|^{-1}\cdot\|y_n\|=\|T_\lambda^{-1}y_n\|^{-1}\to 0.$$

7. $Tx-\lambda x=(-\lambda\xi_1,\xi_1-\lambda\xi_2,\xi_2-\lambda\xi_3,\cdots)=0$ 推出 $x=0$。

9. 直接由定义得之。

10.6 节

1. $t=i(1+u)/(1-u)$。

3. 对每一 $x\in H$ 我们有$(T+iI)^{-1}x\in\mathscr{D}(T)$，故

$$S(T+iI)^{-1}x \in \mathscr{D}(T)$$

且

$$(T+iI)S(T+iI)^{-1}x = S(T+iI)(T+iI)^{-1}x = Sx,$$

$$S(T+iI)^{-1}x = (T+iI)^{-1}Sx,$$

$$SUx = (T-iI)(T+iI)^{-1}Sx = USx.$$

5. 对每一 $x \in \mathscr{D}(T)$，因 T 是对称的，故

$$\text{(A)} \quad \|(T \pm iI)x\|^2 = \|Tx\|^2 \pm \langle Tx, ix\rangle \pm \langle ix, Tx\rangle + \|x\|^2$$
$$= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \geqslant \|x\|^2.$$

于是$(T+iI)x=0$ 就推出 $x=0$，由2.6-10知$(T+iI)^{-1}$ 存在，且由(A)知其为有界的。令$y=(T+iI)x$ 并引用(1)和(A)得出

$$\|Uy\|^2 = \|(T-iI)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2$$
$$= \|(T+iI)x\|^2 = \|y\|^2.$$

7. 由第 6 题和4.13-5(b)知$\mathscr{D}(U)$是闭的，故 $\mathscr{R}(U)$ 是闭的，因为由第 5 题U是等距的。

11.2 节

1. $\pi^{-1/4}$.

3. $T-cI = T-\mu I + (\mu - c)I$ 蕴含

$$E_\psi([T-cI]^2) = \mathrm{var}_\psi(T) + 2(\mu - c)E_\psi(T-\mu I) + (\mu - c)^2$$
$$\geqslant \mathrm{var}_\psi(T)$$

(因为 $E_\psi(T-\mu I)=0$)，故 $\mu = \mu_\psi(T)$.

5. 由11.1节的(2)式和本节的(4)式

$$1 = \int \psi\bar{\psi}\,dq = \int \bar{\psi}\int \frac{1}{\sqrt{h}}\varphi e^{(2\pi i/h)pq}\,dp\,dq$$

$$= \int \varphi \int \frac{1}{\sqrt{h}}\bar{\psi} e^{(2\pi i/h)pq}\,dp\,dq.$$

由(5)式，对 q 的积分是$\overline{\varphi(p)}$.

7. 例如，

$$(D_1Q_2-Q_2D_1)\psi=\frac{\partial}{\partial q_1}(q_2\psi)-q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\psi=0.$$

9. 诸$\mathcal{M}_j$由向量积的分量形式所启示。其他的两个关系式是

$$\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3-\mathcal{M}_3\mathcal{M}_2=\frac{ih}{2\pi}\mathcal{M}_1,$$

$$\mathcal{M}_3\mathcal{M}_1-\mathcal{M}_1\mathcal{M}_3=\frac{ih}{2\pi}\mathcal{M}_2.$$

它们由第7题直接计算可得，或由第一个交换关系中下标的循环排列而得。

11.3 节

1. $q=\pm\sqrt{2E/m\omega_0^2}$极大位移点，这里$E=V$；故$E_{kin}=0$。

3. $\psi_0''+(1-s^2)\psi_0=0$；ψ_0对应于(11)中的$\lambda=1$；这与$H_0(s)=1$的事实是一致的。

5. 由递归公式

$$\frac{a_{m+2}}{a_m}\sim\frac{2}{m}.$$

记

$$e^{s^2}=1+\beta_2s^2+\cdots+\beta_ms^m+\beta_{m+2}s^{m+2}+\cdots$$

对偶数m，我们有

$$\frac{\beta_{m+2}}{\beta_m}=\frac{1/\left(\frac{m}{2}+1\right)!}{1/\left(\frac{m}{2}\right)!}=\frac{2}{m+2}$$

上式表明，如果级数不是有限的，则对应的解当$|s|$充分大时与$\exp(s^2)$一样快地增长，从而ψ与$\exp\left(\frac{s^2}{2}\right)$一样快地增大。

11.4 节

1. 我们有

$$\Delta\eta+\frac{8\pi^2 m}{h^2}E\eta=0,$$

$$\eta(q)=\eta_1(q_1)\eta_2(q_2)\eta_3(q_3),\quad E=A_1+A_2+A_3,$$

$$\frac{\eta_1''}{\eta_1}+\frac{\eta_2''}{\eta_2}+\frac{\eta_3''}{\eta_3}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(A_1+A_2+A_3)=0,$$

$$\eta_j''+\frac{8\pi^2 m}{h^2}A_j\eta_j=0,$$

等。

3. 由第 2 题

$$\psi_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}A^*(A^{*n}\psi_0)=\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}A^*\sqrt{n!}\psi_n.$$

由(15)，还有

$$A\psi_n=\frac{1}{\sqrt{n}}AA^*\psi_{n-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}(A^*A+\tilde{I})\psi_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}(n-1+1)\psi_{n-1}.$$

5. 当 $s=1$ 时为真，因为由(13)到(15)式

$$AQ-QA=\frac{1}{2\alpha\beta}[A(A+A^*)-(A+A^*)A]$$

$$=\frac{1}{2\alpha\beta}[AA^*-A^*A]=\sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}\tilde{I}$$

我们作归纳法假设，对任意固定的 s 公式成立，把 Q 从左端和右端作用之得

$$QAQ^s-Q^{s+1}A=\sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}sQ^s,$$

$$AQ^{s+1}-Q^{s}AQ=\sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}sQ^{s}.$$

加之，有

$$AQ^{s+1}-Q^{s+1}A+Q(AQ^{s-1}-Q^{s-1}A)Q=\sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}2sQ^{s},$$

其中

$$AQ^{s-1}-Q^{s-1}A=\sqrt{\frac{h}{4\pi m\omega_0}}(s-1)Q^{s-2}.$$

7. 由11.3节的(2)式，我们可以写成 $\Psi(q,t)=\psi(q)e^{-i\omega t}$，其中

$$\psi(q)=\psi_1(q)=A_1e^{ib_1q}+B_1e^{-ib_1q},\quad (q<0),$$
$$\psi(q)=\psi_2(q)=A_2e^{ib_2q}+B_2e^{-ib_2q},\quad (q\geqslant 0).$$

ψ_1 中的第一项表示入射波，而且可取 $A_1=1$。ψ_1 中的第二项表示反射波。ψ_2 中的第一项表示传递波，且 $B_2=0$，因为由假设没有波从右边入射进去。Schrödinger 方程表明势中的不连续性引起 ψ''在 $q=0$ 处的不连续性，而且 ψ 和 ψ' 在 0 点的连续性得出下面的二条件：

$$1+B_1=A_2,$$
$$ib_1(1-B_1)=ib_2A_2.$$

故

$$B_1-\frac{b_1-b_2}{b_1+b_2},\qquad A_2=\frac{2b_1}{b_1+b_2}.$$

注意 $b_2^2>0$，故 b_2 是实的而且传递波是正弦的。

9. $b_2^2<0$，$b_2=i\beta_2$(β_2 是正实数)。ψ_1 仍是正弦曲线，但

$$\psi_2(q)=A_2e^{-\beta_2q}$$

(指数衰减)。波进入 $q>0$ 的区域，该区域经典粒子不能进入。

11.5 节

3. $|m|\leqslant l$，因为 P_l 是 l 次的，且 z 不必恒为零。

9. $u(\rho)=\rho^{-1/2}v(\rho)$ 给出 $v''+v=0$，这就得出 $J_{1/2}$ 和 $J_{-1/2}$。在 0 点为有限的解是

$$(l=0)\qquad J_{1/2}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sin\rho,$$

$$(l=1)\qquad J_{3/2}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\left(\frac{\sin\rho}{\rho}-\cos\rho\right)$$

$$(l=2)\qquad J_{5/2}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\left(3\frac{\sin\rho}{\rho^2}-3\frac{\cos\rho}{\rho}-\sin\rho\right).$$

参 考 文 献

Banach, S. (1922), Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Math* 3, 133—181

Banach, S. (1929), Sur les fonctionnelles linéaires II. *Studia Math*. 1, 223—239

Banach, S. (1932), *Théorie des opérations linéaires* New York: Chelsea

Banach, S., et H. Steinhaus (1927), Sur le principe de la condensation de singularités. *Fundamenta Math*. 9, 50—61

Berberian, S. (1961), *Introduction to Hilbert Space*. New York: Oxford University Press

Bernstein, S. N. (1912), Démonstration du théoréme de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités *Comm Soc. Math, Kharkow* 13, 1—2

Bielicki. A. (1956). Une remarque sur la méthode de Banach–Cacciopoli–Tikhonov. *Bull. Acad. Polon. Sci*. 4, 261—268

Birkhoff, G. (1967), *Lattice Theory*. 3rd ed. Amer.

Math. Soc. Coll. Publ. 25. Providence, R. I.: American Mathematical Society.

Birkhoff, G., and S. Mac Lane (1965), *A Survey of Modern Algebra*3rd. ed. New York: Macmillan

Bohnenblust, H. E., and A. Sobczyk(1938), extensions of functionals on complex linear spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* 44, 91—93

Bourbaki, N. (1955), *Éléments de mathématique*, livre V. *Espaces vectoriels topologiques.* Chap. III à V. Paris: Hermann

Bourbaki, N. (1970), *Élements de mathématique*, *Algèbre*. Chap. 1à3. Paris: Hermann

Cheney, E. W. (1966), *Introduction to Approximation Theory.* New York: McGraw-Hill

Churchill, R. V. (1963), *Fourier Series and Boundary Value Problems.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill

Courant, R., and D. Hilbert (1953—62), *Methods of Mathematical Physics.*2 vols. New York: Interscience/Wiley

Cramér, H.(1955), *The Elements of Probability Theory and Some of its Applications.* New York: Wiley

Day, M. M.(1973), *Normed Lirear Spaces.* 3rd ed. New York: Springer

Dieudonné, J.(1960), *Foundations of Modern Analysis.* New York: Academic Press

Dixmier, J. (1953), Sur les bases orthonormales dans les espaces Préhilbertiens. *Acta Math. Szeged* 15,29—30

Dunford, N., and J. T. Schwartz (1958—71), *Linear Operators*. 3 parts. New York: Interscience/Wiley

Edwards, R. E.(1965), *Functional Analysis*. New York: Holt, Rinehart and Winston

Enflo, P.(1973). A counterexample to the approximation property. *Acta Math.* 130, 309—317

Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (1953—), *Higher Transcendental Functions*. 3 vols. New York: McGraw-Hill

Fejér, L. (1910), Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe. *Journal Reine Angew. Math.* 137, 1—5

Fréchet, M. (1906), Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 22,1—74

Fredholm, I.(1993). Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Aeta Math.* 27, 365—390

Friedrichs, K.(1935), Beiträge zur Theorie der Spektralschar. *Math. Annalen* 110, 54—62

Gantmacher, F. R. (1960), *The Theory of Matrices*. 2 vols. New York:Chelsea

Gelfand, I. (1941), Normierte Ringe. *Mat. Sbornik (Recueil mathématique)* N. S. 9,(51),3—24

Gram, J. P. (1883), Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate *Journal Reine Angew. Math* 94, 41—73

Haar, A.(1918), Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. *Math. Ann-*

alen 78, 294—311

Hahn, H. (1922), Über Folgen: linearer Operationen. *Monatshefte Math. Phys.* 32,3—88

Hahn, H.(1927), Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. *Journal Reine Angew. Math.* 157, 214—229

Halmos, P.R.(1958), *Finite-Dimensional Veclor Spaces.* 2nd ed. New York: Van Nostrand Reinhold

Hamming, R. W.(1950), Error detecting and error correcting codes. *Bell System Tech. Journal* 29, 147—160

Hellinger, E., und O Toeplitz(1910), Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. *Math. Annalen* 69, 289—330

Helmberg, G.(1969), *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space.* New York: American Elsevier

Hewitt, E., and K. Stromberg(1969), *Real and Abstract Analysis.* Berlin: Springer

Hilbert, D.(1912), *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Repr. 1953. New York: Chelsea

Hille, E.(1973), *Analytic Function Theory.* Vol. I. 2nd ed. New York: Chelsea

Hille, E., and R. S. Phillips (1957), *Functional Analysis and Semi-Groups.* Amer Math. Soc. Coll. Publ. 31. Rev. ed. Providence, R. I.: American Mathematical Society

Hölder, O. (1889), Über einen Mittelwertsatz. *Nachr.*

Akad. Wiss. Göttingen. Math-Phys. Kl., 38—47

Ince, E. L. (1956), *Ordinary Differential Epuations.* New York: Dover James, R. C.(1950), Bases and reflexivity of Banach spaces. *Annals of Math.* (2) 52, 518—527

James, R. C. (1951), A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 37, 174—177

Kelley, J. L. (1955). *General Topology.* New York: Van Nostrand.

Kelley, J.L., and I. Namioka(1963), *Linear Topological Spaces.* New York: Van Nostrand

Kreyszig, E.(1970), *Introductory Mathematical Statistics.* New York: Wiley

Kreyszig, E. (1972), *Advanced Engineering Mathematics.* 3rd ed. New York: Wiley

Lebesgue, H. (1909), Sur les intégrales, Singulières *Ann. de Toutouse*(3)1, 25—117

Lorch, E. R. (1939), On a calculus of operators in reflexive vector spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 45, 217—234

Lorch, E.R.(1962), *Spectral Theory.* New York:Oxford University Press

Löwig, H. (1934), Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl. *Acta Sci. Math. Szeged* 7, 1—33

Mcshane, E. J. (1944), *Integration.* Princeton, N, J.: Princeton Universty Press

Merzbacher, E.(1970), *Quantum Mechanics*.2nd ed. New York: Wiley

Minkowski, H. (1896), *Geometrie der Zahlen*.Leipzig: Teubner.

Murray, F. J. (1937), On complementary manifolds and projection in spaces, L_p and l_p.*Trans. Amer. Math. Soc.* 41, 138—152

Naimark, M. A. (1972), *Normed Algebras*. 2nd ed. Groningen: Wolters-Noordhoff

Neumann, J. von (1927), Mathematische Begründung der Quantenmechanik. *Nachr.Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, 1—57

Neumann, J. von (1929—30), Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. *Math. Annalen* 102, 49—131

Neumann, J. von (1929—30b), Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. *Math. Annalen* 102, 370—427

Neumann, J. von(1936),Über abjungierte Funktionaloperatoren. *Annals of Math* (2)33, 294—310

Poincaré,H.(1896),La méthode de Neumann et le probléme de Dirichlet. *Acta Math.* 20,59—142

Pólya, G.(1933), Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. *Math. Zeitschr.* 37,264—286

Rellich, F.(1934), Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen. *Math. Annalen* 110,342—356

Riesz, F.(1909), Sur les opérations fonctionnelles linéaires.*Comptes Rendus Acad.Sci.Paris* 149,974—977

Riesz, F. (1918), Über lineare Funktionalgleichungen. *Acta Math.* 41,71—98

Riesz,F. (1934), Zur Theorie des Hilbertschen Raumes. Acta Sci. *Math. Szeged* 7,34—38

Riesz, F., and B. Sz.-Nagy(1955), *Functional Analysis.* New York: Ungar

Rogosinski, W.(1959), *Fourier Series.* 2nd ed. New York: Chelsea

Royden, H.L.(1968), *Real Analysis.* 2nd ed. Now York: Macmillan

Sard, A., and S. Weintraub(1971), *A Book of Splines.* New York: Wiley

Schauder, J.(1930), Über lineare. vollstetige Funktionaloperationen *Studia Math.* 2,1—6

Schiff, L. I. (1968), *Quantum Mechanics.* 3rd ed. New York: MoGraw-Hill

Schmidt, E. (1907), Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Math. Annalen* 63, 433—476

Schmidt, E.(1908), Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. *Rend.* Circ. Mat. Palermo 25, 53—77

Schur, I. (1921), Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. *Journal Reine Angew.* Math. 151, 79—111

Sobczyk, A. (1941), Projections in Minkowski and Banach spaces. *Duke Math. Journal* 8, 78—106

Stone, M. H.(1932), *Linear Transformations in Hilbert*

Space and their Applications to Analysis. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 15. New York: American Mathematical Society

Szegö, G.(1967), *Orthogonal Polynomials*. 3rd ed.Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 23. Providence,R. I.: American Mathematical Society

Taylor, A.E.(1958), *Introduction to Functional Analysis*. New York: Wiley

Todd, J. (1962), *Survey of Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill

Wecken, F. J. (1935), Zur Theorie linearer Operatoren *Math. Annalen* 110, 722—725

Weierstrass, K. (1885), Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 633—639, 789—805

Wiener, N. (1922), Limit in terms of continuous transformation. *Bull. Soc. Math. France* (2) 50, 119—134

Wilks, S. S. (1962), *Mathematical Statistics*. New York: Wiley

Wintner, A. (1929), Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen. *Math. Zeitschr* 30, 228—282

Yosida, K. (1971), *Functional Analysis*. 3rd ed. Berlin: Springer

Yosida, K.(1971), *Functional Analysis*. 3rd ed. Berlin: Springer

Zaanen, A. C.(1964), *Linear Analysis*. Amsterdam: No-

rth-Holland Publ.

Zakon, E. (1973), *Mathematical Analysis*. Part II. Lecture Notes. Department of Mathematics, University of Windsor, Windsor, Ont.

名 词 索 引

A

D

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

V

W

[General Information]
书名=泛函分析引论及应用
作者=（美）E·克里兹格
页数=667
SS号=10069799
DX号=
出版日期=1986年06月第1版
出版社=重庆出版社